2.11　連立漸化式と極限

問題

111 p, q は $p>0$, $q>0$, $p+q=1$ をみたす定数とする。$a_0=1$, $b_0=2$ とし，a_n, b_n $(n=1, 2, \cdots)$ を

$$a_n = pa_{n-1} + qb_{n-1}$$
$$b_n = pb_{n-1} + qa_n$$

により定める。

(1) $c_n = b_n - a_n$ とおくとき，c_n が等比数列であることを示せ。

(2) a_n と $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(3) b_n と $\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。　　（名古屋市立大）

チェック・チェック

111 **連立漸化式** $\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$ の一般解を求める一つの方法は $\{a_n - tb_n\}$ が等比数列となる t を見つけることです。

$$a_{n+1} - tb_{n+1} = (p-rt)a_n + (q-st)b_n = (p-rt)\left(a_n - \frac{st-q}{p-rt}b_n\right)$$

であり，$t = \dfrac{st-q}{p-rt}$ を変形すると，$\boldsymbol{t = \dfrac{pt+q}{rt+s}}$ となります。$t=\dfrac{pt+q}{rt+s}$ の解を α, β とすると

数列 $\{a_n - \alpha b_n\}$, $\{a_n - \beta b_n\}$

はどちらも等比数列となります。

本問は $\begin{cases} a_n = pa_{n-1} + qb_{n-1} \\ b_n = pb_{n-1} + q\underline{a_n} \end{cases}$ と少し変則的な式になっています。

$$b_n = \bigcirc b_{n-1} + \triangle \underline{a_{n-1}}$$

と直してから，誘導にのって式を変形していきましょう。

解答・解説

111 (1) $a_n = pa_{n-1} + qb_{n-1}$ …… ①

$b_n = pb_{n-1} + qa_n$ …… ②

①を②に代入すると

$$\begin{aligned} b_n &= pb_{n-1} + q(pa_{n-1} + qb_{n-1}) \\ &= pqa_{n-1} + (p+q^2)b_{n-1} \quad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

③−①より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b_n - a_n} &= (pq-p)a_{n-1} + (p+q^2-q)b_{n-1} \\ &= p(q-1)a_{n-1} + \{p+q(q-1)\}b_{n-1} \\ &= -p^2a_{n-1} + p^2b_{n-1} \quad (\because\ p+q=1) \\ &\boldsymbol{= p^2(b_{n-1} - a_{n-1})} \end{aligned}$$

$c_n = b_n - a_n$ とおくと

$$c_n = p^2c_{n-1}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すなわち，$\{c_n\}$ は初項 $c_0 = b_0 - a_0 = 2-1 = 1$，公比 p^2 の等比数列である。（証終）

(2) (1) より

$$c_n = b_n - a_n = 1\cdot(p^2)^n = p^{2n}$$

$$\therefore\quad b_{n-1} = a_{n-1} + p^{2(n-1)} \quad \cdots\cdots ④$$

④を①に代入すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_n} &= pa_{n-1} + q(a_{n-1} + p^{2(n-1)}) \\ &\boldsymbol{= a_{n-1} + qp^{2(n-1)}} \quad (\because\ p+q=1) \end{aligned}$$

$n \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} qp^{2(k-1)} = 1 + q\cdot\frac{1-p^{2n}}{1-p^2} \\ &= 1 + \frac{1-p^{2n}}{1+p} \quad (\because\ p+q=1) \end{aligned}$$

これは $n=0$ のときも成り立つ。

$$\begin{aligned} \therefore\quad a_n &= 1 + \frac{1-p^{2n}}{1+p} \\ &= \underline{\boldsymbol{\frac{2+p-p^{2n}}{1+p}\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)}} \end{aligned}$$

また $p>0$，$q>0$，$p+q=1$ より $0<p<1$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p^{2n} = 0$ であり

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\boldsymbol{\frac{2+p}{1+p}}}$$

(3)
$$\begin{aligned} b_n &= a_n + c_n = \frac{2+p-p^{2n}}{1+p} + p^{2n} \\ &= \underline{\boldsymbol{\frac{2+p+p^{2n+1}}{1+p}\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)}} \end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p^{2n+1} = 0$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \underline{\boldsymbol{\frac{2+p}{1+p}}}$