2.6　曲線の長さ

問題

257 $0 \leqq x$ で定義された曲線 $y = \sqrt{x} - \dfrac{x\sqrt{x}}{3}$ について，点 P が点 $\left(1,\ \dfrac{2}{3}\right)$ を出発して，x 軸正方向にこの曲線上を点 Q まで動く。点 Q の x 座標を $q\ (q > 1)$ とするとき，点 P が動いた道のり $L(q)$ を求めよ。　（群馬大　改）

258 正の定数 a に対して，関数 $f(x) = \dfrac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ を考える。曲線 $C : y = f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(0,\ a)$，$\mathrm{Q}(b,\ f(b))\ (b > 0)$ の間の弧の長さは $af'(b)$ に等しいことを示せ。　（富山大　改）

259 θ が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，点 $(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$ が描く軌跡を A とする。A の長さを求めよ。　（日本医科大　改）

260 初めは原点にある動点 P の t 秒後の座標 $(x(t),\ y(t))$ が

$$x(t) = e^t \cos t - 1, \quad y(t) = e^t \sin t$$

で与えられるとする。P が 2 度目に x 軸の正の部分に達するまでに P が動く道のりは $\boxed{}$ である。　（早稲田大）

261 平面上の点の直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とする。極方程式 $r = f(\theta)$ によって表される曲線 C について，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C 上の点 $(x,\ y)$ について，$\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2$ を $f(\theta)$，$f'(\theta)$ を用いて表せ。

(2) $f(\theta) = \sin^3\dfrac{\theta}{3}$ のとき，曲線 C の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の長さを求めよ。

（熊本大）

チェック・チェック

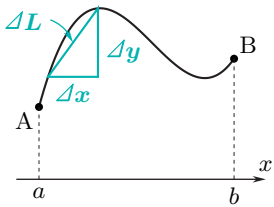
257 $y=f(x)$ の $a \leqq x \leqq b$ における曲線の長さ L は

$$\varDelta L=\sqrt{(\varDelta x)^2+(\varDelta y)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2}\,\varDelta x$$

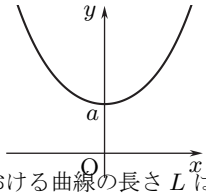
なので

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

です。



258 これはカテナリー (懸垂線) とよばれる曲線です。ロープや電線の両端を持って垂らしたときにできる曲線です。



259 パラメータ表示された曲線 $\begin{cases} x=x(\theta) \\ y=y(\theta) \end{cases}$ の $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ における曲線の長さ L は

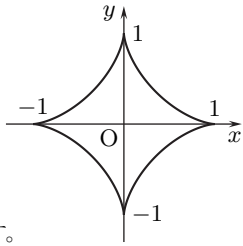
$$\varDelta L=\sqrt{(\varDelta x)^2+(\varDelta y)^2}=\sqrt{\left(\frac{\varDelta x}{\varDelta \theta}\right)^2+\left(\frac{\varDelta y}{\varDelta \theta}\right)^2}\,\varDelta \theta$$

なので

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

です。

本問はアステロイド（星芒形）とよばれる有名な曲線です。



260 動点 P が 2 度目に x 軸の正の部分に達するのは

$$y(t)=e^t \sin t=0$$

の正の解のうち，小さい方から順に $x(t)$ に代入していき，2 度目に正となる t のときです。

261 (1) 極座標表示された曲線 $r=f(\theta)$ の $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ における長さ L は本問により

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(\theta)\}^2+\{f(\theta)\}^2}\,d\theta$$

であることが分かります。

解答・解説

257 $y = x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ より

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 1+\{f'(x)\}^2 &= 1+\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^2\\ &= 1+\frac{x^{-1}-2+x}{4}\\ &= \frac{x^{-1}+2+x}{4}\\ &= \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^2\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}L(q) &= \int_1^q \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx\\ &= \int_1^q \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}{2}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\left[2\cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_1^q\\ &= \sqrt{q} + \frac{1}{3}q\sqrt{q} - 1 - \frac{1}{3}\\ &= \underline{\boldsymbol{\frac{q\sqrt{q}}{3} + \sqrt{q} - \frac{4}{3}}}\end{aligned}$$

258 $f'(x) = \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{1}{a}\cdot e^{\frac{x}{a}} - \dfrac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$ であるから

$$\begin{aligned}1+\{f'(x)\}^2 &= 1+\left\{\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})\right\}^2\\ &= 1+\frac{1}{4}(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} - 2)\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2\right)\\ &= \left\{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\right\}^2\end{aligned}$$

したがって，題意の弧の長さ l は

$$\begin{aligned}l &= \int_0^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^b \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\left[ae^{\frac{x}{a}} - ae^{-\frac{x}{a}}\right]_0^b\\ &= \frac{a}{2}\left(e^{\frac{b}{a}} - e^{-\frac{b}{a}}\right)\\ &= af'(b)\end{aligned}$$

（証終）

259 $x(\theta)=\cos^3\theta,\ y(\theta)=\sin^3\theta$ とおくと

$$x(2\pi-\theta)=x(\theta)$$
$$y(2\pi-\theta)=-y(\theta)$$

より，$0\leqq\theta\leqq\pi$ と $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ のときの軌跡は，x 軸に関して対称である。また

$$x\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-x\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$y\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=y\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

より，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ と $\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のときの軌跡は，y 軸に関して対称である。すなわち，軌跡 A は x 軸，y 軸に関して対称であるから，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ での軌跡を考えればよい。ここで

$$\frac{dx}{d\theta}=-3\sin\theta\cos^2\theta$$
$$\frac{dy}{d\theta}=3\cos\theta\sin^2\theta$$

より

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=9\sin^2\theta\cos^2\theta$$

となるので，求める長さ L は

$$\begin{aligned}L&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin\theta\cos\theta d\theta\\&=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta\\&=6\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\underline{\mathbf{6}}\end{aligned}$$

260 $x'(t) = (e^t)'\cos t + e^t(\cos t)' = e^t\cos t - e^t\sin t = e^t(\cos t - \sin t)$
$y'(t) = (e^t)'\sin t + e^t(\sin t)' = e^t\sin t + e^t\cos t = e^t(\cos t + \sin t)$

より

$$\begin{aligned}\sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2} &= \sqrt{\{e^t(\cos t - \sin t)\}^2 + \{e^t(\cos t + \sin t)\}^2}\\ &= e^t\sqrt{(1 - 2\sin t\cos t) + (1 + 2\sin t\cos t)}\\ &= \sqrt{2}e^t\end{aligned}$$

また，$t > 0$ の範囲で $y(t) = 0$ を解くと

$t = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$

このときの P の座標は

$(-e^{\pi} - 1,\ 0),\ (e^{2\pi} - 1,\ 0),\ (-e^{3\pi} - 1,\ 0),\ (e^{4\pi} - 1,\ 0),\ \cdots$

より，P が 2 度目に x 軸の正の部分に達するのは，$\mathrm{P}(e^{4\pi} - 1,\ 0)$ となるとき，すなわち $t = 4\pi$ のときである。よって，求める道のり L は

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{4\pi}\sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2}\,dt\\ &= \int_0^{4\pi}\sqrt{2}e^t\,dt\\ &= \Big[\sqrt{2}e^t\Big]_0^{4\pi}\\ &= \underline{\boldsymbol{\sqrt{2}(e^{4\pi} - 1)}}\end{aligned}$$

261 (1) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ より

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}\{f(\theta)\cos\theta\}\\ &= f'(\theta)\cos\theta + f(\theta)(\cos\theta)'\\ &= f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta\\ \frac{dy}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}\{f(\theta)\sin\theta\}\\ &= f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)(\sin\theta)'\\ &= f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\\ &= \{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta\}^2 + \{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta\}^2\\ &= \{f'(\theta)\}^2\cos^2\theta - 2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta + \{f(\theta)\}^2\sin^2\theta\\ &\qquad + \{f'(\theta)\}^2\sin^2\theta + 2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta + \{f(\theta)\}^2\cos^2\theta\\ &= \underline{\boldsymbol{\{f'(\theta)\}^2 + \{f(\theta)\}^2}}\end{aligned}$$

(2) $f(\theta)=\sin^3\dfrac{\theta}{3}$ より

$$f'(\theta)=3\sin^2\frac{\theta}{3}\cdot\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)'=3\sin^2\frac{\theta}{3}\cdot\cos\frac{\theta}{3}\cdot\left(\frac{\theta}{3}\right)'=\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}$$

よって

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2&=\left(\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\right)^2+\left(\sin^3\frac{\theta}{3}\right)^2\\&=\sin^4\frac{\theta}{3}\left(\cos^2\frac{\theta}{3}+\sin^2\frac{\theta}{3}\right)\\&=\sin^4\frac{\theta}{3}\end{aligned}$$

となるので，求める長さ L は

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^4\frac{\theta}{3}}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{\theta}{3}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos\frac{2}{3}\theta}{2}\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=\underline{\boldsymbol{\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{8}}}\end{aligned}$$