1.10　定積分で表された関数

問題

216 関数 $f(x)$ が式 $f(x) = e^x - \int_0^1 tf(t)x\,dt$ をみたすとき

$$f(x) = e^x - \boxed{}\,x$$

である。　（東京医科大）

217 次の関係をみたす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x + \int_0^{\pi} f(t)\sin(x+t)\,dt$$

（武蔵工業大）

218 次の条件をみたす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f'(x) = \cos x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt,\ f(0) = 0$$

（筑波大）

219 $-1 < x < 1$ に対して定義された関数 $f(x)$ が次の式をみたすとき，$f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x^2 + \int_0^x t^2 f'(t)\,dt$$

220 次の等式 $f(x) = (2x-k)e^x + e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt$ が成り立つような連続関数 $f(x)$ がある。ただし，k は定数である。このとき，$f(x)$ を求めよ。

（島根医科大　改）

チェック・チェック

積分区間と被積分関数に着目します。

216 $\displaystyle\int_0^1 tf(t)\,dt$ の値は**定数**ですね。a とおきましょう。

このように，積分の上端，下端が定数であり，被積分関数が積分変数以外の文字を含まないときには，積分の結果は定数です。文字定数とおいてしまいましょう。

217 $\sin(x+t)$ を加法定理で展開し，$\sin x$，$\cos x$ を**積分の外**に移動します。

218 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt$ は**定数**なので，これを a とおくと，与式は $f'(x)=\cos x+a$ であり，積分すると $f(x)$ は a と積分定数 C を含んだ式となります。ここで，$f(0)=0$ が登場します。

219，**220** 今度は積分の上端に変数 x があるので，積分しても x が残っています。つまり，x の関数となっています。

このような場合には，微分と積分は逆演算であるという関係を使います。

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)\quad(a\text{ は定数})$$

微分と積分の関係

なお，$f(t)$ は変数 x を含んではならないことに注意して下さい。

$F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ は

$$F'(x)=f(x)\text{ かつ }F(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0$$

をみたす関数として一意的に決まります。

解答・解説

216 $f(x)=e^x-x\displaystyle\int_0^1 \boldsymbol{tf(t)\,dt}$ であり，$\displaystyle\int_0^1 tf(t)\,dt=a$（定数）とおくと

$$a=\int_0^1 tf(t)\,dt=\int_0^1(te^t-at^2)\,dt \quad (\because\ \boldsymbol{f(x)=e^x-ax})$$

$$=\Big[te^t\Big]_0^1-\int_0^1 e^t\,dt-\Big[\frac{a}{3}t^3\Big]_0^1=e-\Big[e^t\Big]_0^1-\frac{a}{3}=1-\frac{a}{3}$$

$$\therefore\quad a+\frac{a}{3}=1 \qquad a=\frac{3}{4} \qquad \therefore\quad f(x)=e^x-\underline{\boldsymbol{\frac{3}{4}}}x$$

217 三角関数の加法定理より

$$f(x)=x+\int_0^\pi f(t)\sin(x+t)\,dt=x+\int_0^\pi f(t)(\sin x\cos t+\cos x\sin t)\,dt$$

$$=x+\sin x\int_0^\pi \boldsymbol{f(t)\cos t\,dt}+\cos x\int_0^\pi \boldsymbol{f(t)\sin t\,dt}$$

ここで，$a=\displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt$，$b=\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt$ とおくと

$$f(x)=x+a\sin x+b\cos x$$

$$a=\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt=\int_0^\pi(t+a\sin t+b\cos t)\cos t\,dt$$

$$=\int_0^\pi\left\{t(\sin t)'+\frac{a}{2}\sin 2t+\frac{b}{2}(1+\cos 2t)\right\}dt$$

$$=\left[t\sin t-\frac{a}{4}\cos 2t+\frac{b}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right]_0^\pi-\int_0^\pi \sin t\,dt$$

$$=\frac{b}{2}\pi+\Big[\cos t\Big]_0^\pi=\frac{b}{2}\pi-2 \quad \cdots\cdots ①$$

同じように計算すると　$b=\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt=\cdots=\pi+\frac{a}{2}\pi \quad \cdots\cdots ②$

①，②より

$$\begin{cases} a=\dfrac{b}{2}\pi-2 \\ b=\pi+\dfrac{a}{2}\pi \end{cases} \qquad a=-2,\ b=0 \qquad \therefore\quad \underline{\boldsymbol{f(x)=x-2\sin x}}$$

218 $a=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt$ ……① とおくと，与式は

$$f'(x)=\cos x+a$$

$$\therefore\quad f(x)=\int(\cos x+a)\,dx=\sin x+ax+C\quad (C\text{ は積分定数})$$

$f(0)=0$ より　$C=0$　$\therefore$　$f(x)=\sin x+ax$ ……②

すると，①から

$$a=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+at)\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt+a\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt+a\int_0^{\frac{\pi}{2}}t(\sin t)'\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+a\Big[t\sin t+\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a$$

$$\left\{1-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right\}a=\frac{1}{2}\qquad\therefore\quad a=\frac{1}{4-\pi}$$

したがって，②より　$\boldsymbol{f(x)=\sin x+\dfrac{1}{4-\pi}x}$

219 $f(x)=x^2+\int_0^x t^2f'(t)\,dt$ ……①

①の両辺を x で微分すると

$$f'(x)=2x+x^2f'(x)\qquad\therefore\quad f'(x)=\frac{2x}{1-x^2}$$

したがって

$$f(x)=\int\frac{2x}{1-x^2}\,dx=-\int\frac{(1-x^2)'}{1-x^2}\,dx$$

$$=-\log(1-x^2)+C\quad(\because\ -1<x<1,\ C\text{ は積分定数})$$

①から，$f(0)=0$ より　$C=0$　$\therefore$　$\boldsymbol{f(x)=-\log(1-x^2)}$

220 $f(x)=(2x-k)e^x+e^{-x}\displaystyle\int_0^x f(t)e^t dt$ …… ① の両辺を x で微分すると

$$f'(x)=2e^x+(2x-k)e^x-e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt+e^{-x}f(x)e^x$$
$$=(2x-k+2)e^x+f(x)-e^{-x}\int_0^x f(t)e^t\,dt \quad \cdots\cdots ②$$

①より $f(x)-e^{-x}\displaystyle\int_0^x f(t)e^t\,dt=(2x-k)e^x$ なので，②へ代入して

$$f'(x)=(2x-k+2)e^x+(2x-k)e^x=2(2x-k+1)e^x$$

したがって

$$f(x)=2\int(2x-k+1)e^x\,dx$$
$$=2(2x-k-1)e^x+C \quad (C \text{ は積分定数}) \cdots\cdots ③$$

①において $x=0$ とすると　　$f(0)=-k$

③において $x=0$ とすると　　$f(0)=-2k-2+C$

よって，$-2k-2+C=-k$ より　　$C=k+2$

したがって，③より　　$\boldsymbol{f(x)=2(2x-k-1)e^x+k+2}$