1.6　対数微分法

問題

144 $y=x^{x^2}$ $(x>0)$ の両辺の対数をとって微分する方法によって，導関数を求めよ。　（小樽商科大）

145 $x>0$ で定義された関数 $y=x^{\sqrt{x}}$ を微分せよ。　（東京電機大）

チェック・チェック

144, **145** $y=f(x)$ が微分可能なとき，$f(x)\neq 0$ であるような範囲では，両辺の絶対値の対数をとり

$$\log|y|=\log|f(x)|$$

と変形してから，両辺を x で微分して

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=(\log|f(x)|)'$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=(\log|f(x)|)'y=(\log|f(x)|)'f(x)$$

このような微分の仕方を**対数微分法**といいます。

解答・解説

144 $x>0$ より $y=x^{x^2}>0$ であり，$y=x^{x^2}$ の両辺の自然対数をとると

$$\log y = x^2 \log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = 2x\log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2\log x + 1)$$

$$\therefore \quad y' = x(2\log x + 1)y = \underline{\boldsymbol{x^{x^2+1}(2\log x + 1)}}$$

145 $x>0$ より $y=x^{\sqrt{x}}>0$ であり，両辺の自然対数をとると

$$\log y = \sqrt{x}\log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad y' = \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}y = \underline{\boldsymbol{\frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}x^{\sqrt{x}}}}$$