3.4　e の定義

問題

125 次の問いに答えよ。

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$ を求めよ。　（高知女子大）

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log(e+h)-1}{h}=\boxed{}$ である。ただし，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}=1$ を用いてよい。　（日本工業大）

126 次の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{2x}}$　（早稲田大）

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^{(1+h)^2}-e^{h^2+1}}{h}$　（法政大）

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\{\log(n+1)-\log n\}$　（東京工科大）

127 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$ を求めよ。　（小樽商科大）

チェック・チェック

自然対数の底 e はいろいろな形で表現されます。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log_e(1+h)}{h}=1$

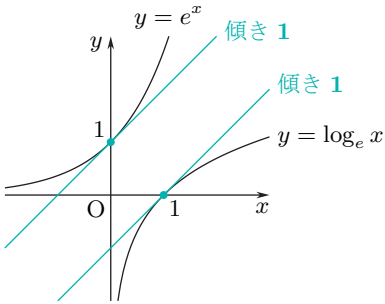
(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

(1)，(2) は右図のように

$y=e^x$，$y=\log_e x$

のグラフ上のそれぞれの点 (0，1)，(1，0) における**接線の傾きが 1** であることを意味しています。

(3)，(4) はそれぞれ，(2)，(3) を変形すれば導くことができます。



125 (1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ が利用できるように変形します。

126 (1)，(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ が利用できるように変形します。

127 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ が利用できるように変形します。

解答・解説

125 (1)
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+1-e^{-x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^x-1}{x}-\left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right)\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)$$
$$=1+1=\underline{\mathbf{2}}$$

(2)
$$\lim_{h\to 0}\frac{\log(e+h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log\dfrac{e+h}{e}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log\left(1+\dfrac{h}{e}\right)}{h}$$

ここで，$\dfrac{h}{e}=t$ とおくと，$h\to 0$ のとき $t\to 0$ で

$$与式=\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{e\cdot t}=\frac{1}{e}\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=\frac{1}{e}\cdot 1=\underline{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}}}$$

126 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+e^x)(1-e^x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+e^x}\cdot\frac{-1}{\dfrac{e^x-1}{x}}=\frac{1}{1+1}\cdot\frac{-1}{1}=\underline{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$$

(2)
$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{(1+h)^2}-e^{h^2+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{h^2+1}(e^{2h}-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}2e^{h^2+1}\cdot\frac{e^{2h}-1}{2h}$$
$$=2e\cdot 1=\underline{\mathbf{2}\boldsymbol{e}}$$

(3)
$$\lim_{n\to\infty}n\{\log(n+1)-\log n\}=\lim_{n\to\infty}n\log\frac{n+1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ なので，対数関数の連続性より

$$与式=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\log e=\underline{\mathbf{1}}$$

127
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{(e^{x^2}-1)\frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)\right\}$$
$$=1\cdot 1^2\cdot(1+1)=\underline{\mathbf{2}}$$