3.5　図形への応用

問題

128 次の問に答えよ。

(1) $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に対し，不等式 $\sin\theta \leqq \theta \leqq \tan\theta$ が成立することを示せ。

(2) 正の実数 x と自然数 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，複素数 $1 + \dfrac{x}{n}i$ の偏角を $\theta_n (0 \leqq \theta_n < 2\pi)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\theta_n$ を求めよ。

(3) (2) で与えた複素数の n 乗 $\left(1 + \dfrac{x}{n}i\right)^n$ の実部を a_n とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。　（金沢大）

129 半径 1 の円に内接する正 n 角形の面積を S_n，外接する正 n 角形の面積を T_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2(T_n - S_n)$ を求めよ。　（武蔵工業大）

チェック・チェック

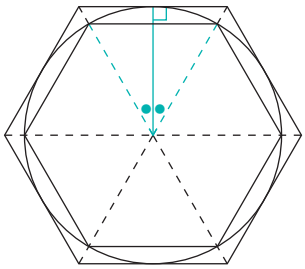
128 (1) 教科書にもある有名な不等式ですね。$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ を示すときの出発点となる不等式です。

(2) (1) の不等式を利用し，ハサミウチの原理を用います。

(3) 複素数の n 乗は，複素数を極形式で表して，**ド・モアブルの定理**を用います。

129 図をかいてみて，S_n，T_n を求めることが第一歩です。たとえば，$n = 6$ のときは右図のようになりますね。

三角関数が絡んだ極限ですから，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ を使います。

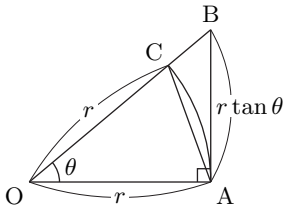


解答・解説

128 (1) $\theta = 0$ のとき

$$\sin\theta = \theta = \tan\theta = 0$$

より成立する。



$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，OA $= r$，$\angle$AOB $= \theta$，$\angle$OAB $= \dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形 OAB を考え，OB 上に OC $= r$ となるように点 C をとると

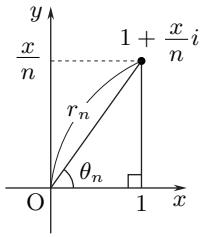
$$(\triangle\text{OAC の面積}) < (\text{おうぎ形 OAC の面積}) < (\triangle\text{OAB の面積})$$

$$\frac{1}{2}r^2\sin\theta < \frac{1}{2}r^2\theta < \frac{1}{2}r^2\tan\theta$$

$$\therefore\quad \sin\theta < \theta < \tan\theta$$

以上より，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で $\sin\theta \leqq \theta \leqq \tan\theta$ が成立する。　（証終）

(2) $1 + \dfrac{x}{n}i$ $\left(\dfrac{x}{n} > 0\right)$ の絶対値を r_n，偏角を θ_n とおくと，$0 < \theta_n < \dfrac{\pi}{2}$ であり



$$r_n = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2}$$

$$\cos\theta_n = \frac{1}{r_n},\ \sin\theta_n = \frac{x}{nr_n},\ \tan\theta_n = \frac{x}{n}$$

(1) の結果と $n > 0$ より

$$n\sin\theta_n \leqq n\theta_n \leqq n\tan\theta_n$$

$$\frac{x}{r_n} \leqq n\theta_n \leqq x$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{r_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2}} = x$$

よって，**ハサミウチの原理**より

$$\lim_{n\to\infty} n\theta_n = \underline{\boldsymbol{x}}$$

(3) $1 + \dfrac{x}{n}i = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ とド・モアブルの定理より

$$\left(1 + \frac{x}{n}i\right)^n = (r_n)^n(\cos n\theta_n + i\sin n\theta_n)$$

$$\therefore\quad a_n = (r_n)^n\cos n\theta_n$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}(r_n)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2\right\}^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{x^2}}\right\}^{\frac{x^2}{2n}} = e^0 = 1$$

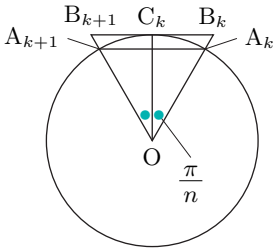
また，cos の連続性より

$$\lim_{n\to\infty}\cos n\theta_n = \cos x$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1\cdot\cos x = \underline{\boldsymbol{\cos x}}$$

129 右図のように，半径 1 の円の中心を O，円に内接する正 n 角形の頂点を A_1，A_2，$\cdots$，A_n，外接する正 n 角形の頂点を B_1，B_2，$\cdots$，B_n とすると



$$\angle A_kOA_{k+1} = \angle B_kOB_{k+1} = \frac{2\pi}{n}$$
$$(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

より

$$\begin{aligned} S_n &= n \times \triangle OA_kA_{k+1} \\ &= n \times \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \\ &= \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

また，辺 B_kB_{k+1} の中点を C_k とおくと，$OC_k = 1$ であり

$$B_kB_{k+1} = 2B_kC_k = 2OC_k\tan\frac{\pi}{n} = 2\tan\frac{\pi}{n}$$

なので

$$\begin{aligned} T_n &= n \times \triangle OB_kB_{k+1} = n \times \frac{1}{2}B_kB_{k+1} \cdot OC_k \\ &= n\tan\frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} n^2(T_n - S_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} n^2\left(n\tan\frac{\pi}{n} - \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right) \\ &= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\pi}{\theta}\right)^2\left(\frac{\pi}{\theta}\tan\theta - \frac{\pi}{2\theta}\sin 2\theta\right) \quad \left(\because\ \frac{\pi}{n} = \theta\text{とおいた}\right) \\ &= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\pi}{\theta}\right)^3\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2}\right) \\ &= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\pi}{\theta}\right)^3\frac{\sin\theta\cdot(1-\cos^2\theta)}{\cos\theta} \\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\pi^3}{\cos\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3 = \frac{\pi^3}{1}\cdot 1^3 = \underline{\boldsymbol{\pi^3}} \end{aligned}$$