1.2　微分係数

問題

132 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能な関数であるとき，式

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a+h)}{h}$$

を $f'(a)$ を用いて表すと，$\boxed{}$ である。　（東北学院大）

133 次の極限値を計算せよ。

$$\lim_{x\to a}\frac{a^2\sin^2 x-x^2\sin^2 a}{x-a}=\boxed{}$$

（立教大）

134 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(3^{\frac{1}{n}}-1)=\boxed{}$　（小樽商科大）

チェック・チェック

132 微分係数の定義式が現れるように式変形します。

133 $f(x)=\sin^2 x$ として

$$\begin{aligned}\frac{a^2\sin^2 x-x^2\sin^2 a}{x-a}&=\frac{a^2\{f(x)-f(a)\}+a^2f(a)-x^2f(a)}{x-a}\\&=a^2\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-(a+x)f(a)\\&\longrightarrow a^2f'(a)-2af(a)\ (x\to a)\end{aligned}$$

と変形してもよいですが，$g(x)=a^2\sin^2 x-x^2\sin^2 a$ とすると，$g(a)=0$ より

$$与式=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$$

が得られます。

134 $(a^x)'=a^x\log a$（$a>0$，$a\neq 1$）を利用します。

解答・解説

132 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a+h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)\boldsymbol{-f(a)+f(a)}-f(a+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\cdot 3-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right\}$$

ここで

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}=\lim_{3h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}=f'(a)\\ \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)\end{cases}$$

なので

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a+h)}{h}=3f'(a)-f'(a)=\underline{\boldsymbol{2f'(a)}}$$

133 $g(x)=a^2\sin^2 x-x^2\sin^2 a$ とおくと，$g(a)=0$ なので

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}=\boldsymbol{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=g'(a)$$

ここで

$$g'(x)=a^2(\sin^2 x)'-(x^2)'\sin^2 a=a^2\cdot 2\sin x\cos x-2x\sin^2 a$$

であるから

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}=g'(a)=\underline{\boldsymbol{2a^2\sin a\cos a-2a\sin^2 a}}$$

134 $\dfrac{1}{n}=m$ とおくと，$n\to\infty$ のとき，$m\to 0$ であり

$$\lim_{n\to\infty}n(3^{\frac{1}{n}}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\boldsymbol{\lim_{m\to 0}\frac{3^m-3^0}{m}}$$

これは，$f(x)=3^x$ の $x=0$ における微分係数 $f'(0)$ である。$f'(x)=3^x\log 3$ より

$$\lim_{n\to\infty}n(3^{\frac{1}{n}}-1)=f'(0)=\underline{\boldsymbol{\log 3}}$$