2.12 分数漸化式と極限

問題

112 次の式で与えられる数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ。

$$a_1 = 5,\ a_{n+1} = \frac{5a_n - 16}{a_n - 3}\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

(1) 数列の一般項 a_n を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。 (岐阜大)

チェック・チェック

112 分数漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{pa_n + q}{ra_n + s}$ の一般解を求めるには $t = \dfrac{pt + q}{rt + s}$ の解 α，β を使って

$$数列 \left\{\frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta}\right\}$$

をつくります。重解 $\alpha = \beta$ のときは数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n - \alpha}\right\}$ を考えます。

本問は重解のタイプになっています。

しかし，ノーヒントでこれを出題するというのは少々酷です。一般項を推定し，数学的帰納法でそれを確認することが出題者の意図かもしれません。

解答・解説

112 (1) $a_{n+1}=\dfrac{5a_n-16}{a_n-3}$

$t=\dfrac{5t-16}{t-3}$ を解くと

$$t^2-8t+16=0 \qquad \therefore \quad t=4\ (\text{重解})$$

数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-4}\right\}$ を考える。

$$\frac{1}{a_{n+1}-4}=\frac{1}{\dfrac{5a_n-16}{a_n-3}-4}=\frac{a_n-3}{(5a_n-16)-4(a_n-3)}$$
$$=\frac{a_n-3}{a_n-4}=1+\frac{1}{a_n-4}$$

より，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-4}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1-4}=\dfrac{1}{5-4}=1$，公差 1 の等差数列である。したがって

$$\frac{1}{a_n-4}=1+(n-1)\cdot 1=n$$
$$\therefore \quad a_n=\underline{\boldsymbol{4+\frac{1}{n}}}$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ より

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\underline{\mathbf{4}}$$

【注意】$a_1=5$，$a_2=\dfrac{9}{2}$，$a_3=\dfrac{13}{3}$，$a_4=\dfrac{17}{4}$，$a_5=\dfrac{21}{5}$，$\cdots$

となります。これらから $a_n=\dfrac{4n+1}{n}=4+\dfrac{1}{n}$ を推定せよ，というのが出題者の意図でしょうか。このあとは数学的帰納法により推定の立証を行います。