2.7　速度・加速度

問題

185 直線軌道を走る電車がブレーキをかけ始めてから止まるまでの間について，t 秒間に走る距離を x メートルとすると，

$$x = 16(t - 3at^2 + 4a^2t^3 - 2a^3t^4)$$

であるという。ここで，a は運転席にある調節レバーによって値を調節できる正の定数である。

(1) ブレーキをかけ始めてから t 秒後の電車の速度 $v = \dfrac{dx}{dt}$ を t と a で表せ。

(2) 駅まで 200 メートルの地点でブレーキをかけ始めたときにちょうど駅で電車が止まったとする。そのときの a の値を求めよ。

(3) 乗客の安全のため，電車の加速度 $\alpha = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ の大きさ $|\alpha|$ が 1 を越えない範囲にレバーを調節しておく規則になっている。このとき，ブレーキをかけ始めてから止まるまでの距離を最小にする a の値とそのときの距離を求めよ。（立教大）

186 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標を

$$x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t$$

とするとき，次の問に答えよ。

(1) 時刻 t における点 P の速度 $\vec{v}$ およびその大きさ $|\vec{v}|$ を求めよ。

(2) $t = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，ベクトル $\vec{v}$ が x 軸の正の向きとのなす角 α を求めよ。

(3) 原点を O とするとき，ベクトル $\vec{v}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角 θ は一定であることを示し，θ を求めよ。（香川大）

チェック・チェック

185 数直線上を運動する点 P の座標 x が，時刻 t の関数として

$$x = f(t)$$

と表されるとき，x の変化率 v，すなわち

$$\boldsymbol{v = \frac{dx}{dt} = f'(t)}$$

を時刻 t における点 P の**速度**といい，速度の絶対値 $|v|$ を**速さ**といいます。

さらに，速度 v の変化率 α，すなわち

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)}$$

を時刻 t における点 P の**加速度**といいます。

186 平面上を運動する点 P$(x,\ y)$ において，時刻 t の関数として

$$x = f(t),\ y = g(t)$$

と表されるとき，点 P の x 軸方向の速度 $\dfrac{dx}{dt}$，y 軸方向の速度 $\dfrac{dy}{dt}$ を成分とするベクトル $\vec{v}$，すなわち

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$

を時刻 t における点 P の**速度**といいます。$\vec{v}$ の向きは，点 P のえがく曲線の接線方向と一致します。

また，$\vec{v}$ の大きさ $|\vec{v}|$，すなわち

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

を点 P の**速さ**といいます。

さらに点 P の x 軸方向の加速度 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$，y 軸方向の加速度 $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ を成分とするベクトル $\vec{\alpha}$，すなわち

$$\vec{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

を時刻 t における点 P の**加速度**といいます。

解答・解説

185 $x=16(t-3at^2+4a^2t^3-2a^3t^4)$

(1) $v=\dfrac{dx}{dt}=\underline{\boldsymbol{16(1-6at+12a^2t^2-8a^3t^3)}}$

(2) $v=0$ を解くと

$$16(1-6at+12a^2t^2-8a^3t^3)=0$$

$$(1-2at)^3=0$$

$$2at=1 \qquad \therefore \quad t=\frac{1}{2a}$$

となるので，ブレーキをかけ始めてから止まるまでの距離を x_0 とすると

$$\begin{aligned} x_0 &= 16\left\{\frac{1}{2a}-3a\cdot\left(\frac{1}{2a}\right)^2+4a^2\cdot\left(\frac{1}{2a}\right)^3-2a^3\cdot\left(\frac{1}{2a}\right)^4\right\} \\ &= 16\left(\frac{1}{2a}-\frac{3}{4a}+\frac{1}{2a}-\frac{1}{8a}\right) \\ &= 16\cdot\frac{1}{8a}=\frac{2}{a} \end{aligned}$$

よって，$x_0=200$ のとき

$$\frac{2}{a}=200 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{a=\frac{1}{100}}}$$

(3) $$\begin{aligned} \alpha=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt} &= 16(-6a+24a^2t-24a^3t^2) \\ &= 16\cdot(-24a^3)\left(t^2-\frac{t}{a}+\frac{1}{4a^2}\right) \\ &= -384a^3\left(t-\frac{1}{2a}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad |\,\alpha\,|=384a^3\left(t-\frac{1}{2a}\right)^2$$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2a}$ における $|\,\alpha\,|$ の最大値は

$$96a \ (t=0)$$

よって，$|\,\alpha\,| \leqq 1$ とするためには $96a \leqq 1$ であればよく，これと $a>0$ を合わせて

$$0<a\leqq\frac{1}{96}$$

この範囲において，x_0 が最小となるのは $\underline{\boldsymbol{a=\frac{1}{96}}}$ のときであり，そのときの距離は

$$\frac{2}{\frac{1}{96}}=\underline{\textbf{192（メートル）}}$$

186 (1) $x = e^t \cos t,\ \ y = e^t \sin t$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (e^t)' \cos t + e^t (\cos t)' = e^t \cos t - e^t \sin t \\ &= e^t(\cos t - \sin t) \\ \frac{dy}{dt} &= (e^t)' \sin t + e^t (\sin t)' = e^t \sin t + e^t \cos t \\ &= e^t(\cos t + \sin t)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = \underline{\boldsymbol{(e^t(\cos t - \sin t),\ e^t(\cos t + \sin t))}} \\ \left|\overrightarrow{v}\right| &= \sqrt{\{e^t(\cos t - \sin t)\}^2 + \{e^t(\cos t + \sin t)\}^2} \\ &= e^t\sqrt{(1 - 2\cos t \sin t) + (1 + 2\cos t \sin t)} \\ &= \underline{\boldsymbol{\sqrt{2}e^t}}\end{aligned}$$

(2) $t = \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\overrightarrow{v} = \left(e^{\frac{\pi}{2}}(0-1),\ e^{\frac{\pi}{2}}(0+1)\right) = e^{\frac{\pi}{2}}(-1,\ 1) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{3}{4}\pi,\ \sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{\alpha = \frac{3}{4}\pi}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (e^t \cos t,\ e^t \sin t)$ なので

$$\begin{aligned}&\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \sqrt{(e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2} = e^t \\ &\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = e^t(\cos t - \sin t) \cdot e^t \cos t + e^t(\cos t + \sin t) \cdot e^t \sin t = e^{2t}\end{aligned}$$

よって

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{v}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|} = \frac{e^{2t}}{\sqrt{2}e^t \cdot e^t} = \frac{1}{\sqrt{2}} = (\text{一定})$$

となるので，θ は一定であり，$\underline{\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{4}}}$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = e^t(\cos t,\ \sin t)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と x 軸とのなす角は t である。

また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= \sqrt{2}e^t\left(\cos t \cos\frac{\pi}{4} - \sin t \sin\frac{\pi}{4},\ \sin t \cos\frac{\pi}{4} + \cos t \sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}e^t\left(\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right),\ \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)\end{aligned}$$

より，$\overrightarrow{v}$ と x 軸とのなす角は $t + \dfrac{\pi}{4}$ である。以上より

$$\theta = \left|t - \left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\pi}{4} = (\text{一定})$$