1.12　楕円の接線

問題

159 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

であることを証明せよ。ただし，$y_1 \neq 0$ とする。　（信州大）

160 xy 平面の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ はだ円 $C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上の動点で x 軸，y 軸上にはないとする。点 P におけるだ円 C の接線と x 軸，y 軸とで囲まれた三角形の面積の最小値は $\boxed{}$ である。　（東京医科大）

チェック・チェック

159 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

となります。一度は証明しておきましょう。

160 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点は

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$$

と媒介変数表示されます。

解答・解説

159 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}\quad (\text{ただし}, y\neq 0)$$

$y_1\neq 0$ より，$(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)+y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x+\frac{b^2{x_1}^2+a^2{y_1}^2}{a^2y_1}$$

$$\therefore\quad \frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=\frac{b^2{x_1}^2+a^2{y_1}^2}{a^2b^2}=\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}$$

ここで，$(x_1,\ y_1)$ はだ円上の点なので

$$\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}=1$$

よって，接線の方程式は

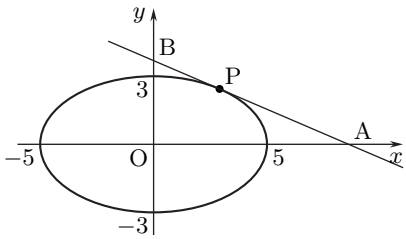
$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

（証終）

160 $C:\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は

$$\begin{cases} x=5\cos\theta \\ y=3\sin\theta \end{cases}$$

と表すことができる。x 軸，y 軸に関する対称性と P が x 軸，y 軸上の点でないことより $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ としてよい。



$\mathrm{P}(5\cos\theta,\ 3\sin\theta)$ における接線の方程式は

$$\frac{\cos\theta}{5}x+\frac{\sin\theta}{3}y=1$$

であり，これと x 軸，y 軸との交点をそれぞれ A，B とすると

$$\mathrm{A}\left(\frac{5}{\cos\theta},\ 0\right),\ \mathrm{B}\left(0,\ \frac{3}{\sin\theta}\right)$$

よって

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{\cos\theta}\cdot\frac{3}{\sin\theta}=\frac{15}{\sin 2\theta}\geqq 15\quad (\because\ 0<2\theta<\pi)$$

等号は，$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき成立するから，最小値は　**15**