2.10　3 項間漸化式と極限

問題

110 $a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}=\dfrac{1}{4}(a_{n+1}+3a_n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $b_n=a_{n+1}-a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を n を用いて表せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n を用いて表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。　(宮崎大)

チェック・チェック

110 3 項間漸化式 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ で定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めるには

$$t^2+pt+q=0$$

の解 α，β を使って

$$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$$

と変形します。$\alpha=\beta$（重解）のときは

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

です。本問では，$t^2=\dfrac{1}{4}(t+3)$ より

$$4t^2-t-3=0 \qquad \therefore\quad t=-\frac{3}{4},\ 1$$

$$\begin{cases} a_{n+2}-a_{n+1}=-\dfrac{3}{4}(a_{n+1}-a_n) & \cdots\cdots ① \\ a_{n+2}+\dfrac{3}{4}a_{n+1}=1\cdot\left(a_{n+1}+\dfrac{3}{4}a_n\right) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を考えればよいのですが，(1) より①が得られるので，解答では①だけで一般項を求めてみます。階差数列と一般項の関係を使います。

解答・解説

110 (1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと

$$b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$$

これに，$a_{n+2} = \frac{1}{4}(a_{n+1} + 3a_n)$ を代入すると

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_{n+1} + 3a_n) - a_{n+1} = -\frac{3}{4}(a_{n+1} - a_n) = -\frac{3}{4}b_n$$

$$\therefore \quad b_{n+1} = -\frac{3}{4}b_n$$

また，$b_1 = a_2 - a_1 = 1 - 0 = 1$ であり，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = 1$，公比 $-\frac{3}{4}$ の等比数列であるから

$$b_n = 1\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \underline{\boldsymbol{\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}}}$$

(2) (1) より

$$a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1} = 0 + \frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}$$

$$= \frac{4}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

$$\therefore \quad a_n = \underline{\boldsymbol{\frac{4}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\} \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)}}$$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 0$ より　　$\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\boldsymbol{\frac{4}{7}}}$

【参考】 $\boldsymbol{t^2 = \frac{1}{4}(t+3)}$ を解くと

$$4t^2 - t - 3 = 0 \qquad (4t+3)(t-1) = 0 \qquad \therefore \quad t = -\frac{3}{4},\ 1$$

これより与えられた漸化式は次の 2 通りに変形できる。

$$\begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{3}{4}(a_{n+1} - a_n) & \cdots\cdots ① \\ a_{n+2} + \frac{3}{4}a_{n+1} = 1\cdot\left(a_{n+1} + \frac{3}{4}a_n\right) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より　$a_{n+1} - a_n = (a_2 - a_1)\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 1\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ ……①′

②より　$a_{n+1} + \frac{3}{4}a_n = \left(a_2 + \frac{3}{4}a_1\right)\cdot 1^{n-1} = 1$ ……②′

②′ − ①′ より　$\frac{7}{4}a_n = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$$\therefore \quad a_n = \frac{4}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\} \longrightarrow \frac{4}{7} \quad (n\to\infty)$$