# 1　式と曲線

## 1.1　放物線

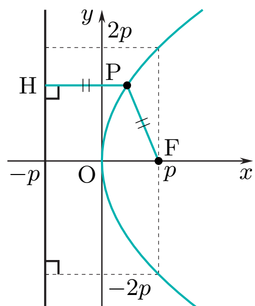
### 問題

**1**　2 次曲線 $x=\dfrac{1}{2}y^2+y\cdots$① を頂点を表す形に変形すると，$x=\boxed{\quad}$ となる。さらに $Y^2=4pX$ の形に変形すると，$Y=\boxed{\quad}$，$X=\boxed{\quad}$，$p=\boxed{\quad}$ である。したがって，①は焦点が $\boxed{\quad}$，準線が $x=\boxed{\quad}$ の放物線であることがわかる。（聖マリアンナ医科大）

**2**　(1) 平面において，点 $(0,\ 3)$ からの距離と直線 $y=-3$ からの距離がつねに等しいような点 $(x,\ y)$ の軌跡を $y=\dfrac{1}{p}x^2$ で表すと $p=\boxed{\quad}$ となる。（北海道工業大　改）

(2) 点 $\mathrm{A}(2,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円と直線 $x=-1$ の両方に接し，点 A を内部に含まない円の中心の軌跡は放物線を描く。この放物線の方程式，焦点の座標，準線の方程式を求めよ。（愛知教育大　改）

### チェック・チェック




**放物線の定義**を確認しておきましょう。

定点 F とそれを通らない直線 $l$ があるとき，動点 P から $l$ までの距離 PH と F までの距離 PF とが等しい点 P の軌跡を放物線といい，F を**焦点**，$l$ を**準線**といいます。

$\mathrm{F}(p,\ 0)$，$l : x=-p$ となるように座標を定め

$$\mathrm{PF}=\mathrm{PH} \iff \sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|$$

を整理すると

$$y^2=4px$$

が得られます。これを放物線の方程式の**標準形**といいます。

**1**　放物線の方程式を標準形に直して，焦点の座標，準線の方程式を読み取ります。

**2**　(1) 放物線の定義から，これを表す方程式を表せるようにしておきましょう。

(2) 放物線の定義にあわせて，問題文から必要な条件を読み取ることが大切です。

## 解答・解説

**1** $x=\dfrac{1}{2}y^2+y$ ……① を頂点の座標がわかるように変形すると

$$x=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}(y+1)^2-\frac{1}{2}}}$$

さらに，変形して

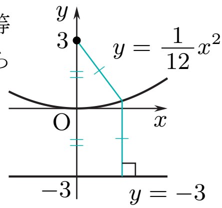
$$(y+1)^2=4\cdot\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

ここで，$Y=\underline{\boldsymbol{y+1}}$，$X=\underline{\boldsymbol{x+\frac{1}{2}}}$，$p=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}$ とおくと，$Y^2=4pX$ となる。

したがって，焦点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，準線 $x=-\dfrac{1}{2}$ の放物線 $y^2=4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot x$ を $x$ 軸正方向に $-\dfrac{1}{2}$，$y$ 軸正方向に $-1$ だけ平行移動したものが①なので

①の**焦点**は $\underline{\boldsymbol{(0,\ -1)}}$，**準線**は $\underline{\boldsymbol{x=-1}}$

**2** (1) 点 $(0,\ 3)$ からの距離と直線 $y=-3$ からの距離が等しい点の軌跡は，焦点 $(0,\ 3)$，準線 $y=-3$ の放物線であるから

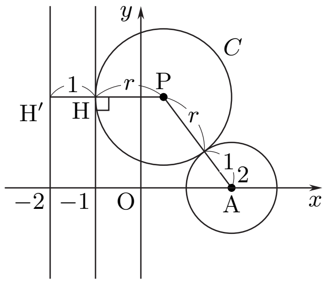



$$\boldsymbol{x^2=4\cdot 3y}$$

$$y=\frac{1}{12}x^2 \qquad \therefore\quad p=\underline{\boldsymbol{12}}$$

別解 $\sqrt{x^2+(y-3)^2}=|y+3|$ を 2 乗して，整理してもよい。

(2) 題意の円 $C$ の中心を P，半径を $r$ とおく。円 $C$ は点 A$(2,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円に外接するから




$$\mathrm{AP}=r+1$$

また，円 $C$ は直線 $x=-1$ に接するから，接点を H とおくと

$$\mathrm{PH}=r$$

である。したがって

$$\mathrm{AP}=\mathrm{PH}+1$$

P は直線 $x=-1$ に関して点 A と同じ側にあるから，直線 $x=-2$ をとり，P から直線 $x=-2$ に下ろした垂線の足を H′ とすると

$$\mathrm{AP}=\mathrm{PH'}$$

である。よって，点 P の軌跡は

焦点 $\underline{\boldsymbol{(2,\ 0)}}$，準線 $\underline{\boldsymbol{x=-2}}$ の放物線

であるから，この方程式は　$\underline{\boldsymbol{y^2=8x}}$

別解 P の座標を $(x,\ y)$ として

$$(x-2)^2+y^2=(r+1)^2,\ x+1=r$$

から $r$ を消去して，整理してもよい。

## 1.2　放物線と接線

### 問題

**3**　点 $(0,\ p)$ を通り，放物線 $y=\dfrac{1}{4p}x^2$ と 2 点 A，B で交わる任意の直線を考える。A，B を通る放物線の接線は互いに垂直であることを示せ。ただし，$p \fallingdotseq 0$ とする。　　（はこだて未来大）

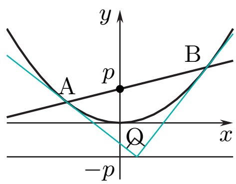
**4**　$p$ を正の定数とし，点 $\mathrm{F}(0,\ p)$ を焦点にもち，$y=-p$ を準線とする放物線を $C$ とする。$C$ 上の点 $\mathrm{Q}(x_0,\ y_0)$ (ただし，$x_0 \fallingdotseq 0$) を考え，点 Q と F を通る直線を $l_1$，点 Q を通り放物線 $C$ の主軸に平行な直線を $l_2$ とする。このとき，点 Q における $C$ の接線 $l$ は，$l_1$ と $l_2$ のなす角を 2 等分することを示せ。　　（北海道大　改）

### チェック・チェック

**3**　焦点 $(0,\ p)$ を通る直線と放物線 $x^2=4py$ との交点 A, B における接線は

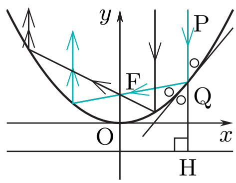
　　準線 $y=-p$ 上で垂直に交わる

ということはよく知られたことです。




**4**　これもかなり有名な問題です。

右図のように点 P をとると，本問により PQ と FQ は Q における接線と等角をなすことがわかります。したがって，放物線で反射する光はすべて焦点 F に集まります。この性質を利用したのがパラボラアンテナですね。逆に，焦点 F から出た光は，放物線で反射するとすべて軸と平行な光になります。スポットライトはこの性質を利用しています。



## 解答・解説

**3** $y$ 軸 $(x=0)$ は放物線 $y=\dfrac{1}{4p}x^2$ と 2 点で交わることはない。

$(0,\ p)$ を通り，傾き $m$ の直線の方程式は

$$y=mx+p$$

$y=\dfrac{1}{4p}x^2$ と連立して

$$\frac{1}{4p}x^2=mx+p \qquad \therefore \quad x^2-4pmx-4p^2=0$$

この 2 解を $\alpha$，$\beta$ とおく。$f(x)=\dfrac{1}{4p}x^2$ とおくと $f'(x)=\dfrac{x}{2p}$ であるから，A, B における**接線の傾きの積**は

$$\boldsymbol{f'(\alpha)\times f'(\beta)}=\frac{\alpha}{2p}\cdot\frac{\beta}{2p}=\frac{\alpha\beta}{4p^2}=\frac{1}{4p^2}(-4p^2) \quad (\because\ \text{解と係数の関係})$$
$$=-1$$

よって 2 接線は互いに垂直である。 （証終）

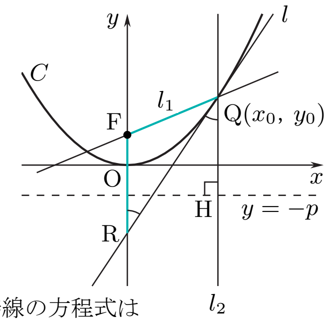
**4** Q から準線に下ろした垂線の足を H，接線 $l$ と $y$ 軸との交点を R とすると，$l_2 \mathbin{/\!/} y$ 軸より

$$\angle\mathrm{HQR}=\angle\mathrm{FRQ}$$

であるから，$l$ が $l_1$ と $l_2$ のなす角を 2 等分することを示すには

$$\boldsymbol{\angle\mathrm{FQR}=\angle\mathrm{FRQ}}$$

を示せばよい。




△FQR の辺 FR，FQ について調べる。

$$C : x^2=4py \quad \cdots\cdots \text{①}$$

より $y'=\dfrac{x}{2p}$ であるから，点 $\mathrm{Q}(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$$y=\frac{x_0}{2p}(x-x_0)+y_0 \qquad y=\frac{x_0}{2p}x-y_0 \quad (\because\ \text{①})$$

$$\therefore \quad \mathrm{R}(0,\ -y_0)$$

これより

$$\mathrm{FR}=p-(-y_0)=p+y_0$$

一方，放物線の定義より

$$\mathrm{FQ}=\mathrm{QH}=y_0-(-p)=y_0+p$$

△FQR は $\boldsymbol{\mathrm{FR}=\mathrm{FQ}}$ の二等辺三角形であるから，$\angle\mathrm{FQR}=\angle\mathrm{FRQ}$ は示された。
（証終）

## 1.3　楕円

### 問題

**5**　$xy$ 平面上の 2 点 $\mathrm{F}(1,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-1,\ 0)$ からの距離の和がつねに 4 であるような点の軌跡は楕円となる。この楕円の長軸と短軸の長さを求めよ。

（北海道工業大）

**6**　座標平面上に，原点 O を中心とする半径 $2a$ の円 $C$ と，定点 $\mathrm{F}(-2b,\ 0)$ $(0<b<a)$ をとる。$C$ 上の点を Q とし，線分 FQ の垂直二等分線と線分 OQ との交点を P とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　線分の長さの和 $\mathrm{FP}+\mathrm{PO}$ は，点 Q の位置には無関係に一定であることを示せ。

(2)　点 Q が $C$ 上を動くとき，点 P の軌跡の方程式を求めよ。（愛知教育大）

### チェック・チェック

**楕円の定義**を確認しておきましょう。

2 定点 F, F′ があり，動点 P からの距離の和 **PF ＋ PF′** が一定な点 P の軌跡を楕円といい，F, F′ を**焦点**といいます。

$\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ となるように座標を定めると

$$\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2a\ (0<c<a)$$

$$\iff \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

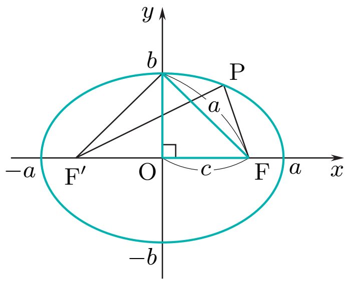
これを整理すると

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

となります。$b^2=a^2-c^2\ (>0)$ とおくと

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{（楕円の標準形）}$$

です。$a$, $b$, $c$ は $b^2+c^2=a^2$ をみたすので，上図の直角三角形をつくります。




**5**　F，F′ を焦点とする楕円上の点を P，楕円の中心を O とすると

（長軸の長さ）$=2a=\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'$

（短軸の長さ）$=2\sqrt{a^2-\mathrm{OF}^2}$

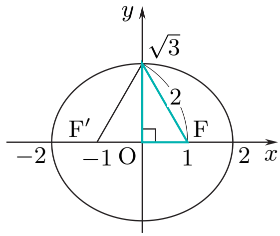
**6**　(1) の $\mathrm{FP}+\mathrm{PO}=$（一定）は楕円の定義であり，P は F，O を焦点とする楕円上の点で，(1) の一定値は長軸の長さを表しています。

# 解答・解説

**5** 楕円上の点を P とすると，$\mathrm{FP}+\mathrm{F'P}=4$ $(=2a$ とおく$)$ より

$$\text{長軸の長さ}=2a=\underline{\mathbf{4}}$$

$$\text{短軸の長さ}=2\sqrt{a^2-\mathrm{OF}^2}=2\sqrt{2^2-1^2}=\underline{\mathbf{2\sqrt{3}}}$$




別解 $\mathrm{P}(x,\ y)$ として

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=4$$

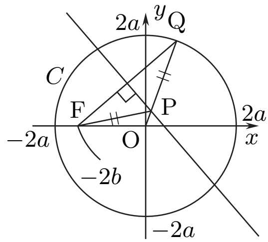
を整理して，$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ を導いてもよい。

**6** (1) 点 P は線分 FQ の垂直二等分線上の点なので

$$\mathrm{FP}=\mathrm{QP}$$

$$\therefore\quad \mathrm{FP}+\mathrm{PO}=\mathrm{QP}+\mathrm{PO}$$
$$=\mathrm{QO}=2a\ (\text{一定})$$

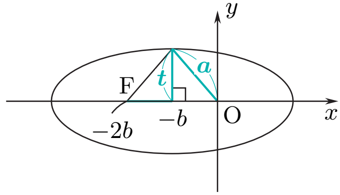
（証終）




(2) $\mathrm{FP}+\mathrm{PO}$ が一定の値をとるので，

点 P の軌跡は 2 点 O，F を焦点とする楕円となる。この楕円の中心は $(-b,\ 0)$，長軸の長さは $2a$ であるから，短軸の長さを $2t$ $(t>0)$ とおくと

$$t=\sqrt{a^2-b^2}$$




よって，点 P の軌跡の方程式は

$$\underline{\boldsymbol{\frac{(x+b)^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-b^2}=1}}$$

## 1.4　楕円と軌跡

### 問題

**7** 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ と直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+k$ ($k$ は定数) は 2 点 P，Q で交わっている。

(1) 定数 $k$ の値の範囲を求めよ。

(2) 線分 PQ の中点 R の座標を $(x,\ y)$ として，R の軌跡を $x$，$y$ に関する方程式で表し，$x$ の値の範囲を求めよ。　(神奈川大)

**8** 楕円 $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ からひいた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。　(東京工業大)

### チェック・チェック

**7** この“中点の軌跡”は頻出問題です。

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ に対して中点を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y \text{ は直線 PQ の } x=\frac{x_1+x_2}{2} \text{ における } y \text{ 座標}$$

となります。解と係数の関係を使って，式を整理しましょう。

**8** P のえがく曲線は**準円**とよばれています。これは頻出問題です。$\mathrm{P}(a,\ b)$ を通る直線の方程式を $y=m(x-a)+b$ とおいてみましょう。P を通る直線が $y$ 軸と平行なときはこれに含まれないので別扱いします。

# 解答・解説

**7** (1) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ ……①, $y=-\dfrac{1}{2}x+k$ ……②

①, ②が 2 点で交わる条件は

$$\frac{x^2}{4}+\left(-\frac{1}{2}x+k\right)^2=1 \qquad \therefore \quad x^2-2kx+2k^2-2=0$$

が異なる 2 実数解をもつことであるから，判別式を $D$ とすると

$$\frac{D}{4}=k^2-(2k^2-2)=-k^2+2>0 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}}}$$

(2) $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ とすると，中点 $\mathrm{R}(x,\ y)$ は

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2k}{2}=k & (\because\ \text{解と係数の関係}) \\ y=-\dfrac{1}{2}k+k=\dfrac{k}{2} & (\because\ ②) \end{cases}$$

よって，求める方程式は　$\underline{\boldsymbol{y=\dfrac{x}{2}}}$

また，(1) より $x$ の値の範囲は　$\underline{\boldsymbol{-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}}}$

**8** (i) 2 接線のいずれかが **$y$ 軸に平行**なとき，その接線の方程式は $x=\pm\sqrt{17}$ であり，これらに直交する接線は $y=\pm2\sqrt{2}$（複号任意）となる。

$\therefore$　$\mathrm{P}(\sqrt{17},\ 2\sqrt{2})$, $(\sqrt{17},\ -2\sqrt{2})$, $(-\sqrt{17},\ 2\sqrt{2})$, $(-\sqrt{17},\ -2\sqrt{2})$

(ii) 2 接線がともに $y$ 軸に平行でないとき，$\mathrm{P}(a,\ b)$ を通り，傾きが $m$ の直線は

$$y=m(x-a)+b$$

これと $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ を連立して

$$\frac{x^2}{17}+\frac{\{m(x-a)+b\}^2}{8}=1$$
$$8x^2+17\{mx+(b-ma)\}^2=17\cdot8$$
$$(8+17m^2)x^2+2\cdot17m(b-ma)x+17(b-ma)^2-17\cdot8=0$$

**直線と楕円が接する**のは，この $x$ の 2 次方程式が**重解**をもつときなので

$$\frac{D}{4}=17^2m^2(b-ma)^2-(8+17m^2)\{17(b-ma)^2-17\cdot8\}=0$$
$$17m^2(b-ma)^2-(8+17m^2)\{(b-ma)^2-8\}=0$$
$$-8(b-ma)^2+8(8+17m^2)=0$$

$m$ について整理して

$$(17-a^2)m^2+2abm+(8-b^2)=0 \ \cdots\cdots\ ①$$

**2 接線が直交する**ための条件は，この $m$ の 2 次方程式が異なる 2 つの実数解 $m_1$, $m_2$ をもち，$\boldsymbol{m_1m_2=-1}$ をみたすことである。よって，解と係数の関係より

$$17-a^2 \neq 0 \text{ かつ } \frac{8-b^2}{17-a^2}=-1$$
$$8-b^2=a^2-17 \quad (a \neq \pm\sqrt{17})$$

このとき，①の判別式 $D_m$ は

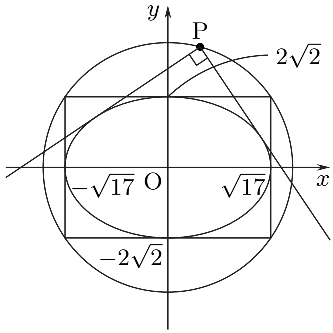
$$\frac{D_m}{4}=a^2b^2-(17-a^2)(8-b^2)$$
$$=a^2b^2+(a^2-17)^2>0$$

をみたすから，$a$，$b$ の条件は

$$a^2+b^2=25 \quad (a \neq \pm\sqrt{17})$$

以上，(i)，(ii) をまとめて，P の軌跡は

**円 $x^2+y^2=25$**



## 1.5　双曲線

### 問題

**9** 2 定点 $\mathrm{F}(a,\ a)$, $\mathrm{F}'(-a,\ -a)$ を焦点とし，F, F′ からの距離の差が $2a$ である双曲線 $C$ を考える。ただし，$a>0$ とする。

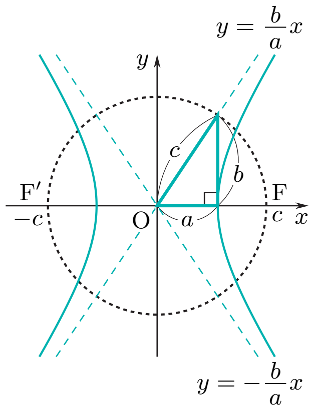
(1) 双曲線 $C$ の方程式を求めよ。

(2) 双曲線 $C$ の頂点の座標および漸近線の方程式を書け。　（鹿児島大）

**10** $xy$ 座標平面において，2 直線 $y=2(x+2)$, $y=-2(x+2)$ を漸近線とし，原点を通る双曲線の方程式は $\boxed{\phantom{xx}}$ である。また，この双曲線の 1 つの焦点を $\mathrm{F}(c,\ 0)$ $(c>0)$ とすると，$c=\boxed{\phantom{xx}}$ である。　（鹿児島大）

**11** 点 $(3,\ 0)$ を通り，円 $(x+3)^2+y^2=4$ と互いに外接する円の中心 $(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ。　（筑波大　改）

## チェック・チェック




**双曲線の定義**を確認しておきましょう。

2 定点 F，F′ があり，動点 P からの距離の差 **$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|$** が一定な点 P の軌跡を双曲線といい，F, F′ を**焦点**といいます。

F$(c,\ 0)$，F′$(-c,\ 0)$ となるように座標を定めると

$$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=2a\ (0<a<c)$$

$$\iff \left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a$$

これを整理すると

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

となります。$b^2=c^2-a^2\ (>0)$ とおくと

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}\ \textbf{（双曲線の標準形）}$$

です。$x\to\pm\infty$ のとき，$\boldsymbol{y=\pm\frac{b}{a}x}$ が**漸近線**となります。$a$，$b$，$c$ は $a^2+b^2=c^2$ をみたすので，上図の直角三角形をつくります。

**9**　双曲線 $C$ の焦点 F，F′ は直線 $y=x$ 上にあります。与えられた条件を式で表し，整理しましょう。

**10**　漸近線から双曲線の方程式をどこまで決めることができるでしょうか。さらに，原点を通るという条件を加えると双曲線が確定します。

**11**　与えられた条件から双曲線の定義がみえてきます。2 つの焦点の座標と頂点間の距離が決まれば，双曲線の方程式を求めることができます。

# 解答・解説

**9** (1) 双曲線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，$\boldsymbol{|\mathrm{PF}' - \mathrm{PF}| = 2a}$ より

$$\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2} - \sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2} = \sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2} \pm 2a$$

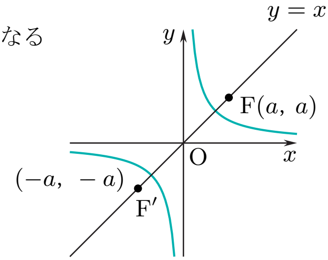
両辺を 2 乗して整理すると

$$x+y-a = \pm\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}$$

さらに上式を 2 乗して整理すると

$$\boldsymbol{xy = \frac{a^2}{2}}$$

(2) (1) で求めた双曲線と直線 $y=x$ の交点が頂点となることから




$$x^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\therefore\quad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

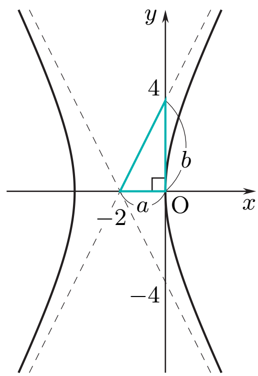
よって，頂点の座標は

$$\boldsymbol{\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)}\ \textbf{（複号同順）}$$

漸近線の方程式は

$$\boldsymbol{x=0,\ y=0}$$

**10** 漸近線 $y=2(x+2)$，$y=-2(x+2)$ の交点が $(-2,\ 0)$ なので，原点を通るのは，漸近線で分けられた 4 つの領域のうち，左右に現れる双曲線であるから，その方程式は




$$\boldsymbol{\frac{(x+2)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a>0,\ b>0)}$$

とおける。原点を通ることから

$$\frac{4}{a^2} - \frac{0}{b^2} = 1 \qquad \therefore\quad a = 2\ (>0)$$

また，漸近線の傾きが $\pm 2$ より

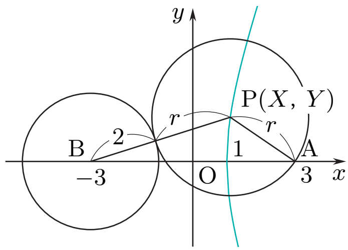
$$\pm\frac{b}{a} = \pm 2\ （複号同順） \qquad \therefore\quad b=4$$

よって，双曲線の方程式は

$$\boldsymbol{\frac{(x+2)^2}{2^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1}$$

1 つの焦点を $\mathrm{F}(c,\ 0)$ $(c>0)$ とすると

$$c = -2+\sqrt{2^2+4^2} = \boldsymbol{2\sqrt{5}-2}$$




**11** A$(3,\ 0)$ とし，円 $(x+3)^2+y^2=4$ の中心 $(-3,\ 0)$ を B，この円に外接する円の中心 $(X,\ Y)$ を P，半径を $r$ とすると，2 円は外接するから，「**中心間の距離 ＝ 半径の和**」であり

$$\mathrm{BP}=2+r \text{ かつ } \mathrm{AP}=r$$

$$\therefore\quad \mathrm{BP}-\mathrm{AP}=2$$

P の軌跡は A，B を焦点とする頂点間の距離 2 の双曲線の右枝である。この双曲線の中心は $(0,\ 0)$ なので，双曲線の方程式は $\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ とおくことができる。

$$a=(\text{中心と頂点との距離})=1$$

$$\sqrt{a^2+b^2}=(\text{中心と焦点との距離})=3 \qquad \therefore\quad b=\sqrt{3^2-a^2}=2\sqrt{2}$$

よって，求める軌跡は

**双曲線 $X^2-\dfrac{Y^2}{(2\sqrt{2})^2}=1$ の $X \geqq 1$ の部分**

## 1.6　双曲線と軌跡

### 問題

**12** 座標平面上に，双曲線 $C : x^2 - y^2 = 1$ と点 A(2 , 0) がある。直線 $l$ が点 A を通り双曲線 $C$ と相異なる 2 点で交わるように動くとき，この 2 点の中点は，あるひとつの双曲線上にあることを示せ。　（名古屋大　改）

**13** 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上に 3 点 A(1, 0)，B($-1$, 0)，P($t$, $s$) をとる。ただし，$t$，$s$ は $t > 1$，$s > 0$ の範囲を動くとする。次の問いに答えよ。

(1) 点 P($t$, $s$) と点 B($-1$, 0) を通る直線と，点 Q($t$, $-s$) と点 A(1, 0) を通る直線の交点を R($u$, $v$) とする。$u$，$v$ を $t$ で表せ。

(2) 点 R($u$, $v$) の軌跡を求めよ。　（兵庫県立大）

### チェック・チェック

**12** “ 中点の軌跡 ” は 2 点 P($x_1$, $y_1$), Q($x_2$, $y_2$) に対して中点を ($x$, $y$) とすると

$x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$，$y$ は直線 PQ の $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ における $y$ 座標

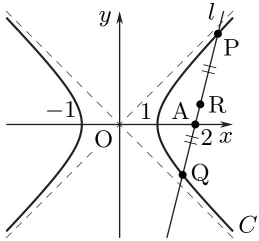
となります。あとは，解と係数の関係を使います。

**13** (1) 直線 PB の方程式と直線 QA の方程式を連立すると交点 R の条件がみえてきます。

(2) $t > 1$ の条件を忘れないようにしましょう。

# 解答・解説

**12** (i) $l$ が $x$ 軸と垂直なとき 2 交点の中点 R は A(2, 0) である。




(ii) $l$ が $x$ 軸と垂直でないとき

$$l : y = m(x-2)$$

$C$ と $l$ の式を連立し，$y$ を消去すると

$$x^2 - m^2(x-2)^2 = 1$$

$$(1-m^2)x^2 + 4m^2x - 4m^2 - 1 = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

$l$ と $C$ が相異なる 2 点で交わるならば，$1-m^2 \neq 0$ であり，このもとで①の判別式を $D$ とすると

$$\frac{D}{4} = 4m^4 - (1-m^2)(-4m^2-1) = 3m^2+1 > 0$$

より，①は異なる 2 つの実数解をもつ。この実数解を $\alpha$, $\beta$ とすると，2 交点 P, Q の中点 R($x$, $y$) は

$$\boldsymbol{x = \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-4m^2}{1-m^2} = \frac{2m^2}{m^2-1} = 2 + \frac{2}{m^2-1} \quad \cdots\cdots ②$$

$$\boldsymbol{y = m(x-2)} \quad \cdots\cdots ③$$

②より $x-2 \neq 0$ なので，③より $\quad m = \dfrac{y}{x-2}$

これを②に代入すると

$$x = 2 + \frac{2}{\left(\dfrac{y}{x-2}\right)^2 - 1} = 2 + \frac{2(x-2)^2}{y^2-(x-2)^2}$$

$$(x-2)\{y^2-(x-2)^2\} = 2(x-2)^2$$

$x \neq 2$ より

$$y^2-(x-2)^2 = 2(x-2) \qquad y^2 - x^2 + 2x = 0 \qquad \therefore \quad (x-1)^2 - y^2 = 1$$

A(2, 0) はこの双曲線上にある。よって，中点 R は双曲線 $(x-1)^2 - y^2 = 1$ 上にある。 (証終)

別解 直線 $l$ が $x$ 軸正方向となす角を $\theta$ とすれば，$l$ 上の点 ($x$, $y$) は

$$\boldsymbol{x = 2 + t\cos\theta,\ y = t\sin\theta} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表される。これらを双曲線 $C$ の方程式に代入すると

$$(2+t\cos\theta)^2 - (t\sin\theta)^2 = 1$$

$t$ について整理して

$$(\cos^2\theta - \sin^2\theta)t^2 + 4t\cos\theta + 3 = 0 \quad \cdots\cdots ④$$

$l$ と $C$ が相異なる 2 点 P, Q で交わるように動くから，④は異なる 2 つの実数解をもつ。これらを $t_1$, $t_2$ とすると解と係数の関係より

$$t_1 + t_2 = -\frac{4\cos\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} \quad \cdots\cdots ⑤$$

また，線分 PQ の中点を R($x$, $y$) とすれば，⑤より

$$x=\frac{(2+t_1\cos\theta)+(2+t_2\cos\theta)}{2}=2+\frac{(t_1+t_2)\cos\theta}{2}$$
$$=2-\frac{2\cos^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=2-\frac{1+\cos 2\theta}{\cos 2\theta}=1-\frac{1}{\cos 2\theta}$$
$$y=\frac{t_1\sin\theta+t_2\sin\theta}{2}=-\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=-\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=-\tan 2\theta$$

$1+\tan^2 2\theta=\dfrac{1}{\cos^2 2\theta}$ であるから

$$1+y^2=(x-1)^2$$

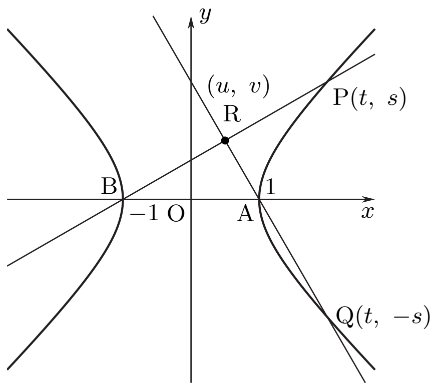
すなわち

$$(x-1)^2-y^2=1 \quad \cdots\cdots ⑥$$

これは中点 R が双曲線⑥の上にあることを示している。

**13** (1) 2 点 P，B を通る直線の方程式は

$$y=\frac{s}{1+t}(x+1) \quad \cdots\cdots ①$$




2 点 Q，A を通る直線の方程式は

$$y=\frac{s}{1-t}(x-1) \quad \cdots\cdots ②$$

①，②から $y$ を消去すると

$$\frac{s}{1+t}(x+1)=\frac{s}{1-t}(x-1)$$

$t>1$，$s>0$ より

$$(1-t)(x+1)=(1+t)(x-1)$$
$$x=\frac{1}{t}$$

これを①に代入すると

$$y=\frac{s}{t}$$

よって　$u=\dfrac{1}{t}$，$v=\dfrac{s}{t}$

また，P は双曲線 $x^2-y^2=1$ 上にあるから $t^2-s^2=1$ をみたすので，両辺 $t^2\ (\neq 0)$ で割ると

$$1-\frac{s^2}{t^2}=\frac{1}{t^2} \qquad \frac{s^2}{t^2}=1-\frac{1}{t^2} \qquad \therefore\ \frac{s}{t}=\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}$$

よって，$u$，$v$ を $t$ で表すと　$\underline{\boldsymbol{u=\dfrac{1}{t},\ v=\sqrt{1-\dfrac{1}{t^2}}}}$

(2) (1) より

$$v=\sqrt{1-u^2}$$

両辺を 2 乗して

$$v^2=1-u^2 \quad \therefore\ u^2+v^2=1 \cdots\cdots ③$$

$t>1$ より

$$0<u<1,\ 0<v<1$$

よって，③ とあわせると，点 R$(u,\ v)$ の軌跡は

<u>**円 $u^2+v^2=1$ の $u>0$，$v>0$ の部分**</u>

## 1.7 離心率

### 問題

**14** 点 A(3, 0) と直線 $x=1$ からの距離の比が次のようになっている点 P の軌跡の方程式が 2 次曲線を表すことを示し，その焦点の座標を求めよ。

(1) $1:1$

(2) $\sqrt{3}:1$ （岡山理科大）

**15** $e$ を与えられた正の定数とし，点 A の座標を (1, 0) とする。点 P の座標を $(x,\ y)$ とするとき以下の問いに答えよ。

(1) $y$ 軸から点 P までの距離と点 A から点 P までの距離の比が $1:e$ であるために $x$，$y$ が満たすべき条件を求めよ。

(2) $e=1$ のとき，(1) の条件を満たす点 P の軌跡は放物線 $x=ky^2+\ell y+m$ となる。$k$，$\ell$，$m$ の値を求めよ。

(3) $0<e<1$ のとき，(1) の条件を満たす点 P の軌跡は，楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

を平行移動させたものである。そのような $a$，$b$（どちらも正とする）を $e$ の式で表し，$x$ 方向，$y$ 方向にそれぞれどれだけ平行移動すれば点 P の軌跡になるかを答えよ。

(4) $e>1$ のとき，(1) の条件を満たす点 P の軌跡は，双曲線

$$\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{d^2}=1$$

を平行移動させたものである。そのような $c$，$d$（どちらも正とする）を $e$ の式で表し，$x$ 方向，$y$ 方向にそれぞれどれだけ平行移動すれば点 P の軌跡になるかを答えよ。

(5) (1) の条件を満たす点 P の軌跡の概形を，$e=\dfrac{1}{2}$，1，2 の 3 つの場合について同一平面上に図示せよ。 （北見工業大）

## チェック・チェック

放物線は定点（焦点）と定直線（準線）までの距離が等しい点の軌跡として定義されましたが，楕円や双曲線も同じように定義することができます。

定点 F とそれを通らない直線 $l$ があるとき，F までの距離 PF と $l$ までの距離 PH の比 $\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ が一定である点 P の軌跡は 2 次曲線（楕円，放物線，双曲線）になります。このとき，F を**焦点**，$l$ を**準線**といい，$\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=e$ を**離心率**といいます。

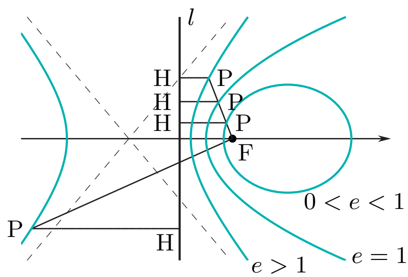
P の軌跡は

| | |
|---|---|
| $0<e<1$ のとき | 楕円 |
| $e=1$ のとき | 放物線 |
| $e>1$ のとき | 双曲線 |

となります。ここで

$$\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=e \iff \mathrm{PF}:\mathrm{PH}=e:1$$

であり，**14** では，PA : PH $=e:1$ なので，(1)，(2) の軌跡はそれぞれ放物線，双曲線となります。




**15** (1) より，$e$ が 0 に近いほど，点 P の軌跡は円に近づくことが分かります。

(2) $e=1 \iff \mathrm{AP}=\mathrm{PH}$ より，P の軌跡は A を焦点とし，$y$ 軸を準線とする放物線です。

(3) $\mathrm{F}(c,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ を焦点とし，長軸の長さを $2a$ とする楕円上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は楕円の定義から

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

であり，$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ を 2 乗して整理すると

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c}-x\right)$$

を得る。ここで，P から直線 $x=\dfrac{a^2}{c}$ に下ろした垂線の足を H とすると

$$\mathrm{PF}=\frac{c}{a}\mathrm{PH} \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=\frac{c}{a}$$

すなわち　　$(\text{離心率 } e\ )=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{(\text{焦点間の距離})}{(\text{長軸の長さ})}$

であり，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ では

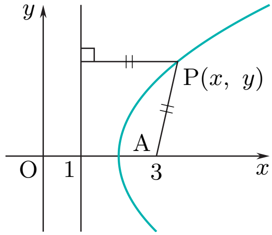
焦点 $(ae,\ 0)$ に対する準線は $x=\dfrac{a}{e}$

焦点 $(-ae,\ 0)$ に対する準線は $x=-\dfrac{a}{e}$

である。(4) の双曲線でも同じことがいえる。

# 解答・解説

**14** P$(x,\ y)$ とおくと



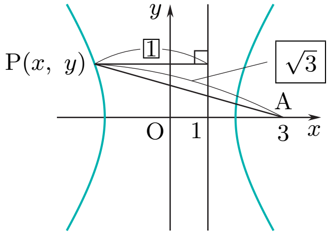

(1) $\sqrt{(x-3)^2+y^2} : |x-1| = 1 : 1$

$(x-3)^2+y^2=(x-1)^2$

$\therefore\ \ \boldsymbol{y^2=4(x-2)}$

P の軌跡は **放物線**（2 次曲線）であり，

焦点の座標は $(1+2,\ 0)=\boldsymbol{(3,\ 0)}$ である。




(2) $\sqrt{(x-3)^2+y^2} : |x-1| = \sqrt{3} : 1$

$(x-3)^2+y^2=3(x-1)^2$

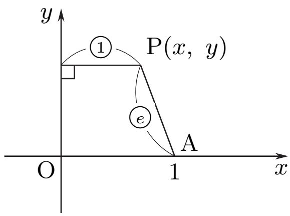
$2x^2-y^2=6$

$\therefore\ \ \boldsymbol{\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1}$

P の軌跡は **双曲線**（2 次曲線）であり，

焦点の座標は $(\pm\sqrt{3+6},\ 0)=\boldsymbol{(\pm 3,\ 0)}$ である。

**15** (1) $|x| : \sqrt{(x-1)^2+y^2}=1 : e$




$e|x|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$e^2x^2=(x-1)^2+y^2$

$\therefore\ \ \boldsymbol{(1-e^2)x^2-2x+y^2+1=0}$

(2) $e=1$ を代入して

$x=\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \ \boldsymbol{k=\dfrac{1}{2},\ \ell=0,\ m=\dfrac{1}{2}}$

(3) $0<e<1$ のとき，$1-e^2>0$ であり

$$(1-e^2)\left(x-\frac{1}{1-e^2}\right)^2+y^2=\frac{e^2}{1-e^2}$$

$$\therefore\ \ \frac{\left(x-\dfrac{1}{1-e^2}\right)^2}{\left(\dfrac{e}{1-e^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\dfrac{e}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2}=1$$

$a>0,\ b>0$ より

$\boldsymbol{a=\dfrac{e}{1-e^2},\ b=\dfrac{e}{\sqrt{1-e^2}}}$

とすれば，点 P の軌跡は楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を

$x$ 方向に $\underline{\boldsymbol{\dfrac{1}{1-e^2}}}$，$y$ 方向に $\underline{\mathbf{0}}$ だけ平行移動したもの

である。

(4) $e>1$ のとき，$e^2-1>0$ であり，(3) と同様にして

$$\frac{\left(x+\dfrac{1}{e^2-1}\right)^2}{\left(\dfrac{e}{e^2-1}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\dfrac{e}{\sqrt{e^2-1}}\right)^2}=1$$

$c>0$，$d>0$ より

$$\underline{\boldsymbol{c=\frac{e}{e^2-1},\ d=\frac{e}{\sqrt{e^2-1}}}}$$

とすれば，点 P の軌跡は双曲線 $\dfrac{x^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{d^2}=1$ を

$x$ 方向に $\underline{\boldsymbol{-\dfrac{1}{e^2-1}}}$，$y$ 方向に $\underline{\mathbf{0}}$ だけ平行移動したもの

である。

(5) (i) $e=\dfrac{1}{2}$ のとき

$0<e<1$ なので，(3) より点 P の軌跡は

楕円 $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=1$ を $x$ 方向に $\dfrac{4}{3}$，$y$ 方向に 0 だけ平行移動したもの

(ii) $e=1$ のとき

(2) より点 P の軌跡は

放物線 $x=\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{2}$

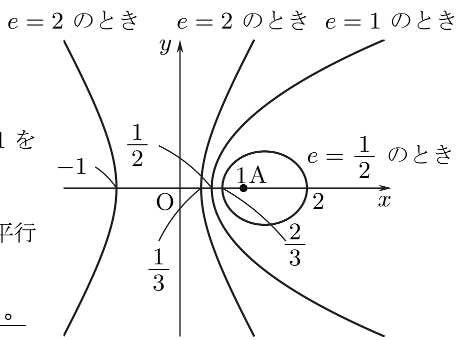
(iii) $e=2$ のとき

$e>1$ なので，(4) より点 P の軌跡は

双曲線 $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}-\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=1$ を

$x$ 方向に $-\dfrac{1}{3}$，$y$ 方向に 0 だけ平行移動したもの

これらを図示すると，$\underline{\textbf{右図のようになる。}}$



# 2　パラメータ表示と極座標

## 2.1　2 次曲線のパラメータ表示

### 問題

**16** $a$ を正の実数とする。$t$ を媒介変数として

$$x(t)=\cos 2t,\ y(t)=\sin at\ (-\pi \leqq t \leqq \pi)$$

で表される曲線 $C$ について，以下の問に答えよ。

(1) $a=1$ とする。$C$ を $x$ と $y$ の方程式で表し，その概形を $xy$ 平面上にかけ。

(2) $a=2$ とする。$C$ を $x$ と $y$ の方程式で表し，その概形を $xy$ 平面上にかけ。　（岐阜大　改）

**17** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ……① で表される曲線上の点 $(x,\ y)$ は

$$x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$$

のように媒介変数 $\theta$ を用いて表すことができる。このことを，式①の曲線と円 $x^2+y^2=a^2$ とをともに図示することで説明せよ。

（豊橋技術科学大　改）

**18** 媒介変数 $t$ で表された曲線

$$\begin{cases} x=3\left(t+\dfrac{1}{t}\right)+1 \\ y=t-\dfrac{1}{t} \end{cases}$$

は双曲線である。

(1) この双曲線の中心の座標，頂点の座標，および漸近線の方程式を求めよ。

(2) この曲線の概形を描け。　（東北学院大）

**19** 媒介変数 $t$ を用いて $x=\tan t,\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos t}$ で表される曲線上を動く点 P，$y$ 軸上の点 A$(0,\ 2)$，および，P から直線 $y=k$ に引いた垂線の足 H を考える。比 $\dfrac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PH}}$ の値が P の位置によらず一定になるような定数 $k$ がきまることを示せ。　（長崎大　改）

## チェック・チェック

**16** パラメータの $t$ を消去しただけでは，軌跡の必要条件を求めたにすぎません。（十分条件も含めて）軌跡そのものを求めるには

**実数 $t$ が存在するための $x$，$y$ の条件**

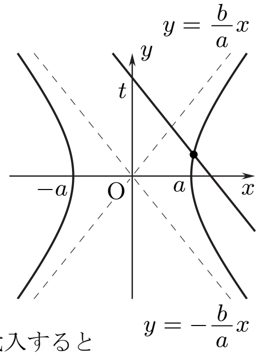
を求めることになります。

**17** 「**楕円は円をつぶしたもの**」であることを確認する問題です。こういう基本的なことを問う入試問題もあるんですね。媒介変数表示された点と $\theta$ の位置関係をしっかり理解しておきましょう。

**18** 右図のように，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と，漸近線 $y=-\dfrac{b}{a}x$ と平行な直線 $y=-\dfrac{b}{a}x+t$ との交点を求めると

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{t}{b}+\dfrac{b}{t}\right) \\ y=\dfrac{b}{2}\left(\dfrac{t}{b}-\dfrac{b}{t}\right) \end{cases}$$

です。これは双曲線のパラメータ表示の 1 つです。




**19** $\tan t=x$，$\dfrac{1}{\cos t}=\dfrac{y}{\sqrt{3}}$ を $1+\tan^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t}$ に代入すると

$$1+x^2=\frac{y^2}{3} \qquad \therefore \quad x^2-\frac{y^2}{3}=-1$$

となり，この曲線は双曲線であることが分かります。

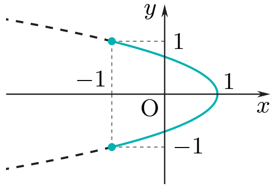
一般に，$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\theta} \\ y=b\tan\theta \end{cases}$ とするとこれは双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ のパラメータ表示となります。

本問では，「$\dfrac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PH}}$ が P の位置によらず一定」とあるので，$\dfrac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PH}}=$（一定）を $t$ の式として表してみましょう$\left(\text{このときの } \dfrac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PH}} \text{ の値は}\textbf{離心率}\text{のことです}\right)$。

## 解答・解説

**16** (1) $a=1$ のとき

$$\begin{cases} x(t)=\cos 2t=1-2\sin^2 t \\ y(t)=\sin t \end{cases}$$




であり，$-\pi \leqq t \leqq \pi$ より

$$x(t)=1-2\{y(t)\}^2,\ -1 \leqq y(t) \leqq 1$$

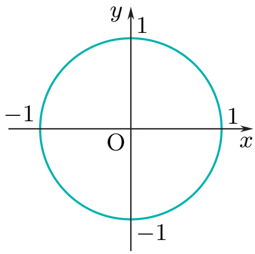
よって，$C$ の方程式は

$$\boldsymbol{x=-2y^2+1\ (-1 \leqq y \leqq 1)}$$

となり，$C$ の概形は **右上図のようになる（端点を含む）。**

(2) $a=2$ のとき

$$\begin{cases} x(t)=\cos 2t \\ y(t)=\sin 2t \end{cases}$$




であり，$-2\pi \leqq 2t \leqq 2\pi$ より

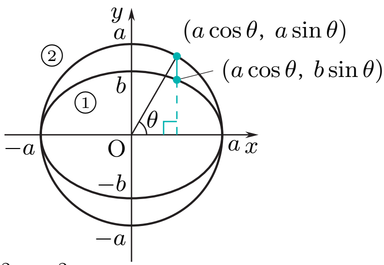
$$\{x(t)\}^2+\{y(t)\}^2=1,\ -1 \leqq x(t) \leqq 1$$

よって，$C$ の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2=1}$$

となり，$C$ の概形は **右図のようになる。**

**17** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ……①




①上の点 $(x,\ y)$ を **$y$ 軸方向に $\dfrac{a}{b}$ 倍**した点を $(X,\ Y)$ とする。

$$\begin{cases} X=x \\ Y=\dfrac{a}{b}y \end{cases} \iff \begin{cases} x=X \\ y=\dfrac{b}{a}Y \end{cases}$$

これを①に代入すると

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{1}{b^2}\left(\frac{b}{a}Y\right)^2=1 \qquad \therefore \quad X^2+Y^2=a^2$$

すなわち，$(X,\ Y)$ は円 $x^2+y^2=a^2$ ……② 上の点である。円②上の点 $(X,\ Y)$ は $\begin{cases} X=a\cos\theta \\ Y=a\sin\theta \end{cases}$ と媒介変数表示されるから

$$\begin{cases} x=X=a\cos\theta \\ y=\dfrac{b}{a}Y=b\sin\theta \end{cases}$$

と表すことができる。　　（証終）

**18** (1) 与式を変形すると

$$\begin{cases} t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{x-1}{3} \\ t-\dfrac{1}{t}=y \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} t=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-1}{3}+y\right) \\ \dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-1}{3}-y\right) \end{cases} \quad \cdots\cdots (*)$$

$(*)$ をみたす実数 $t$ が存在するための $x$，$y$ の条件は

$$1=t\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{4}\left(\frac{x-1}{3}+y\right)\left(\frac{x-1}{3}-y\right) \qquad \therefore \quad \frac{(x-1)^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$$

よって，中心の座標は　$\mathbf{(1,\ 0)}$

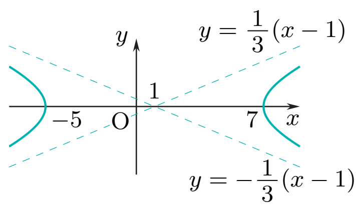
$y=0$ として $x=1\pm 6$ なので，頂点の座標は

$\mathbf{(7,\ 0),\ (-5,\ 0)}$

また，漸近線の方程式は

$\boldsymbol{y=\pm\frac{1}{3}(x-1)}$

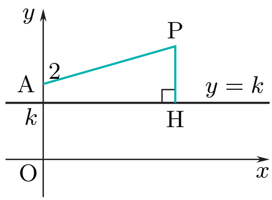
(2) 概形は 右図 のようになる。




**19** $\dfrac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PH}}=a$ ($a$ は正の定数) とおく。

$$\mathrm{PA}^2=a^2\cdot\mathrm{PH}^2$$

$$\tan^2 t+\left(\frac{\sqrt{3}}{\cos t}-2\right)^2=a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{\cos t}-k\right)^2$$




辺々に $\cos^2 t$ をかけて

$$\sin^2 t+(\sqrt{3}-2\cos t)^2=a^2(\sqrt{3}-k\cos t)^2$$

$$4-4\sqrt{3}\cos t+3\cos^2 t=a^2(3-2\sqrt{3}k\cos t+k^2\cos^2 t)$$

$$(a^2k^2-3)\cos^2 t-2\sqrt{3}(a^2k-2)\cos t+3a^2-4=0$$

これが，$-\pi\leqq t\leqq\pi$ $\left(\text{ただし, } \cos t\neq 0 \text{ より } t\neq\pm\dfrac{\pi}{2}\right)$ をみたす**すべての $t$ に対して成り立つ**ような定数 $k$ が存在することを示せばよい。

$$\begin{cases} a^2k^2-3=0 & \cdots\cdots ① \\ a^2k-2=0 & \cdots\cdots ② \\ 3a^2-4=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

③より　$a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\ (>0)$

②に代入して　$k=\dfrac{2}{a^2}=\dfrac{3}{2}$

これは①もみたす。

よって，$k=\dfrac{3}{2}$ と決めると P の位置によらず $\dfrac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PH}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (一定) である。(証終)

## 2.2　パラメータ表示

### 問題

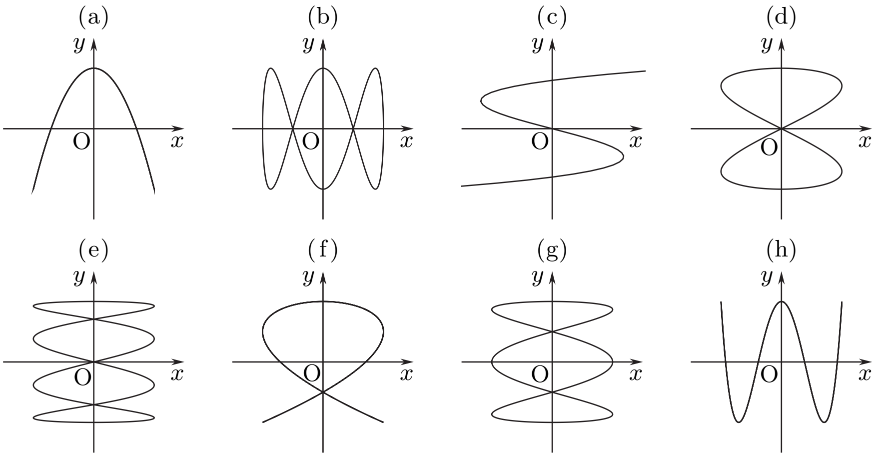
**20** 媒介変数 $t$ を用いて $x=\sin 2t,\ \ y=\sin 5t$ と表される座標平面上の曲線を $C$ とする。$C$ と $y$ 軸が交わる座標平面上の点の個数は $\boxed{\phantom{00}}$ である。

（産業医科大　改）

**21** 整数 $m,\ n$ に対して $\begin{cases} x=\sin mt \\ y=\cos nt \end{cases}$ $(0 \leqq t < 2\pi)$ で媒介変数表示される図形のグラフを $C(m,\ n)$ とする。

$C(2,\ 1)$，$C(3,\ 2)$ の概形を下の (a)〜(h) の中から選択せよ。その理由は記さなくてよい。

（千葉大　改）



## チェック・チェック

**20** グラフの概形をかかなくても，問題は解決します。求めているのは曲線 $C$ と $y$ 軸との交点の個数ですから，$x=0$ となる $t$ に対し，$y$ が何通りの値をとるかを調べます。

**21** 問題を一見するとたいへんそうですが，問題で要求されているのはグラフの概形だけですから，グラフの特徴をどのように捉えるかが大切です。微分しなくても $x$，$y$ の増減はわかります。増減表を考えましょう。$C(3,\ 2)$ になってくると変化の回数が多くなります。たとえば，$x=\sin 3t\ (0 \leqq t < 2\pi)$ の増減は

$$\sin 3t = \pm 1 \text{ すなわち } t = \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

で変わります。関数の特徴を捉えて調べる区間を小さくしましょう。

## 解答・解説

**20** $x=0$ となるときを考えればよいので

$$\sin 2t = 0$$

$$2t = k\pi \qquad \therefore \quad t = \frac{k}{2}\pi \ (k \text{ は整数})$$

このとき

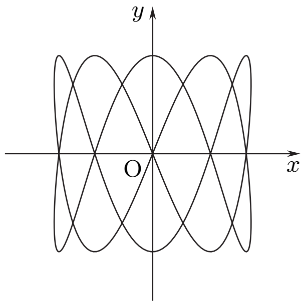
$$y = \sin 5t = \sin\frac{5k}{2}\pi = \sin\left(2k\pi + \frac{k}{2}\pi\right)$$
$$= \sin\frac{k}{2}\pi = \pm 1,\ 0$$

よって，$C$ と $y$ 軸が交わる点は

$$(0,\ 1),\ (0,\ 0),\ (0,\ -1)$$

の **3 個**

【参考】コンピュータを利用して曲線 $C$ をかくと，下図のようになる。




**21** (i) $C(2,\ 1)$ : $\begin{cases} x(t) = \sin 2t \\ y(t) = \cos t \end{cases} \quad (0 \leqq t < 2\pi)$

の増減を調べる。

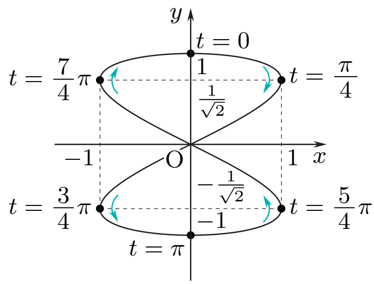
**$x$ の増減**が変わるのは，$\sin 2t = \pm 1$ より

$$t = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

**$y$ の増減**が変わるのは $\cos t = \pm 1$ より

$$t = 0,\ \pi$$

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $\cdots$ | $\frac{7}{4}\pi$ | $\cdots$ | $(2\pi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $(0)$ |
| $y$ | $1$ | $\searrow$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\nearrow$ | $(1)$ |




これより概形は右図のようになる。**(d)**

【注意】$x(2\pi-t)=\sin(4\pi-2t)$
$=-\sin 2t=-x(t)$
$y(2\pi-t)=\cos(2\pi-t)$
$=\cos t=y(t)$

これより，$C(2,\ 1)$ のグラフは **$y$ 軸に関して対称**であり，$0 \leqq t \leqq \pi$ の部分を調べればよい。

(ii) 次に

$$C(3,\ 2):\begin{cases} x(t)=\sin 3t \\ y(t)=\cos 2t \end{cases} \quad (0 \leqq t < 2\pi)$$

について調べる。

$$\begin{cases} x(2\pi-t)=\sin(6\pi-3t)=-\sin 3t=-x(t) \\ y(2\pi-t)=\cos(4\pi-2t)=\cos 2t=y(t) \end{cases}$$

これより $C(3,\ 2)$ のグラフは **$y$ 軸に関して対称**であり，$0 \leqq t \leqq \pi$ の部分を調べればよい。さらに

$$\begin{cases} x\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin\left(\frac{3}{2}\pi-3t\right)=\sin\left(\frac{3}{2}\pi+3t\right)=x\left(\frac{\pi}{2}+t\right) \\ y\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos(\pi-2t)=\cos(\pi+2t)=y\left(\frac{\pi}{2}+t\right) \end{cases}$$

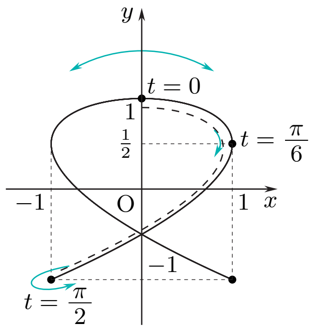
よって，$C(3,\ 2)$ の $\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$ の部分は **$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ の部分を逆もどり**したものである。

$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ において

**$x$ の増減**が変わるのは，$\sin 3t=\pm 1$ より
$t=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}$

**$y$ の増減**が変わるのは，$\cos 2t=\pm 1$ より
$t=0,\ \frac{\pi}{2}$

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ |
| $y$ | $1$ | $\searrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | $-1$ |




$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ におけるグラフは右上図の破線（これは $0 \leqq t \leqq \pi$ におけるグラフでもある）。

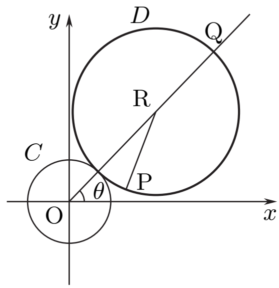
$0 \leqq t < 2\pi$ におけるグラフの概形は右上図の実線部分となる。**(f)**

## 2.3　サイクロイド，エピサイクロイド

### 問題

**22** $xy$ 平面上に中心が C，半径が 1 の円板がある。最初，中心 C が $(1,\ 1)$ の位置にあり，円板の周上に固定された点 P が $(0,\ 1)$ の位置にある。円板が $x$ 軸に接しながら，すべることなく $x$ 軸の正の方向に回転していく。円板が角 $\theta$（ただし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$）だけ回転したときの C, P の位置の座標を $\theta$ を用いて表せ。（神戸大　改）

**23** 原点 O を中心とする半径 $l$ の固定した円 $C$ に対して，半径 $r$ の円 $D$ は，円 $C$ に外接しつつ，円 $C$ の円周上をすべることなく反時計まわりに転がるものとする。はじめ，円 $D$ の中心 R は $(l+r,\ 0)$ にあり，円 $D$ の円周上に固定された点 P は $(l,\ 0)$ にあるものとして，円 $D$ の転がりにつれて点 P の軌跡が描く曲線を $S$ とする。直線 OR が $x$ 軸の正の方向となす角を $\theta$，直線 OR が円 $D$ の円周と交わる 2 点のうち O から遠いほうの交点を Q として，以下に答えよ。




(1) 点 R および点 Q の座標を $\theta$ を用いて表せ。

(2) 点 P の座標 $(x,\ y)$ を $\theta$ を用いて表せ。（九州工業大　改）

**24** 原点 O を中心とし半径 $a$ の円 $O$ と，点 C を中心とし半径 $b$（$b < a$）の円 $C$ が座標平面上にある。円 $O$ の内側を円 $C$ が内接しながら滑ることなく転がるときの円 $C$ 上の定点 P の軌跡を考える。円 $O$ 上に定点 A$(a,\ 0)$ をとる。点 P が点 A と重なるように円 $C$ を円 $O$ に内接させる。その位置から円 $C$ が回転して $\angle\mathrm{AOC} = \theta$ の位置まで移動したときの点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。ただし，角度は弧度法で考える。このとき次の各問いに答えよ。

(1) P の軌跡の方程式を $\theta$ を媒介変数として表せ。

(2) $a = 4b$ のとき，P の軌跡の方程式を $a$，$\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ。

（鹿児島大）

## チェック・チェック

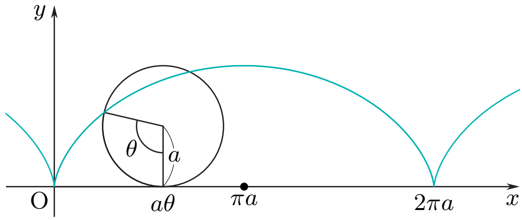
**22** 円が直線上をすべらずに回転するとき，円周上の定点がえがく軌跡を**サイクロイド**といいます。

本問では，はじめ $(1,\ 0)$ で $x$ 軸に接し，$(0,\ 1)$ にあった定点の軌跡を求めます。

一般に，原点で $x$ 軸に接する半径 $a$ の円で，はじめ原点にあった定点の軌跡の方程式は

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

となります。




**23** 本問のように円 $D$ が円 $C$ に外接しながらすべらずに転がるとき，円 $D$ の円周上の定点がえがく軌跡を**エピサイクロイド**といいます。すべらずに転がるということから，$\angle\mathrm{ORP}$ と $\theta$ の関係を 2 円の半径 $l$，$r$ を用いて表すことができます。

**24** 本問のように円 $C$ が円 $O$ に内接しながらすべらずに転がるとき，円 $C$ の円周上の定点がえがく軌跡を**ハイポサイクロイド**といいます。2 円の接点を T とおくと，すべらずに転がるということから，$\angle\mathrm{TCP}$ と $\theta$ の関係を 2 円の半径 $a$，$b$ を用いて表すことができます。

ちなみに，動円の周上でなく，円の内部または外部にとった定点のえがく軌跡をトロコイドといいます。

なお

-oid:〜のようなもの
epi-:上の（外の，外接の）
hypo-:下の（内の，内接の）

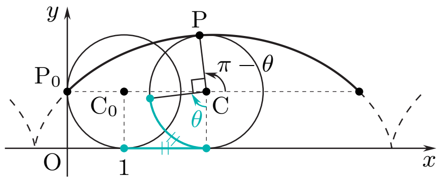
という意味があります。

## 解答・解説

**22** $C_0(1,\ 1)$，$P_0(0,\ 1)$ とする。円板は $x$ 軸に接しながらすべることなく回転するので

$$C_0C = (\text{円板の半径})\cdot\theta = 1\cdot\theta = \theta$$

よって，C の座標は　$\underline{(\boldsymbol{1+\theta},\ \boldsymbol{1})}$



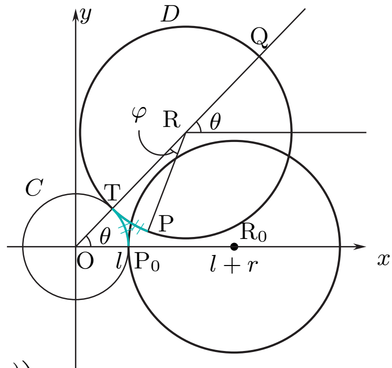

また，$\angle P_0CP = \theta$ より，$\overrightarrow{CP}$ と $x$ 軸正方向とのなす角は $\pi - \theta$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}\\ &= \begin{pmatrix}1+\theta\\ 1\end{pmatrix} + 1\times\begin{pmatrix}\cos(\pi-\theta)\\ \sin(\pi-\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\theta\\ 1\end{pmatrix} + 1\times\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1+\theta-\cos\theta\\ 1+\sin\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，P の座標は　$\underline{(\boldsymbol{1+\theta-\cos\theta},\ \boldsymbol{1+\sin\theta})}$

**23** (1) 点 $(l+r,\ 0)$ を $R_0$ とする。$OR = l+r$，$\angle R_0OR = \theta$ より R の座標は
$\underline{(\boldsymbol{(l+r)\cos\theta},\ \boldsymbol{(l+r)\sin\theta})}$

$OQ = l+2r$ より，Q の座標は
$\underline{(\boldsymbol{(l+2r)\cos\theta},\ \boldsymbol{(l+2r)\sin\theta})}$




(2) 2 円 $C$，$D$ の接点を T，点 $(l,\ 0)$ を $P_0$ とすると，円 $D$ は円 $C$ の円周上をすべることなく転がるから $\angle TRP = \varphi$ とおくと

$$\overset{\frown}{TP} = \overset{\frown}{TP_0} \iff r\varphi = l\theta$$

$$\therefore\quad \varphi = \frac{l\theta}{r}$$

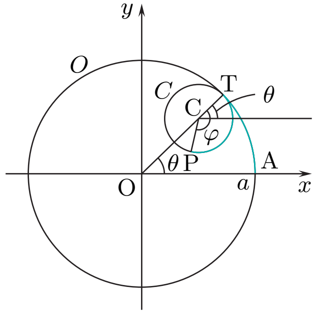
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RP}\\ &= (l+r)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}\cos(\theta+\pi+\varphi)\\ \sin(\theta+\pi+\varphi)\end{pmatrix}\\ &= (l+r)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-\cos\left(\theta+\dfrac{l\theta}{r}\right)\\ -\sin\left(\theta+\dfrac{l\theta}{r}\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，P の座標は

$$\underline{\left(\boldsymbol{(l+r)\cos\theta - r\cos\left(\frac{r+l}{r}\theta\right)},\ \boldsymbol{(l+r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{r+l}{r}\theta\right)}\right)}$$

**24** (1) 2 円 $O$，$C$ の接点を T，$\angle \mathrm{TCP} = \varphi$ とおくと，円 $C$ は円 $O$ の円周上を滑ることなく転がるから

$$\overset{\frown}{\mathrm{TP}} = \overset{\frown}{\mathrm{TA}}$$
$$b\varphi = a\theta$$
$$\therefore \quad \varphi = \frac{a\theta}{b}$$




$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (a-b)\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = b\begin{pmatrix}\cos(\theta-\varphi) \\ \sin(\theta-\varphi)\end{pmatrix}$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}$$
$$\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\cos(\theta-\varphi) \\ \sin(\theta-\varphi)\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}(a-b)\cos\theta + b\cos\left(\dfrac{b-a}{b}\theta\right) \\ (a-b)\sin\theta + b\sin\left(\dfrac{b-a}{b}\theta\right)\end{pmatrix}$$

よって，P の軌跡の方程式は

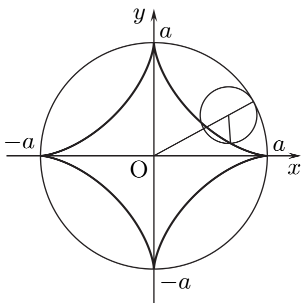
$$\boldsymbol{\begin{cases} x = (a-b)\cos\theta + b\cos\left(\dfrac{b-a}{b}\theta\right) \\ y = (a-b)\sin\theta + b\sin\left(\dfrac{b-a}{b}\theta\right) \end{cases}}$$

(2) $a = 4b$ のとき

$$x = \left(a - \frac{a}{4}\right)\cos\theta + \frac{a}{4}\cos(1-4)\theta$$
$$= \frac{a}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta) = a\cos^3\theta$$
$$y = \left(a - \frac{a}{4}\right)\sin\theta + \frac{a}{4}\sin(1-4)\theta$$
$$= \frac{a}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) = a\sin^3\theta$$

よって，P の軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}}$$




【参考】パラメータ $\theta$ を消去すると

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

この曲線はアステロイドと呼ばれている。

## 2.4　極座標と直交座標

### 問題

**25** 次の極方程式で表される曲線を直交座標 $(x,\ y)$ で表し，その概形をかけ。

$$r^2(7\cos^2\theta+9)=144$$

（奈良教育大）

**26** 極方程式 $r=\dfrac{1}{1-\cos\theta}$ を $x,\ y$ の方程式で表し，どんな図形を表すか答えよ。もし，それが 2 次曲線なら，頂点，焦点の $xy$ 座標も求めること。

（小樽商科大）

**27** 次の極方程式の表す曲線を，直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式で表し，その概形を図示せよ。

$$r=\frac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}\cos\theta}$$

（徳島大　改）

**28** 座標平面上に定点 $\mathrm{F}(-4,\ 0)$ および定直線 $l : x=-\dfrac{25}{4}$ が与えられている。

(1) 動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から $l$ へ垂線 PH を引くとき，$\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=\dfrac{4}{5}$ となるように，P が動くものとする。このとき P の軌跡の方程式を求めよ。

(2) F を極，F から $x$ 軸の正の方向に向かう半直線を始線（基線）とする極座標を考える。このとき (1) で得られた図形を極方程式で表せ。

(3) 原点 O を極，O から $x$ 軸の正の方向に向かう半直線を始線（基線）とする極座標を考える。このとき (1) で得られた図形を極方程式で表せ。

（山梨大）

## チェック・チェック

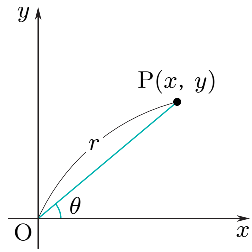
平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は原点 O からの距離 $r$ と，動径 OP の $x$ 軸正方向とのなす角 $\theta$ によって定めることもできます。

このとき，$(r,\ \theta)$ を点 P の**極座標**といい，直交座標 $(x,\ y)$ との間には

$$\boldsymbol{x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta}$$
$$\boldsymbol{r^2 = x^2 + y^2,\ \tan\theta = \frac{y}{x}}$$

の関係が成り立ちます。

曲線を極座標 $(r,\ \theta)$ の関係式で表したものを**極方程式**といいます。**25** は楕円，**26** は放物線，**??** は双曲線の極方程式になっています。




**25** $r^2 = x^2 + y^2$，$r\cos\theta = x$ を代入して，$x$，$y$ の方程式を整理します。

**26** $r^2 = x^2 + y^2$，$r\cos\theta = x$ を代入して，式を整理します。

**27** $r^2 = x^2 + y^2$，$r\cos\theta = x$ を代入します。

**28** (1) $\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ は離心率であり，離心率 $e$ が $0 < e < 1$ である P の軌跡は楕円です。(2)，(3) は極のとり方が違います。どちらの場合の方がきれいな式として表現されるでしょうか。

## 解答・解説

**25** $r^2(7\cos^2\theta+9)=144$

$7r^2\cos^2\theta+9r^2=144$

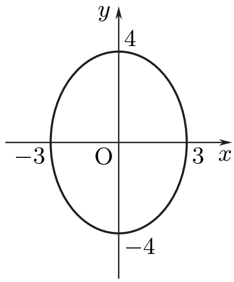
$r^2=x^2+y^2$, $r\cos\theta=x$ を代入すると

$7x^2+9(x^2+y^2)=144$

$16x^2+9y^2=144$

$$\therefore\quad \underline{\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1}$$

これは楕円であり，図示すると **右図** のようになる。




**26** $r=\dfrac{1}{1-\cos\theta}$ …… ①

$r-r\cos\theta=1$

$r=1+r\cos\theta$

両辺を 2 乗して

$r^2=(1+r\cos\theta)^2$

$r^2=x^2+y^2$, $x=r\cos\theta$ を代入すると

$x^2+y^2=(1+x)^2$

$y^2=2x+1$

よって，①を表す図形は

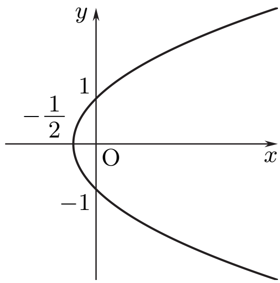
**放物線 $y^2=2x+1$**

であり，これは 2 次曲線である。また

$y^2=4\cdot\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

より

頂点の座標 $\underline{\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)}$，焦点の座標 $\underline{(0,\ 0)}$（準線は $x=-1$）



**27** $r=\dfrac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}\cos\theta}$

$2r+\sqrt{6}r\cos\theta=\sqrt{6}$

$2r=\sqrt{6}(1-r\cos\theta)$

両辺を 2 乗すると

$4r^2=6(1-r\cos\theta)^2 \qquad 2r^2=3(1-r\cos\theta)^2$

$\boldsymbol{r^2=x^2+y^2}$, $\boldsymbol{r\cos\theta=x}$ を代入して

$2(x^2+y^2)=3(1-x)^2$

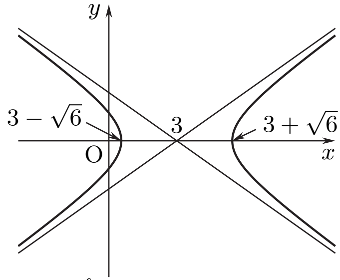
$x^2-2y^2-6x+3=0$

$(x-3)^2-2y^2=6$

よって，求める方程式は

$$\boldsymbol{\frac{(x-3)^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1}$$

であり，概形は **右上図のようになる。**



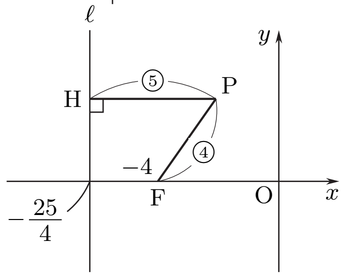

**28** (1) $5\mathrm{PF}=4\mathrm{PH}$ より

$25\mathrm{PF}^2=16\mathrm{PH}^2 \quad \cdots\cdots ①$

$25\{(x+4)^2+y^2\}=16\left(x+\dfrac{25}{4}\right)^2$

$9x^2+25y^2=225$

$$\therefore\ \boldsymbol{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1} \quad \cdots\cdots ②$$




(2) P の極座標を $\mathrm{P}(r,\ \theta)\ (r>0)$ とおくと

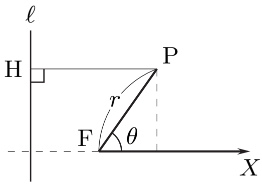
$\mathrm{PF}=r,\ \mathrm{PH}=\left|r\cos\theta+\left\{-4-\left(-\dfrac{25}{4}\right)\right\}\right|=\left|r\cos\theta+\dfrac{9}{4}\right|$

これを①に代入して

$25r^2=16\left(r\cos\theta+\dfrac{9}{4}\right)^2$

$(5r)^2-(4r\cos\theta+9)^2=0$

$\{(5+4\cos\theta)r+9\}\{(5-4\cos\theta)r-9\}=0$




$(5+4\cos\theta)r+9>0$ より

$(5-4\cos\theta)r-9=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{r=\dfrac{9}{5-4\cos\theta}}$

(3) ②に，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を代入すると

$\dfrac{r^2\cos^2\theta}{25}+\dfrac{r^2\sin^2\theta}{9}=1 \qquad \therefore\ r^2=\dfrac{225}{9\cos^2\theta+25\sin^2\theta}$

$r>0$ より $\qquad \boldsymbol{r=\dfrac{15}{\sqrt{9\cos^2\theta+25\sin^2\theta}}}$

## 2.5　極方程式

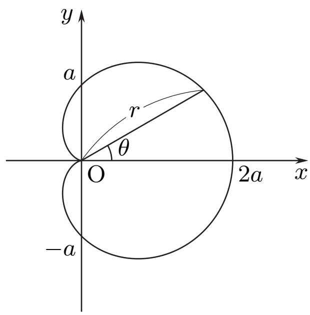
### 問題

**29** 長さ 2 の線分 OA を直径とする円の任意の接線に，O から下ろした垂線とその接線との交点を P とする。O を極，半直線 OA を始線としたときの点 P の軌跡の極方程式を求めよ。　　（同志社大）

**30** $a>0$ を定数として，極方程式

$$r=a(1+\cos\theta)$$

により表される曲線 $C_a$ を考える。




(1) 極座標が $\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ の点を中心とし半径が $\dfrac{a}{2}$ である円 $S$ を，極方程式で表せ。

(2) 点 O と曲線 $C_a$ 上の点 $\mathrm{P} \fallingdotseq \mathrm{O}$ とを結ぶ直線が円 $S$ と交わる点を Q とするとき，線分 PQ の長さは一定であることを示せ。

(3) 点 P が曲線 $C_a$ 上を動くとき，極座標が $(2a,\ 0)$ の点と P との距離の最大値を求めよ。　　（神戸大）

**31** 原点 O を中心とする半径 1 の円周 $C$ が $xy$ 平面上にある。この平面上の点 $\mathrm{P}(\mathrm{P} \fallingdotseq \mathrm{O})$ から $x$ 軸に下ろした垂線の足を Q，直線 OP と $C$ との交点のうち，P に近い方の点を R とする。

(1) 点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ として，線分 PQ, PR の長さを $r,\ \theta$ を用いて表せ。

(2) 2 線分 PQ, PR の長さが等しくなる点 P の軌跡 $D$ の極方程式を求めよ。

(3) $xy$ 座標に関する $D$ の方程式を求めよ。　　（筑波大）

## チェック・チェック

**29** O と P の距離は，O と接線との距離です。点と直線の距離の公式を利用しましょう。

図形的に解くこともできますが，$\theta = \angle \mathrm{AOP}$ としたとき，$\cos\theta \geqq 0$，$\cos\theta < 0$ の場合分けが必要となります。

**30** $C_a$ の概形が与えられているので一安心？

これはカージオイド（心臓形）とよばれています。

(2) OP が円 $S$ と交わるのは $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のときです。このとき

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{OP} - \mathrm{OQ}$$

を計算すればよいわけです。

(3) 余弦定理を使います。

**31** 図をかきながら問題を読みましょう。

(1) は (2) の誘導になっていて，(1) の結果を $\mathrm{PQ} = \mathrm{PR}$ に代入すれば，$r$ と $\theta$ についての関係式を導くことができます。

(3) $r^2 = x^2 + y^2$，$r\sin\theta = y$ を (2) の方程式に代入します。

# 解答・解説

**29** O(0, 0), A(2, 0), B(1, 0) とすると線分 OA を直径とする円の方程式は

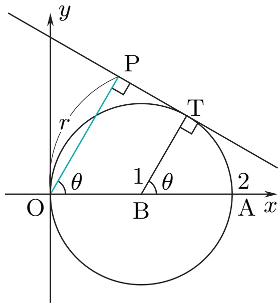
$$(x-1)^2+y^2=1$$

である。OP と $x$ 軸正方向のなす角を $\theta$，接点を T とおくと，BT と $x$ 軸正方向のなす角は $\theta$ なので，点 T の座標は

$$(1+\cos\theta,\ \sin\theta)$$

である。よって，T における接線の方程式は

$$(1+\cos\theta-1)\cdot(x-1)+\sin\theta\cdot y=1$$
$$x\cos\theta+y\sin\theta-\cos\theta-1=0$$

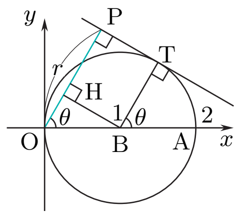



極 O と接線との距離 $r$ は

$$r=\frac{|-\cos\theta-1|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=1+\cos\theta$$

よって，求める極方程式は

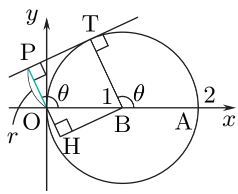
$$\underline{\boldsymbol{r=1+\cos\theta}}$$




別解 B(1, 0) から直線 OP に下ろした垂線の足を H とする。

$\cos\theta \geqq 0$ のとき

$$r=\mathrm{OP}=\mathrm{OH}+\mathrm{HP}=\cos\theta+1$$




$\cos\theta<0$ のとき

$$r=\mathrm{OP}=\mathrm{PH}-\mathrm{OH}$$
$$=1-\cos(\pi-\theta)=1+\cos\theta$$

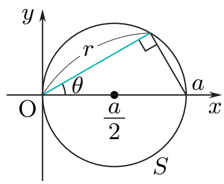
いずれのときも　　$r=1+\cos\theta$

**30** (1) 極座標 $(r,\ \theta)$ が $\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$ の点を中心に半径 $\frac{a}{2}$ の円をかくと右図のようになる。

$$r=(\text{直径})\times\cos\theta$$

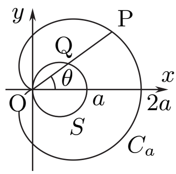
なので，求める極方程式は

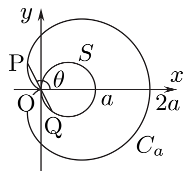
$$\underline{\boldsymbol{r=a\cos\theta}}$$




(2) $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{OP}-\mathrm{OQ}$$
$$=a(1+\cos\theta)-a\cos\theta$$
$$=a$$




$-\pi<\theta<-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき

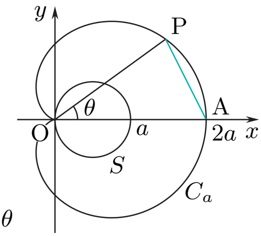
$\mathrm{OQ}=a\cos(\pi-\theta)=-a\cos\theta$ なので

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=a(1+\cos\theta)+(-a\cos\theta)=a$$

よって，$\mathrm{PQ}=a$（一定）である。　（証終）

(3) 極座標 $(r,\ \theta)$ が $(2a,\ 0)$ の点を A とおくと，$0 < \theta < \pi$ のとき余弦定理より

$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{OP}^2 + \mathrm{OA}^2 - 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OA}\cos\theta \quad \cdots\cdots\ (*)$$




$-\pi < \theta < 0$ のとき，$\angle\mathrm{AOP} = -\theta$ なので余弦定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 &= \mathrm{OP}^2 + \mathrm{OA}^2 - 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OA}\cos(-\theta)\\ &= \mathrm{OP}^2 + \mathrm{OA}^2 - 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OA}\cos\theta\end{aligned}$$

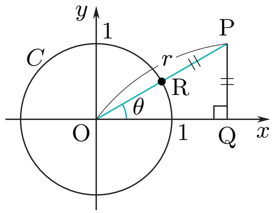
さらに，$\theta = \pm\pi$ のとき $\mathrm{P} = \mathrm{O}$，$\theta = 0$ のとき $\mathrm{P} = \mathrm{A}$ とすることで，$-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で $(*)$ が成立し

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 &= a^2(1+\cos\theta)^2 + 4a^2 - 2a(1+\cos\theta)\cdot 2a\cos\theta\\ &= a^2(5 - 2\cos\theta - 3\cos^2\theta)\\ &= a^2\left\{-3\left(\cos\theta + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}\right\}\end{aligned}$$

$a > 0$ より，AP の最大値は　$\underline{\boldsymbol{\frac{4}{\sqrt{3}}a}}$ $\left(\cos\theta = -\frac{1}{3}\text{のとき}\right)$

**31** (1) $\mathrm{PQ} = \mathrm{OP}|\sin\theta| = \underline{\boldsymbol{r|\sin\theta|}}$

$\mathrm{PR} = |\mathrm{OP} - \mathrm{OR}| = \underline{\boldsymbol{|r-1|}}$




(2)

$$\begin{aligned}&\mathrm{PQ} = \mathrm{PR}\\ &r|\sin\theta| = |r-1|\\ &r - 1 = \pm r\sin\theta\\ &(1\pm\sin\theta)r = 1 \quad \cdots\cdots\ ①\end{aligned}$$

よって，求める極方程式は

$$\underline{\begin{cases} \boldsymbol{r = \dfrac{1}{1-\sin\theta}} & \left(\boldsymbol{-\pi \leqq \theta < \pi,\ \theta \neq \dfrac{\pi}{2}}\right)\\ \boldsymbol{r = \dfrac{1}{1+\sin\theta}} & \left(\boldsymbol{-\pi \leqq \theta < \pi,\ \theta \neq -\dfrac{\pi}{2}}\right)\end{cases}}$$

(3) ①を変形すると

$r \pm r\sin\theta = 1$　　$r = 1 \pm r\sin\theta$

両辺を 2 乗して

$$r^2 = (1 \pm r\sin\theta)^2$$

$r^2 = x^2 + y^2$，$y = r\sin\theta$ を代入すると

$x^2 + y^2 = (1\pm y)^2$　　$\pm 2y = x^2 - 1$

よって，求める方程式は　$\underline{\boldsymbol{y = \pm\frac{x^2-1}{2}}}$