1.13　区分求積の応用

問題

230 n を自然数とする。$n+1$ 項の等差数列 $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$ と等比数列 $y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_n$ が

$$1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 2$$
$$1 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = 2$$

を満たすとし，$P(n)$，$Q(n)$，$R(n)$，$S(n)$ を次で定める。

$$P(n) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},\ Q(n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$
$$R(n) = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n},\ S(n) = \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n}$$

このとき極限値 $\lim_{n\to\infty} P(n)$，$\lim_{n\to\infty} Q(n)$，$\lim_{n\to\infty} R(n)$，$\lim_{n\to\infty} S(n)$ をそれぞれ求めよ。　（東北大）

231 n を正の整数とする。$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ に対して $\triangle \mathrm{AOB}_k$ を $\angle \mathrm{AOB}_k = \dfrac{k}{2n}\pi$，$\mathrm{OA} = 1$，$\mathrm{OB}_k = k$ であるような三角形とし，その面積を S_k とする。

(1) S_k を k と n を用いて表せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} S_k$ を求めよ。　（青山学院大）

チェック・チェック

230 $x_0 = 1$，$x_n = 2$ より等差数列 $\{x_n\}$ の一般項が求まり，$y_0 = 1$，$y_n = 2$ より等比数列 $\{y_n\}$ の一般項が求まります。$\lim_{n\to\infty} Q(n)$，$\lim_{n\to\infty} S(n)$ については $\lim_{n\to\infty} \log Q(n)$，$\lim_{n\to\infty} \log S(n)$ を考えましょう。

231 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} S_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2} \sin \frac{k}{2n}\pi$ において，x は $x = \dfrac{k}{n}$，$x = \dfrac{k}{2n}$，$x = \dfrac{k}{2n}\pi$ といった候補が考えられます。

解答・解説

230 等差数列 $\{x_k\}$ の公差を d，等比数列 $\{y_k\}$ の公比を r とおくと

$$x_k = 1 + dk,\ y_k = r^k$$

$x_n = y_n = 2$ より

$$1 + dn = 2,\ r^n = 2 \qquad \therefore \quad d = \frac{1}{n},\ r = 2^{\frac{1}{n}}$$

よって，$x_k = 1 + \dfrac{k}{n}$，$y_k = 2^{\frac{k}{n}}$ となる。

$P(n)$ について

$$P(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

$x = \dfrac{k}{n}$ とおくと，

$$(*)\begin{cases} k : 1 \to n \text{ のとき } x : \dfrac{1}{n} \to \dfrac{n}{n}(=1) \text{ であり，} \\ n \to \infty \text{ のときの } x \text{ の変域は } 0 \leqq x \leqq 1, \\ \text{項数 } n \text{ より，区間 } 0 \leqq x \leqq 1 \text{ を } n \text{ 等分すると} \varDelta x = \dfrac{1-0}{n} = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 (1+x)\,dx = \left[x + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \underline{\boldsymbol{\frac{3}{2}}}$$

$Q(n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ については，両辺の自然対数をとると

$$\log Q(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

$x = \dfrac{k}{n}$ とおくと $(*)$ が成り立つので

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\log Q(n) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1 + \frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 \log(1+x)\,dx \\ &= \int_0^1 (1+x)'\log(1+x)\,dx \\ &= \Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 (1+x)\cdot\frac{1}{1+x}\,dx \\ &= 2\log 2 - \int_0^1 dx = \log 4 - 1 = \log\frac{4}{e}\end{aligned}$$

対数関数の連続性より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(n) = \underline{\boldsymbol{\frac{4}{e}}}$

$R(n)$ について

$$R(n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}$$

$x=\dfrac{k}{n}$ とおくと $(*)$ が成り立つので

$$\lim_{n\to\infty}R(n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 2^x\,dx=\left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_0^1=\frac{2-1}{\log 2}=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{\log 2}}}$$

$S(n)=\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}$ については，両辺の自然対数をとると

$$\log S(n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log y_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log 2$$

$x=\dfrac{k}{n}$ とおくと $(*)$ が成り立つので

$$\lim_{n\to\infty}\log S(n)=\log 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\log 2\int_0^1 x\,dx$$

$$=\log 2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}\log 2=\log\sqrt{2}$$

対数関数の連続性より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S(n)=\underline{\boldsymbol{\sqrt{2}}}$

231 (1) $S_k=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}_k\cdot\sin\angle\mathrm{AOB}_k=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot k\cdot\sin\dfrac{k}{2n}\pi$

$$=\underline{\boldsymbol{\frac{k}{2}\sin\frac{k}{2n}\pi}}$$

(2) $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n}\sin\frac{k}{2n}\pi$

$x=\dfrac{k}{2n}$ とおくと，$k:1\to n$ のとき $x:\dfrac{1}{2n}\to\dfrac{n}{2n}\left(=\dfrac{1}{2}\right)$ であり，$n\to\infty$ のときの x の変域は $0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$，項数 n より，区間 $0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ を n 等分すると

$\varDelta x=\dfrac{\frac{1}{2}-0}{n}=\dfrac{1}{2n}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}S_k=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n}\sin\frac{k}{2n}\pi\cdot\frac{1}{2n}=2\int_0^{\frac{1}{2}}x\sin\pi x\,dx$$

$$=2\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\right)\int_0^{\frac{1}{2}}x(\cos\pi x)'\,dx$$

$$=-\frac{2}{\pi}\left[x\cos\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\pi x\,dx$$

$$=-\frac{2}{\pi}(0-0)+\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\pi^2}(1-0)=\underline{\boldsymbol{\frac{2}{\pi^2}}}$$