1.11　共通接線

問題

157 曲線 $C_1 : y = \dfrac{1}{x}$ と曲線 $C_2 : y = -\dfrac{x^2}{8}$ の共通の接線の方程式を求めよ。 (埼玉大)

158 $y = \log x$ と $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ のグラフが共有点をもち，この点で共通の接線をもつのは，$a = \boxed{}$ のときであり，その共通の接線の方程式は $y = \boxed{}$ である。 (東海大)

チェック・チェック

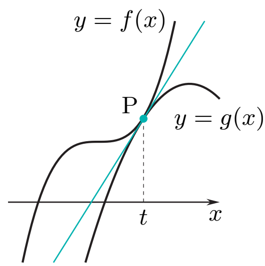
157, **158** 2 つの曲線が共通接線をもつ場合には，それぞれの曲線において接線の方程式をつくり，2 直線の一致条件を考えます。

とくに，2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ が共有点 P をもち，P におけるそれぞれの接線が一致するとき，2 曲線は接するといいます。

したがって，**2 曲線が接する条件は**

$$\begin{cases} f(t) = g(t) & \text{(共有点をもつ条件)} \\ f'(t) = g'(t) & \text{(接線の傾きが一致する条件)} \end{cases}$$

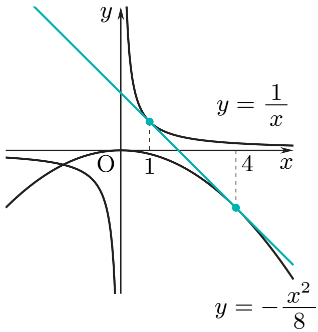
をみたす実数 t が存在することです。



解答・解説

157 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=-\dfrac{x^2}{8}$ とおくと

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2},\quad g'(x)=-\frac{x}{4}$$



曲線 C_1 上の点 $(t,\ f(t))\ (t \neq 0)$ における接線の方程式は

$$y=-\frac{1}{t^2}(x-t)+\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t} \quad \cdots\cdots ①$$

曲線 C_2 上の点 $(s,\ g(s))$ における接線の方程式は

$$y=-\frac{s}{4}(x-s)-\frac{s^2}{8}=-\frac{s}{4}x+\frac{s^2}{8} \quad \cdots\cdots ②$$

①，②が一致する条件は

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{t^2}=-\dfrac{s}{4} & \text{（接線の傾きが一致する条件）} \\ \dfrac{2}{t}=\dfrac{s^2}{8} & \text{（y 切片が一致する条件）} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s=\dfrac{4}{t^2} \\ \dfrac{2}{t}=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{16}{t^4} \end{cases} \qquad \begin{cases} s=\dfrac{4}{t^2} \\ t^3=1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad t=1,\ s=4$$

求める共通接線の方程式は

$$\underline{\boldsymbol{y=-x+2}}$$

別解 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ とおくと，$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ より，$\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)\ (t \neq 0)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y&=-\frac{1}{t^2}(x-t)+\frac{1}{t} \\ &=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t} \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

これが C_2 と接するための条件は，$y=-\dfrac{x^2}{8}$ と連立して

$$-\frac{1}{8}x^2=-\frac{x}{t^2}+\frac{2}{t}$$

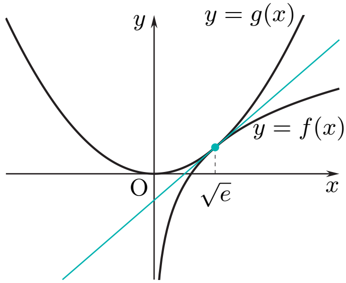
$$t^2x^2-8x+16t=0$$

この x の 2 次方程式が重解をもてばよいので

$$\frac{D}{4}=16-16t^3=0 \qquad \therefore \quad t=1$$

①より，共通接線の方程式は

$$y=-x+2$$



158 $f(x)=\log x$，$g(x)=ax^2$ $(a \neq 0)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{x},\quad g'(x)=2ax$$

$x=t$ (>0) において共有点をもち，この点で共通の接線をもつ条件は

$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log t = at^2 \\ \dfrac{1}{t}=2at \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} \log t = at^2 & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{1}{2}=at^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②を①に代入すると

$$\log t=\frac{1}{2}\qquad \therefore\quad t=\sqrt{e}$$

②に代入すると

$$a=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2e}}}$$

したがって，求める共通接線の方程式は

$$y=f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e})+f(\sqrt{e})=\frac{1}{\sqrt{e}}(x-\sqrt{e})+\log\sqrt{e}$$

$$\therefore\quad y=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{e}}x-\frac{1}{2}}}$$