## 2.2　極値・変曲点

### 問題

**168** 関数 $f(x)$，$g(x)$，および $h(x)$ を

$$f(x) = e^{-x}x^3,\ g(x) = e^x f'(x) \text{ および } h(x) = e^{-x}(x^3 + k)$$

と定める。ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数であり，$k$ は実数である。

(1) 関数 $g(x)$ の極値を求めよ。

(2) 関数 $h(x)$ が極小値をもつための $k$ の条件を求めよ。　　（北里大）

**169** 関数 $f(x) = (x^2 + ax + 3)e^x$ が極値をもたないような定数 $a$ の値の範囲は $\boxed{\phantom{00}}$ である。また $y = f(x)$ のグラフが変曲点をもたないような定数 $a$ の値の範囲は $\boxed{\phantom{00}}$ である。　　（北海道工業大）

### チェック・チェック

**168**，**169** 極大・極小の一般的な定義は『数学 II・B チェック＆リピート』201 ページ【極値】を参照して下さい。微分可能な関数 $f(x)$ においては，$f'(x)$ の符号が

　負から正に変わるところで**極小値**
　正から負に変わるところで**極大値**

をとります。また，極大・極小の判定法としては

$$f'(a) = 0,\ f''(a) < 0 \Longrightarrow f(a) \text{ は極大値}$$
$$f'(a) = 0,\ f''(a) > 0 \Longrightarrow f(a) \text{ は極小値}$$

も使えるようにしましょう。

　ある区間 $I$ で 2 回微分可能な関数 $y = f(x)$ は

$$I \text{ においてつねに } f''(x) > 0$$

ならば，曲線 $y = f(x)$ は $I$ で**下に凸**といい，

$$I \text{ においてつねに } f''(x) < 0$$

ならば，曲線 $y = f(x)$ は $I$ で**上に凸**といいます。

　さらに，曲線の凹凸が入れ替わる点を**変曲点**といいます。つまり

$$f''(a) = 0 \text{ かつ } x = a \text{ の前後で } f''(x) \text{ の符号が変わる}$$

とき，点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y = f(x)$ の変曲点です。

## 解答・解説

**168** (1) $f(x) = e^{-x}x^3$ より

$f'(x) = -e^{-x}\cdot x^3 + e^{-x}\cdot 3x^2 = (3x^2 - x^3)e^{-x}$

$g(x) = e^x f'(x) = 3x^2 - x^3$

$g'(x) = 6x - 3x^2 = -3x(x-2)$

したがって増減表は次のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g(x)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ |

よって，**極大値 4（$x=2$ のとき），極小値 0（$x=0$ のとき）**

(2) $h(x) = e^{-x}(x^3 + k)$ より

$h'(x) = -e^{-x}(x^3 + k) + 3e^{-x}x^2$

$= (3x^2 - x^3 - k)e^{-x}$

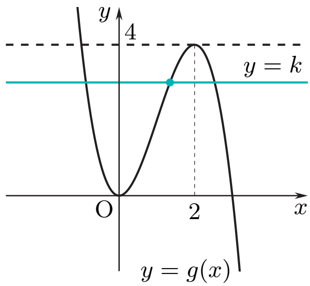
$e^{-x} > 0$ より，$h(x)$ が極小値をもつための条件は

$3x^2 - x^3 - k$

の符号が負から正に変わる $x$ が存在することである。

よって，(1) より $y = g(x) = 3x^2 - x^3$ と $y = k$ のグラフ（右図）を考えると，求める $k$ の条件は

$\mathbf{0 < k < 4}$




**169** $f(x) = (x^2 + ax + 3)e^x$ より

$f'(x) = (2x + a)e^x + (x^2 + ax + 3)e^x$

$= e^x\{x^2 + (a+2)x + (a+3)\}$

$e^x > 0$ より，極値をもたない条件は

「$x^2 + (a+2)x + (a+3)$ に符号の変化がない」

ことであり，$y = x^2 + (a+2)x + (a+3)$ のグラフは下に凸なので

「すべての $x$ で $x^2 + (a+2)x + (a+3) \geqq 0$」

である。そこで $x^2 + (a+2)x + (a+3) = 0$ の判別式を $D$ とすると

$D = (a+2)^2 - 4(a+3) = a^2 - 8 \leqq 0$

$\therefore$　$\mathbf{-2\sqrt{2} \leqq a \leqq 2\sqrt{2}}$

同様に

$f''(x) = e^x\{x^2 + (a+2)x + (a+3)\} + e^x(2x + a + 2)$

$= e^x\{x^2 + (a+4)x + (2a+5)\}$

より，変曲点をもたない条件は

「$x^2 + (a+4)x + (2a+5)$ に符号の変化がない」

ことであり，$x^2 + (a+4)x + (2a+5) = 0$ の判別式を考えると

$(a+4)^2 - 4(2a+5) \leqq 0$

$a^2 - 4 \leqq 0$　$\therefore$　$\mathbf{-2 \leqq a \leqq 2}$