1.4 有理関数の積分（$x = a\tan\theta$）

問題

199 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \boxed{}$ （会津大）

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2+1}$ （広島市立大）

チェック・チェック

$\dfrac{\text{多項式}}{\text{多項式}}$ の形の分数関数を**有理関数**といいます。

199 **分母に $x^2 + a$ $(a > 0)$** を含む積分は

$x = \sqrt{a}\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ **で置換**

するとうまくいく場合が多いです。

解答・解説

199 (1) $\boldsymbol{x = \tan\theta}$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dx = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ であり，

$x : \dfrac{1}{\sqrt{3}} \to \sqrt{3}$ のとき，$\theta : \dfrac{\pi}{6} \to \dfrac{\pi}{3}$

$$\therefore \quad \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}}$$

(2) $\boldsymbol{x = \frac{1}{3}\tan\theta}$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dx = \dfrac{d\theta}{3\cos^2\theta}$ であり，

$x : 0 \to \dfrac{1}{3}$ のとき，$\theta : 0 \to \dfrac{\pi}{4}$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta + 1} \cdot \frac{d\theta}{3\cos^2\theta} = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{12}}}$$