1.13　双曲線の接線

問題

161 a は正の定数とする。点 $(1,\ a)$ を通り，双曲線 $x^2-4y^2=2$ に接する 2 本の直線が直交するとき，a の値を求めよ。　（福島県立医科大）

162 双曲線 $x^2-y^2=1$ の焦点の 1 つを $\mathrm{F}(c,\ 0)$ $(c>0)$ とする。この双曲線上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ $(s>0,\ t>0)$ における双曲線の接線を l とし，F から l への垂線 m と l との交点を $\mathrm{Q}(u,\ v)$ とする。

(1) l と m の方程式を $s,\ t$ を用いて表せ。

(2) $u,\ v$ を $s,\ t$ を用いて表せ。

(3) $u,\ v$ は $u^2+v^2=1$ をみたすことを示せ。　（山梨大）

チェック・チェック

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$$

です。

161 まず，直線 $y=m(x-1)+a$ と双曲線が接するための条件を求めましょう。次に，2 本の接線が直交する条件である

(傾きの積) $=-1$

を利用します。

162 (3)(2) より，$u,\ v$ は $s,\ t$ を用いて表されていますが，P は双曲線上の点ですから，$s^2-t^2=1$ という関係が成り立っています。

解答・解説

161 点 $(1,\ a)$ を通り，y 軸に平行な接線は存在しないので，接線の方程式を $y=m(x-1)+a$ とおく。これが $x^2-4y^2=2$ と接することから

$$x^2-4\cdot(mx-m+a)^2=2$$
$$(1-4m^2)x^2+8m(m-a)x-4(m-a)^2-2=0$$

は重解をもつ。したがって，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=16m^2(m-a)^2+(1-4m^2)\{4(m-a)^2+2\}$$
$$=4(m-a)^2+2(1-4m^2)$$
$$=-4m^2-8am+4a^2+2=0\ \cdots\cdots\ ①$$

2 本の接線の傾きを m_1，m_2 とすると，m_1，m_2 は①の相異なる解であり，2 本の接線は直交するから

$$\boldsymbol{m_1m_2=-1}\quad \text{すなわち}\quad \frac{4a^2+2}{-4}=-1\ (\because\ ①\text{での解と係数の関係})$$

$$4a^2+2=4\qquad \therefore\quad a=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}}\ (>0)$$

162 (1) 双曲線 $x^2-y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ における接線 l の方程式は

$$l:\underline{\boldsymbol{sx-ty=1}}\ \cdots\cdots\ ①$$

また，焦点 $\mathrm{F}(\sqrt{2},\ 0)$ を通り，l に直交する直線 m は

$$t(x-\sqrt{2})+sy=0\qquad \therefore\quad m:\underline{\boldsymbol{tx+sy=\sqrt{2}t}}\ \cdots\cdots\ ②$$

(2) $\mathrm{Q}(u,\ v)$ は①，②の交点であるから，① $\times\, s+$ ② $\times\, t$ より

$$(s^2+t^2)x=s+\sqrt{2}\,t^2\qquad \therefore\quad x=\frac{s+\sqrt{2}\,t^2}{s^2+t^2}$$

② $\times\, s-$ ① $\times\, t$ より

$$(s^2+t^2)y=(\sqrt{2}\,s-1)t\qquad \therefore\quad y=\frac{(\sqrt{2}\,s-1)t}{s^2+t^2}$$

$$\therefore\quad u=\underline{\boldsymbol{\frac{s+\sqrt{2}\,t^2}{s^2+t^2}}},\ v=\underline{\boldsymbol{\frac{(\sqrt{2}\,s-1)t}{s^2+t^2}}}$$

(3) (2) より

$$u^2+v^2=\frac{(s+\sqrt{2}\,t^2)^2}{(s^2+t^2)^2}+\frac{(\sqrt{2}\,s-1)^2t^2}{(s^2+t^2)^2}=\frac{s^2+t^2+2t^2s^2+2t^4}{(s^2+t^2)^2}$$
$$=\frac{s^2+t^2+2t^2(s^2+t^2)}{(s^2+t^2)^2}=\frac{1+2t^2}{s^2+t^2}$$

また，$\mathrm{P}(s,\ t)$ は $s^2-t^2=1$ をみたすから

$$u^2+v^2=\frac{1+2t^2}{(1+t^2)+t^2}=1$$

（証終）