1.8　パラメータ表示された関数の微分

問題

149 $x = \sin t$，$y = \sin t + 2\cos t + 3\tan t$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を x を用いて表すと $\boxed{}$ である。ただし $0 \leqq t < \dfrac{\pi}{2}$ とする。　（埼玉工業大）

150 $x = 2t - \sin t$，$y = 2 - \cos t$ $(0 < t < 2\pi)$ のとき，$\dfrac{dy}{dx} = 0$ となるのは，$(x,\ y) = \boxed{}$ のときである。　（東北学院大）

151 $x = \dfrac{e^{2t} + e}{2}$，$y = t\log\dfrac{t^2e^t + e}{2}$ のとき，$t = 1$ における $\dfrac{dy}{dx}$ の値を求めよ。ただし，対数は自然対数である。また，e は自然対数の底である。　（茨城大）

チェック・チェック

149，**150** x，y をパラメータ t の関数とみて

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

を利用します。

151 複雑な式になってきました。まずは $\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{dy}{dt}$ をそれぞれ求めましょう。

解答・解説

149 $\dfrac{dx}{dt}=\cos t,\ \dfrac{dy}{dt}=\cos t-2\sin t+\dfrac{3}{\cos^2 t}$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\cos t-2\sin t+\dfrac{3}{\cos^2 t}}{\cos t}$$

$$=1-2\tan t+\frac{3}{\cos^3 t}$$

ここで，$x=\sin t$ で $0\leqq t<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-x^2}$$

$$\tan t=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\underline{\boldsymbol{1-\frac{2x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}}}$$

150 $\dfrac{dx}{dt}=2-\cos t,\ \dfrac{dy}{dt}=\sin t$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\sin t}{2-\cos t}$$

$0<t<2\pi$ において，$\dfrac{dy}{dx}=0$ となるのは

$$\sin t=0\qquad\therefore\quad t=\pi$$

のときである。よって

$$\begin{cases} x=2\pi-\sin\pi=2\pi\\ y=2-\cos\pi=3\end{cases}$$

$$\therefore\quad (x,\ y)=\underline{\boldsymbol{(2\pi,\ 3)}}$$

151 $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{e^{2t}(2t)'}{2} = e^{2t}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= (t)'\log\frac{t^2e^t+e}{2} + t\cdot\left(\log\frac{t^2e^t+e}{2}\right)' \\ &= \log\frac{t^2e^t+e}{2} + t\cdot\frac{\left(\dfrac{t^2e^t+e}{2}\right)'}{\dfrac{t^2e^t+e}{2}} \\ &= \log\frac{t^2e^t+e}{2} + t\cdot\frac{(t^2)'e^t+t^2(e^t)'}{t^2e^t+e} \\ &= \log\frac{t^2e^t+e}{2} + \frac{t^2e^t(2+t)}{t^2e^t+e}\end{aligned}$$

よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{1}{e^{2t}}\log\frac{t^2e^t+e}{2} + \frac{t^2(2+t)}{e^t(t^2e^t+e)}$$

であるから，$t=1$ のときの $\dfrac{dy}{dx}$ の値は

$$\frac{1}{e^2}\log\frac{e+e}{2} + \frac{2+1}{e(e+e)} = \frac{1}{e^2} + \frac{3}{2e^2} = \underline{\boldsymbol{\frac{5}{2e^2}}}$$