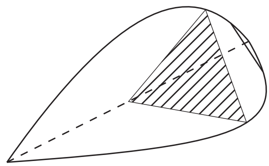
2.5　体積（非回転体）

問題

254 底面の半径が a，高さも a である直円柱がある。底面の 1 つの直径を含み，底面と 45° の傾きをなす平面で，直円柱を 2 つの部分に分けるとき，各部分の体積を求めよ。（学習院大）

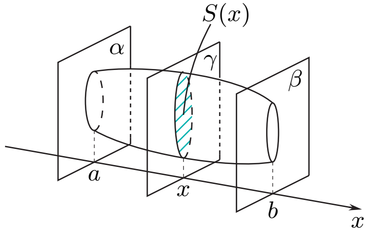
255 xy 平面内の放物線 $y = x^2 - 2x - 1$ と直線 $y = -x + 1$ で囲まれた部分を底面とし，x 軸に垂直な平面で切った切り口がつねに正三角形であるような右図の概形をもつ立体の体積を求めよ。（信州大）



256 xyz 空間の 2 点 A(1，0，1)，B(−1，0，1) を結ぶ直線を L とし，xy 平面における円 $x^2 + y^2 \leqq 1$ を D とする。点 P が L 上を動き，点 Q が D 上を動くとき，線分 PQ が動いてできる立体を H とする。

平面 $z = t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ による立体 H の切り口 H_t の面積 S_t と，H の体積 V を求めよ。（東北大）

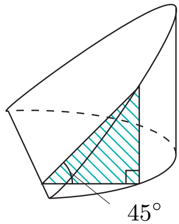
チェック・チェック



ある立体と，x 軸に垂直な 2 平面 α，β とではさまれた立体の体積 V は，α，β と x 軸との交点の座標を，それぞれ a，b とし，x 座標が x の点で x 軸に垂直に立てた平面 γ によるこの立体の断面積を $S(x)$ とすると

$$V=\int_a^b S(x)\,dx$$

です。**微小体積 $S(x)\Delta x$ の寄せ集め**というのが基本精神です。



254 右図の切り口（斜線部分）は直角二等辺三角形です。

255 問題文にあるように切り口は正三角形です。

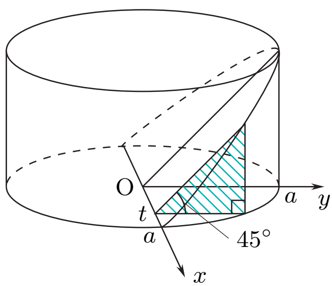
この正三角形の 1 辺の長さを求めましょう。

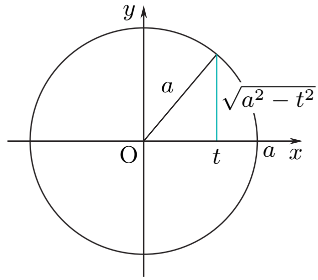
256 2 点 P，Q が動いて立体 H ができるのですが，同時に 2 点を動かすのはつらい。**まずは一方を固定して**，他方を動かします。P を固定して Q が動くときの立体は斜円錐です。

解答・解説

254 図のように x 軸，y 軸をとると，小さい方の部分と，x 軸に垂直な平面 $x=t\ (-a \leqq t \leqq a)$ の共通部分は，直角をはさむ 2 辺が $\sqrt{a^2-t^2}$ の直角二等辺三角形なので，面積 $S(t)$ は

$$S(t)=\frac{1}{2}(a^2-t^2)$$



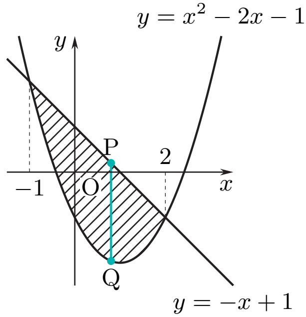


よって，小さい方の体積は

$$\int_{-a}^{a} S(t)\,dt = 2\times\frac{1}{2}\int_0^a (a^2-t^2)\,dt=\left[a^2t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^a=\underline{\boldsymbol{\frac{2}{3}a^3}}$$

したがって，大きい方の体積は

$$\pi a^2\cdot a-\frac{2}{3}a^3=\underline{\boldsymbol{\left(\pi-\frac{2}{3}\right)a^3}}$$



255 $y=x^2-2x-1$ と $y=-x+1$ の交点の x 座標は

$$x^2-2x-1=-x+1$$
$$x^2-x-2=0$$
$$(x+1)(x-2)=0 \qquad \therefore \quad x=-1,\ 2$$

したがって，底面は右図の斜線部分となる。この底面を x 軸と垂直な平面で切った切り口，すなわち線分 PQ の長さは

$$\begin{aligned}&(-x+1)-(x^2-2x-1)\\ =&-x^2+x+2=-(x+1)(x-2)\end{aligned}$$

である。したがって，PQ を 1 辺とする正三角形の面積 $S(x)$ は

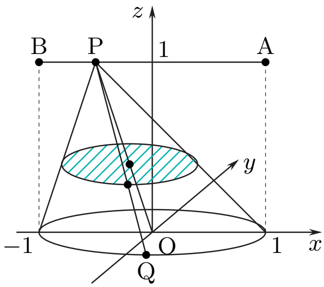
$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\{-(x+1)(x-2)\}^2\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}(x+1)^2(x-2)^2$$

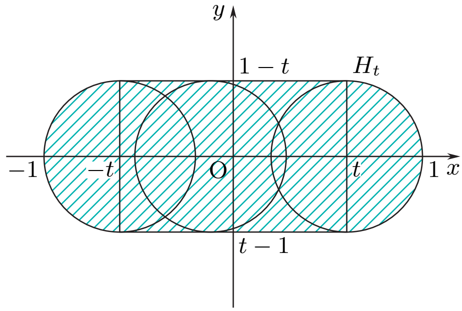
となる。よって，求める体積 V は

$$\begin{aligned}V&=\int_{-1}^{2}S(x)\,dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)^2\,dx\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^{2}(x+1)^2\{(x+1)-3\}^2\,dx\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^{2}\{(x+1)^4-6(x+1)^3+9(x+1)^2\}\,dx\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{(x+1)^5}{5}-6\cdot\frac{(x+1)^4}{4}+9\cdot\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{2}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3^5}{5}-\frac{3}{2}\cdot 3^4+3\cdot 3^3\right)=\underline{\boldsymbol{\frac{81\sqrt{3}}{40}}}\end{aligned}$$

256 P(p, 0, 1) を固定して，Q を D 上で動かすと，線分 PQ は P を頂点とする斜円すいをえがく。これと，平面 $z=t$ の共通部分は，OP を $t:1-t$ に内分する点 $(pt,\ 0,\ t)$ を中心とする半径 $1-t$ の円板である。

次に，P を線分 AB 上で動かすと，立体 H の平面 $z=t$ による切り口 H_t は下の右図の斜線部分となる。





切り口 H_t の面積 S_t は

$$S_t=\pi(1-t)^2+2t\cdot 2(1-t)=\underline{\boldsymbol{\pi(1-t)^2+4t(1-t)}}$$

よって，H の体積 V は

$$\begin{aligned}V&=\int_0^1 S_t\,dt=\int_0^1\{\pi(1-t)^2+4t(1-t)\}\,dt\\&=\pi\left[-\frac{1}{3}(1-t)^3\right]_0^1+4\int_0^1(t-t^2)\,dt\\&=\frac{\pi}{3}+4\left[\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\underline{\boldsymbol{\frac{\pi+2}{3}}}\end{aligned}$$