## 1.3　連続，微分可能

### 問題

**135** $-1 < x$ において，関数 $f(x)$ は $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{x^{n+2}+x^n+1}$ で定義されている。$f(x)$ を求めると，ある値 $\alpha$ で $f(x)$ が連続にならないことがわかる。このとき $f(\alpha)$ と等しい値をとるもうひとつの $x$ は $\boxed{\phantom{00}}$ である。（関西大）

**136** 関数 $f(x)$ はすべての実数に対して定義され，微分可能であって $f(0)=0$ となるものとする。このとき

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ f'(0) & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおけば，$g(x)$ は $x=0$ において連続となる。このことを，微分係数の定義を用いて証明せよ。（慶應義塾大　改）

**137** $a$，$b$，$c$，$d$ を実数とし，関数 $f(x)$ を以下のように定める。

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & (x \leqq -1) \\ ax^3+bx^2+cx+d & (-1 < x < 1) \\ -\dfrac{1}{x}+1 & (1 \leqq x) \end{cases}$$

ただし，$f(x)$ は $x=-1$ および $x=1$ で微分可能であるものとする。このとき，$a$，$b$，$c$，$d$ を定めよ。（九州工業大）

## チェック・チェック

**135** 関数 $y = f(x)$ において，その定義域の $x$ の値 $a$ に対して

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ が存在し，かつ} \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

のとき，$f(x)$ は **$x = a$ で連続**であるといいます。

また，**$x = a$ で微分可能ならば $x = a$ で連続**ですが，逆は成り立たないことにも注意しましょう。

**136**，**137** 関数 $y = f(x)$ において

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を $x$ が $a$ から $b$ まで変わるときの $f(x)$ の**平均変化率**といいます。また

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \left( h = b - a \text{ とおくと} \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \right)$$

が存在するとき，これを $f'(a)$ とかき，$x = a$ における $f(x)$ の**微分係数**といい，関数 $f(x)$ は $x = a$ で**微分可能**であるといいます。

## 解答・解説

**135** $-1<x<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} x^n=0$ なので

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{x^{n+2}+x^n+1}=0$$

$x=1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} 1^n=1$ なので

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^n}{1^{n+2}+1^n+1}=\frac{1}{3}$$

$1<x$ のとき，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=0$ なので

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^2+1+\left(\frac{1}{x}\right)^n}=\frac{1}{x^2+1}$$

以上より，$f(x)$ は $-1<x<1$，$1<x$ で連続であり，

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=0,\quad \lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2}$$

より **$x=1$ で不連続**，すなわち $\alpha=1$ である。$f(x)=\frac{1}{3}$ を考えると

$-1<x<1$ のとき　　$f(x)=0\neq\frac{1}{3}$

$1<x$ のとき　　$\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{3}$　　$\therefore\quad x=\sqrt{2}$

よって，求める $x$ の値は　　$\underline{\boldsymbol{\sqrt{2}}}$

**136** $g(x)$ が **$x=0$ において連続**となるということは

$$\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)\quad\cdots\cdots\ ①$$

ということである。①は $g(x)$ の定義より

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)\quad\cdots\cdots\ ①'$$

と表すことができる。$x=0$ における**微分係数の定義**より

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\quad(\because\ f(0)=0)$$
$$=f'(0)$$

したがって，①′ は成立し，$g(x)$ は $x=0$ において連続となる。　　（証終）

**137** $f(x)$ は $x=\pm1$ で微分可能より $x=\pm1$ で**連続**であるから

$$\begin{cases}\lim_{x\to -1+0}f(x)=f(-1)\\ \lim_{x\to 1-0}f(x)=f(1)\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}-a+b-c+d=1 & \cdots\cdots\ ①\\ a+b+c+d=0 & \cdots\cdots\ ②\end{cases}$$

$x=-1$ で微分可能なので

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

であり

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \lim_{h\to-0}\frac{-\dfrac{1}{-1+h}-1}{h}\\
&= \lim_{h\to-0}\frac{-h}{h(-1+h)}\\
&= \lim_{h\to-0}\frac{-1}{-1+h}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \lim_{h\to+0}\frac{\{a(-1+h)^3+b(-1+h)^2+c(-1+h)+d\}-1}{h}\\
&= \lim_{h\to+0}\frac{a(3h-3h^2+h^3)+b(-2h+h^2)+ch}{h}\quad(\because\ ①)\\
&= \lim_{h\to+0}\{a(3-3h+h^2)+b(-2+h)+c\}\\
&= 3a-2b+c
\end{aligned}
$$

$\therefore\quad 1 = 3a-2b+c\ \cdots\cdots$ ③

$x=1$ で微分可能なので

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

であり

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \lim_{h\to-0}\frac{\{a(1+h)^3+b(1+h)^2+c(1+h)+d\}-0}{h}\\
&= \lim_{h\to-0}\frac{a(3h+3h^2+h^3)+b(2h+h^2)+ch}{h}\quad(\because\ ②)\\
&= \lim_{h\to-0}\{a(3+3h+h^2)+b(2+h)+c\}\\
&= 3a+2b+c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \lim_{h\to+0}\frac{\left(-\dfrac{1}{1+h}+1\right)-0}{h}\\
&= \lim_{h\to+0}\frac{h}{h(1+h)}\\
&= \lim_{h\to+0}\frac{1}{1+h}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

$\therefore\quad 3a+2b+c = 1\ \cdots\cdots$ ④

①，②より

$a+c=-\dfrac{1}{2}\ \cdots\cdots$ ⑤，$b+d=\dfrac{1}{2}\ \cdots\cdots$ ⑥

③，④より

$3a+c=1\ \cdots\cdots$ ⑦，$b=0\ \cdots\cdots$ ⑧

⑤，⑦を解いて $a=\dfrac{3}{4}$，$c=-\dfrac{5}{4}$，⑥，⑧より $d=\dfrac{1}{2}$ なので

$$\underline{\boldsymbol{a=\frac{3}{4},\ b=0,\ c=-\frac{5}{4},\ d=\frac{1}{2}}}$$