2　微分法の応用

2.1　関数の増減

問題

166 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x-1}$ について次の問いに答えよ。ただし，$\log x$ は自然対数とする。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $x>1$ の範囲で $f(x)$ は減少することを証明せよ。　（長岡技術科学大）

167 関数 $f(x)$ は微分可能とする。次の命題は正しいか。

「$f(0)=1$ とし，$x>0$ のとき常に $f'(x)<0$ であるとする。このとき，$f(a)<0$ となる正の数 a が存在する。」

もし正しければ証明し，正しくなければ反例をあげよ。　（津田塾大）

チェック・チェック

166，**167** まず，「増加関数」について確認しておきましょう。

ある区間 I において

$$x_1,\ x_2\in I,\ x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

であるならば，$f(x)$ は I で**増加関数**である，といいます。

とくに，微分可能な関数 $f(x)$ がある区間 I において

つねに $f'(x)>0 \Longrightarrow f(x)$ は I で増加関数

ですね。

「減少関数」についても同じことがいえます。

解答・解説

166 (1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x-1}$ より

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot(x-1)-\log x\cdot 1}{(x-1)^2}=\underline{\boldsymbol{\frac{x-x\log x-1}{x(x-1)^2}}}$$

(2) $x>1$ において，**$f'(x)$ の分母は正**である。そこで

$$g(x)=x-x\log x-1$$

とおくと

$$g'(x)=1-\log x-x\cdot\frac{1}{x}=-\log x<0 \quad (\because\ x>1)$$

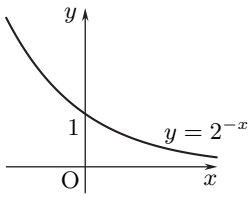
であり，$x>1$ において $g(x)$ は単調減少であるから

$$g(x)<g(1)=0 \quad (x>1)$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{g(x)}{x(x-1)^2}<0 \quad (x>1)$$

よって，$f(x)$ は $x>1$ において単調減少である。　（証終）

167 <u>正しくない</u>

（反例）$f(x)=2^{-x}$

【注意】$f(0)=1$ かつ $x>0$ において単調減少であり，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ となる微分可能な関数 $f(x)$ を選べばよいでしょう。