2.8　近似式

問題

187 関数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$ について，次の問に答えよ。

(1) 微分係数 $f'(1)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}$ を求めよ。

(3) x が 1 に十分近いときの近似式 $f'(x)\fallingdotseq a+b(x-1)$ の係数 a，b を求めよ。

(4) (3) の結果を用いて，x が 1 に十分近いときの近似式

$$f(x)\fallingdotseq A+B(x-1)+C(x-1)^2$$

の係数 A，B，C を求めよ。　（徳島大）

チェック・チェック

187 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，$x=a$ の近い値 $f(a+h)$ は h の 1 次式で近似することができます。

微分係数 $f'(a)$ は

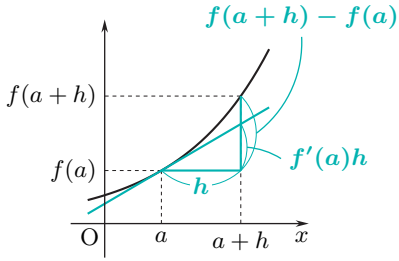
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

なので，$|h|$ が十分小さいときは

$$f'(a)\fallingdotseq\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

すなわち

$$\boldsymbol{f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h}$$



です。これは $f(a+h)$ を接線で近似したもので 1 次近似とよばれます。さらに，2 次関数 $g(x)=px^2+qx+r$ によって $f(a+h)$ を近似し，$f(a+h)\fallingdotseq g(a+h)$ とみると，2 次近似

$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2$$

が得られます。

さらに，n 回まで微分可能ならば，n 次の導関数を $f^{(n)}(x)$ と書くと

$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

が成り立ちます。

解答・解説

187 (1) $f(x)=(x^2-2x+2)^{\frac{1}{2}}$ より

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot(x^2-2x+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2-2x+2)'$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}\cdot(2x-2)$$
$$=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

よって

$$f'(1)=\frac{1-1}{\sqrt{1^2-2\cdot1+2}}=\underline{\mathbf{0}}$$

(2)
$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1^2-2\cdot1+2}}$$
$$=\underline{\mathbf{1}}$$

(3) x が 1 に十分近いとき

$$\frac{f'(x)}{x-1}\fallingdotseq1$$

としてよいので

$$f'(x)\fallingdotseq0+1\cdot(x-1)$$

よって

$$\underline{\boldsymbol{a=0,\ b=1}}$$

別解 h が 0 に十分近いときの近似式

$$f'(\alpha+h)\fallingdotseq f'(\alpha)+f''(\alpha)h$$

に，$\alpha=1$，$h=x-1$ を代入すると

$$f'(x)\fallingdotseq f'(1)+f''(1)(x-1)$$

よって，$a=f'(1)$，$b=f''(1)$ である。ここで

$$f''(x)=\frac{(x-1)'\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)(\sqrt{x^2-2x+2})'}{(\sqrt{x^2-2x+2})^2}$$
$$=\frac{\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)\cdot\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}}{x^2-2x+2}$$
$$=\frac{x^2-2x+2-(x-1)^2}{(x^2-2x+2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{1}{(x^2-2x+2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore\quad f''(1)=\frac{1}{(1^2-2\cdot1+2)^{\frac{3}{2}}}=1$$

より　$a=0,\ b=1$

(4) $f(x) \fallingdotseq A + B(x-1) + C(x-1)^2$ の両辺を x で微分すると

$$f'(x) \fallingdotseq B + 2C(x-1)$$

これと (3) の結果より

$$B = a,\ 2C = b$$

$$\therefore \quad B = 0,\ C = \frac{1}{2}$$

また，$x = 1$ のときは

$$f(1) = A$$

としてよいから

$$A = \sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 + 2} = 1$$

以上より

$$\underline{\boldsymbol{A = 1,\ B = 0,\ C = \frac{1}{2}}}$$