

1.4 合成関数、積・商の微分

問題

138 (1) $\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} = \square$ (成蹊大)

(2) 次の関数の導関数を求めよ。 $\sqrt[3]{1-2x}$ (広島市立大)

139 (1) $f(x) = (2x-1)^2(3-2x)^3$ のとき、 $f'(1) = \square$ である。
(日本工業大)

(2) 次の関数を微分しなさい。 $x^3\sqrt{1+x^2}$ (信州大)

140 (1) 関数 $y = \frac{x+1}{x-1}$ を x について微分せよ。 (鳥取大)

(2) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ を微分せよ。 (津田塾大)

チェック・チェック

微分の計算は、正確にすばやくできるように練習しておきましょう。

138 合成関数の微分は

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x) \quad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}\right)$$

です。とくに

$$\{(ax+b)^p\}' = pa(ax+b)^{p-1}$$

ですね。

139 積の微分は

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

です。

140 商の微分は

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

ですね。

解答・解説

$$\begin{aligned}
 \text{138 (1)} \quad \frac{d}{dx} \sqrt{x^2+1} &= \frac{d}{dx} (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2+1)' \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(2)} \quad f(x) &= \sqrt[3]{1-2x} = (1-2x)^{\frac{1}{3}} \text{ とおくと} \\
 f'(x) &= \frac{1}{3} (1-2x)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (1-2x)' = \frac{1}{3} (1-2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-2) \\
 &= -\frac{2}{3} (1-2x)^{-\frac{2}{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{139 (1)} \quad &\text{積の微分の公式を用いる。} f(x) = (2x-1)^2(3-2x)^3 \text{ より} \\
 f'(x) &= \{(2x-1)^2\}'(3-2x)^3 + (2x-1)^2 \{(3-2x)^3\}' \\
 &= 2(2x-1)(2x-1)' \cdot (3-2x)^3 + (2x-1)^2 \cdot 3(3-2x)^2(3-2x)' \\
 &= 4(2x-1)(3-2x)^3 - 6(2x-1)^2(3-2x)^2 \\
 &= 2(2x-1)(3-2x)^2\{2(3-2x) - 3(2x-1)\} \\
 &= 2(2x-1)(3-2x)^2(9-10x) \\
 \therefore f'(1) &= 2(2-1)(3-2)^2(9-10) = \underline{-2}
 \end{aligned}$$

(2) 積の微分と合成関数の微分の公式を用いる。 $f(x) = x^3\sqrt{1+x^2} = x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ とおくと

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (x^3)'(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x^3\{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\}' \\
 &= 3x^2\sqrt{1+x^2} + x^3 \cdot \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+x^2)' \\
 &= 3x^2\sqrt{1+x^2} + \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}} \\
 &= \frac{3x^2(1+x^2) + x^4}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{4x^4 + 3x^2}{\sqrt{1+x^2}}
 \end{aligned}$$

140 (1) 商の微分の公式を用いる。 $y = \frac{x+1}{x-1}$ より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x-1 - (x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

(2) 商の微分と合成関数の微分の公式を用いる。 $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ とおくと

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x'\sqrt{x^2+1} - x \cdot (\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{x^2+1} \left(\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \right) \\ &= \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \underline{(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$