1.7 逆関数の微分

問題

146 $f(x)=\cos x\ (\pi<x<2\pi)$ の逆関数を $g(x)$ とする。このとき，$g(x)$ の導関数を求めよ。 （富山医薬大）

147 $y=f^{-1}(x)$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{f'(y)}$ は逆関数の微分法の公式であるが，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を $f'(y)$，$f''(y)$ を用いて表すと，合成関数の微分法により，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\boxed{}$ （小樽商科大）

148 関数 $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とする。$f(1)=2$，$f'(1)=2$，$f''(1)=3$ のとき，$g''(2)$ の値を求めよ。 （防衛医科大）

チェック・チェック

146 $f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ をもつとき，$y=f^{-1}(x)$ とおくと $x=f(y)$ であり，両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}1&=\frac{d}{dx}f(y)=\frac{d}{dy}f(y)\cdot\frac{dy}{dx}\quad\text{（合成関数の微分法）}\\&=\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\quad\left(\text{ただし，}\frac{dx}{dy}\neq 0\right)$$

ですね。

147，**148** 逆関数の第 2 次導関数を求めます。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

ですね。

解答・解説

146 $y=g(x)$ とおくと，$\pi<y<2\pi$ であり　　$x=\cos y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\mathbf{1}}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{d}{dy}\cos y}=-\frac{1}{\sin y}$$

ここで，$\pi<y<2\pi$ より

$$\sin y=-\sqrt{1-\cos^2 y}=-\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore\quad g'(x)=\frac{dy}{dx}=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}}$$

147 $y=f^{-1}(x)$ より　　$x=f(y)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{d}{dy}f(y)}=\frac{1}{f'(y)}\quad(\text{逆関数の微分法の公式})$$

であるから

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{f'(y)}\right\}$$

$$=\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{f'(y)}\right\}\cdot\frac{dy}{dx}\quad(\text{合成関数の微分法})$$

$$=-\frac{f''(y)}{\{f'(y)\}^2}\cdot\frac{1}{f'(y)}=\underline{\boldsymbol{-\frac{f''(y)}{\{f'(y)\}^3}}}$$

148 $y=g(x)=f^{-1}(x)$ とおくと　　$x=f(y)$

$$g''(x)=-\frac{f''(y)}{\{f'(y)\}^3}\quad(\because\ \boxed{147})$$

$f(1)=2$ より $g(2)=1$ なので，$x=2$，$y=1$ として

$$g''(2)=-\frac{f''(1)}{\{f'(1)\}^3}=-\frac{3}{2^3}=\underline{\boldsymbol{-\frac{3}{8}}}$$