3.3　$(\sin\theta)/\theta \to 1$ $(\theta \to 0)$

問題

122　(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\sin x} =$ □　（東北学院大）

(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(2\sin\theta)}{\theta} =$ □　（会津大）

123　次の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$　（東京農工大）

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$　（摂南大）

124　(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\tan 2x =$ □　（高知女子大）

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\tan\frac{x+\pi}{2} =$ □　（神奈川大）

チェック・チェック

122　$\sin\theta$ についての極限の問題です。$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ にもち込みます。

(1) では，$x-\pi=\theta$，(2) では，$2\sin\theta=y$ とおいてみましょう。

123　$\cos\theta$ についての極限の問題です。ここでも $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ にもち込みます。

(1) $1-\cos 2x = 2\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{2} = 2\sin^2 x$　（∵ **半角の公式**）と変形します。

(2) $1-\cos x$ は (1) と同じ変形です。分母の $\sqrt{\ }$ も払います。

124　$\tan\theta$ についての極限の問題です。やはり，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ にもち込みます。

(1) $\tan 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$ として，**sin，cos の極限に直します。**

(2) $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{\tan\theta}$ です。

解答・解説

122 (1) $x-\pi=\theta$ とおくと，$x\to\pi$ のとき $\theta\to 0$ で

$$\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\sin x}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin(\pi+\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{-\dfrac{\sin\theta}{\theta}}=\underline{-1}$$

(2) $$\frac{\sin(2\sin\theta)}{\theta}=\frac{\sin(2\sin\theta)}{2\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot 2$$

であり，$y=2\sin\theta$ とおくと，$\theta\to 0$ のとき $y\to 0$ で

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(2\sin\theta)}{2\sin\theta}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$$

$$\therefore\quad \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(2\sin\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(2\sin\theta)}{2\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot 2=1\cdot 1\cdot 2=\underline{2}$$

123 (1) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\cdot 1^2=\underline{2}$$

(2)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)-(1-x^2)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\cdot 1^2\cdot(1+1)=\underline{\mathbf{1}}$$

124 (1) $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\tan 2x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}=2\cdot 1\cdot 1=\underline{2}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}x\tan\frac{x+\pi}{2}=-\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{1}{\tan\dfrac{x}{2}}=-\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{\cos\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$$
$$=-\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\cdot\cos\frac{x}{2}$$
$$=-2\cdot 1\cdot 1=\underline{-2}$$