1　積分の計算

1.1　積分の計算

問題

188 (1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}(1+x)\,dx = \boxed{}$　（東北学院大）

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 (x+1-\sqrt{x})^2\,dx$ の値を求めよ。　（岡山理科大）

189 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\,dx = \boxed{}$ である。また $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos x\,dx = \boxed{}$ である。

（北海道工業大）

190 (1) $\displaystyle\int_0^a \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}$ をみたす a で，$0 \leqq a \leqq \pi$ となるものは，$a = \boxed{}$ である。　（北見工業大）

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$ を求めよ。　（慶應大　改）

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \sin 3x \sin 5x\,dx$ を求めよ。　（東京工科大）

191 (1) 方程式 $e^x = 2$ の解は $x = \boxed{}$，また $\displaystyle\int_0^1 |e^x - 2|\,dx = \boxed{}$ である。ただし，e は自然対数の底である。　（愛知工業大）

(2) $\displaystyle\int 8^{2-x}\,dx$ を求めると $\boxed{}$ である。　（静岡理工科大）

192 e が自然対数の底であるとき，$\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{dx}{x} = \boxed{}$ である。　（神奈川大）

チェック・チェック

積分は，微分の逆演算として定義されます。つまり

$$F'(x) = f(x) \iff \int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

以下，C は積分定数を表すものとします。基本関数の不定積分は，導関数の公式から得られます。

188 $\displaystyle \int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \fallingdotseq -1)$

189 三角関数の積分については次の公式を使います。

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

190 $\sin x\cos x$ の積分は sin の 2 倍角の公式を，$\sin^2 x$ および $\cos^2 x$ の積分は半角の公式を，また，$\sin\alpha\sin\beta$，$\cos\alpha\cos\beta$，$\sin\alpha\cos\beta$ の形の積分は積和の公式を用いることで，**次数を下げて** 1 次式の形に直してから積分します。

(1) 2 倍角の公式より　$\displaystyle \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

(2) 半角の公式より　$\displaystyle \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

(3) 積和の公式より　$\displaystyle \sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$

191 (1) 積分区間 $0 \leqq x \leqq 1$ の中で場合分けして**絶対値をはずし**，積分を実行します。

(2) 指数関数の積分は

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\log a}a^x + C \quad (a > 0,\ a \fallingdotseq 1)$$

ですが，これについては

$$a^x = e^{\log a^x} = e^{x\log a}$$

と変形してから積分してもよいですね。もちろん

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

です。

192 $\displaystyle \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$

解答・解説

188 (1) $$\int_0^1 \sqrt{x}(1+x)\,dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) dx$$
$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \underline{\mathbf{\frac{16}{15}}}$$

(2) $$\int_0^1 (x+1-\sqrt{x})^2\,dx = \int_0^1 (x^2+1+x+2x-2\sqrt{x}-2x\sqrt{x})\,dx$$
$$= \int_0^1 \left(x^2+3x+1-2x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}\right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 1 - \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \underline{\mathbf{\frac{7}{10}}}$$

189 $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = \underline{\mathbf{1}}$$
$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{3}{2}\pi} = \sin\frac{3}{2}\pi - \sin 0 = \underline{\mathbf{-1}}$$

190 (1) sin の 2 倍角の公式より
$$\int_0^a \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^a$$
$$= -\frac{1}{4}(\cos 2a - 1)$$

したがって
$$-\frac{1}{4}(\cos 2a - 1) = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \cos 2a = -1$$

$0 \leqq a \leqq \pi$ より　　$0 \leqq 2a \leqq 2\pi$

$\therefore \quad 2a = \pi$

$a = \underline{\mathbf{\frac{\pi}{2}}}$

(2) sin の半角の公式より
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\mathbf{\frac{\pi}{4}}}$$

(3) 三角関数の積和の公式より

$$\begin{aligned}\sin 3x \sin 5x &= -\frac{1}{2}\{\cos(3x+5x) - \cos(3x-5x)\}\\ &= \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x)\end{aligned}$$

よって，求める不定積分は積分定数を C とすると

$$\begin{aligned}\int \sin 3x \sin 5x\,dx &= \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 8x)\,dx\\ &= \underline{\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C}\end{aligned}$$

191 (1) $e^x = 2$ の解は　$x = \underline{\log 2}$

よって，$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$|e^x - 2| = \begin{cases} -e^x + 2 & (0 \leqq x \leqq \log 2) \\ e^x - 2 & (\log 2 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_0^1 |e^x - 2|\,dx &= \int_0^{\log 2} (-e^x + 2)\,dx + \int_{\log 2}^1 (e^x - 2)\,dx\\ &= \Big[-e^x + 2x\Big]_0^{\log 2} + \Big[e^x - 2x\Big]_{\log 2}^1\\ &= (-2 + 2\log 2 + 1 - 0) + (e - 2 - 2 + 2\log 2)\\ &= \underline{4\log 2 + e - 5}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int 8^{2-x}\,dx &= 8^2\int 8^{-x}\,dx = 8^2\int\left(-\frac{1}{\log 8}8^{-x}\right)'\,dx\\ &= \underline{-\frac{8^{2-x}}{\log 8} + C}\ (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned}\int 8^{2-x}\,dx &= 8^2\int e^{\log 8^{-x}}\,dx = 8^2\int e^{-x\cdot\log 8}\,dx\\ &= 8^2\int e^{(-\log 8)x}\,dx\\ &= 8^2\cdot\left(-\frac{1}{\log 8}\right)e^{(-\log 8)x} + C\\ &= -\frac{8^2}{\log 8}e^{\log 8^{-x}} + C = -\frac{8^2}{\log 8}8^{-x} + C\\ &= -\frac{8^{2-x}}{\log 8} + C\ (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

192 $$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{dx}{x} = \Big[\log|x|\Big]_{\frac{1}{e}}^{e} = \log e - \log\frac{1}{e} = 1 - (-1) = \underline{2}$$