1　極形式

1.1　共役な複素数と絶対値

問題

33 α は $\dfrac{1}{\alpha}=a+bi$ となる複素数とする。

β が $\dfrac{1}{\beta}=b+ai$ となる複素数であるとき，$\beta=\boxed{}\,\overline{\alpha}$ と表すことができる。ただし，a，b は実数であるとする。　（立正大）

34 $\left|\dfrac{(3+i)(5-2i)}{2+i}\right|=\sqrt{\boxed{}}$ である。ただし，i は虚数単位である。

（湘南工科大）

チェック・チェック

複素数 $z=a+bi$ （a，b は実数）の絶対値 $|z|$ とは，原点 O と点 z の距離のことです。この複素数の絶対値については，次の (i)～(iii) が重要です。

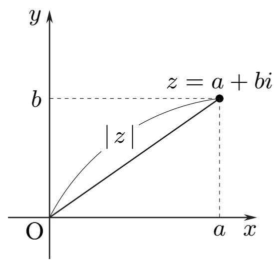
(i) $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ …… これは実数です。

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ より

(ii) $|z|^2=z\overline{z}$

また，積と商における絶対値については

(iii) $\begin{cases} |zw|=|z||w| \\ \left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|} \quad (w\neq 0)\end{cases}$



33 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ を整理しましょう。

34 絶対値の性質 (iii) より，$\left|\dfrac{z_1z_2}{z_3}\right|=\dfrac{|z_1||z_2|}{|z_3|}$ が成り立ちます。

解答・解説

33 $\dfrac{1}{\alpha}=a+bi$, $\dfrac{1}{\beta}=b+ai$ より，$\beta=\dfrac{1}{b+ai}$，$\dfrac{1}{\overline{\alpha}}=a-bi$ だから

$$\frac{\beta}{\overline{\alpha}}=\frac{a-bi}{b+ai}=\frac{(a-bi)(b-ai)}{(b+ai)(b-ai)}=\frac{ab-(a^2+b^2)i+abi^2}{b^2-(-a^2)}=-i$$

$\therefore\quad \beta=\underline{-\boldsymbol{i}\,\overline{\alpha}}$

34 $$\left|\frac{(3+i)(5-2i)}{2+i}\right|=\frac{\sqrt{3^2+1^2}\sqrt{5^2+(-2)^2}}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{\sqrt{10}\sqrt{29}}{\sqrt{5}}=\underline{\boldsymbol{\sqrt{58}}}$$

別解 分母を実数化してから絶対値を求めると

$$\frac{(3+i)(5-2i)}{2+i}=\frac{17-i}{2+i}=\frac{(17-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{33}{5}-\frac{19}{5}i$$

$$\therefore\quad \left|\frac{(3+i)(5-2i)}{2+i}\right|=\left|\frac{33}{5}-\frac{19}{5}i\right|=\sqrt{\left(\frac{33}{5}\right)^2+\left(-\frac{19}{5}\right)^2}=\sqrt{58}$$

1.2 実数条件，純虚数条件

問題

35 複素数 z が $|z-1|=1$ を満たし，かつ $z+\dfrac{1}{z}$ が実数であるならば

$$z = \boxed{},\quad \boxed{}$$

である。ただし，i は虚数単位とする。 （東京工科大）

36 $|\alpha+1|=|\alpha-1|$ をみたす複素数 $\alpha(\neq 0)$ は純虚数であることを示せ。

（公立はこだて未来大）

チェック・チェック

35 z が実数 $\iff z=\overline{z}$

36 z が純虚数 $\iff z+\overline{z}=0$ かつ $z\neq 0$

解答・解説

35 $|z-1|=1$ より，$|z-1|^2=1$ だから

$$(z-1)\overline{(z-1)}=1$$

$$(z-1)(\overline{z}-1)=1 \qquad \therefore \quad z\overline{z}-(z+\overline{z})=0 \quad \cdots\cdots ①$$

また，$z+\dfrac{1}{z}$ が実数だから

$$z+\frac{1}{z}=\overline{z+\frac{1}{z}} \qquad \therefore \quad z+\frac{1}{z}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}$$

両辺に $z\overline{z}$ をかけると

$$zz\overline{z}+\overline{z}=z\overline{z}\,\overline{z}+z$$

$$z\overline{z}(z-\overline{z})-(z-\overline{z})=0$$

$$(z\overline{z}-1)(z-\overline{z})=0 \qquad \therefore \quad z\overline{z}=1 \quad \text{または} \quad z=\overline{z}$$

(i) $z=\overline{z}$ のとき，①より

$$z^2-2z=0 \qquad \therefore \quad z=2 \quad (\because \quad z \fallingdotseq 0)$$

(ii) $z\overline{z}=1$ のとき，① より

$$1-(z+\overline{z})=0$$

$z=a+bi$ とおくと

$$1-\{(a+bi)+(a-bi)\}=0 \qquad \therefore \quad a=\frac{1}{2}$$

$z\overline{z}=1$ すなわち $|z|^2=1$ より

$$a^2+b^2=1 \qquad \frac{1}{4}+b^2=1 \qquad \therefore \quad b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって $\quad z=a+bi=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\dfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$

以上，(i)，(ii) より $\quad z=\underline{\mathbf{2}}, \quad \underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{1}\pm\sqrt{\mathbf{3}}\boldsymbol{i})}$

36 $|\alpha+1|=|\alpha-1|$ の両辺を 2 乗すると

$$|\alpha+1|^2=|\alpha-1|^2$$

$$(\alpha+1)\overline{(\alpha+1)}=(\alpha-1)\overline{(\alpha-1)}$$

$$(\alpha+1)(\overline{\alpha}+1)=(\alpha-1)(\overline{\alpha}-1)$$

$$\alpha\overline{\alpha}+\alpha+\overline{\alpha}+1=\alpha\overline{\alpha}-\alpha-\overline{\alpha}+1 \qquad \therefore \quad \alpha+\overline{\alpha}=0$$

これと $\alpha \fallingdotseq 0$ より，α は純虚数である。 （証終）

1.3 極形式

問題

37 2 つの複素数を $z=2(1+i)$，$w=4(1+\sqrt{3}i)$ とする。このとき

$|zw|=\boxed{}$，　$\arg(zw)=\boxed{}$

である。ただし $0<\arg(zw)<2\pi$ とする。（北海道工業大）

38 2 つの複素数 $z=1+i$，$w=1+\sqrt{3}i$ に対し，複素数 $\dfrac{w}{z}$ の絶対値は $\boxed{}$ であり，偏角は $\boxed{}$ である。（東邦大）

チェック・チェック

複素数平面上で，0 でない複素数 z の表す点を P とし，OP の長さを r（**絶対値**），半直線 OP と実軸の正の部分とのなす角を θ（**偏角**）とすると

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

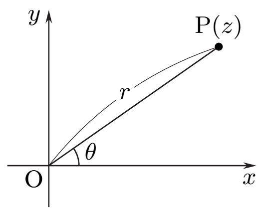
と表すことができます。このように表したものを複素数 z の**極形式**といいます。

z の偏角は $\arg z$ で表され，その 1 つを θ とすると

$$\arg z=\theta+2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

と表されます。偏角には次のような性質があります。

$$\begin{cases} \arg(zw)=\arg z+\arg w & \cdots\cdots ① \\ \arg\left(\dfrac{z}{w}\right)=\arg z-\arg w & \cdots\cdots ② \end{cases}$$



37 絶対値の性質 (iii) と偏角の性質①を使います。

38 絶対値の性質 (iii) と偏角の性質②を使います。

解答・解説

37　$z = 2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 2l\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 2l\pi\right)\right\}$　（l は整数）

$w = 8\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + 2m\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + 2m\pi\right)\right\}$　（m は整数）

よって

$$|zw| = |z||w| = 2\sqrt{2} \times 8 = \underline{\mathbf{16\sqrt{2}}}$$

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w = \left(\frac{\pi}{4} + 2l\pi\right) + \left(\frac{\pi}{3} + 2m\pi\right)$$

$$= \frac{7}{12}\pi + 2(l+m)\pi$$

$0 < \arg(zw) < 2\pi$ より　$\arg(zw) = \underline{\boldsymbol{\dfrac{7}{12}\pi}}$

38　$z = \sqrt{2}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 2l\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 2l\pi\right)\right\}$　（l は整数）

$w = 2\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + 2m\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + 2m\pi\right)\right\}$　（m は整数）

よって

$$\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \underline{\boldsymbol{\sqrt{2}}}$$

$$\arg\frac{w}{z} = \arg w - \arg z = \left(\frac{\pi}{3} + 2m\pi\right) - \left(\frac{\pi}{4} + 2l\pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{12} + 2(m-l)\pi$$

$$= \underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{12} + 2n\pi} \quad \text{（}\boldsymbol{n}\text{ は整数）}}$$

1.4　ド・モアブルの定理

問題

39 (1) 実数 θ に対し

$$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \beta = \cos\theta - i\sin\theta$$

とおく。すべての自然数 n に対して

$$\alpha^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \quad \beta^n = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

が成り立つことを示せ。ただし，i は虚数単位を表す。（東北大　改）

(2) ド・モアブルの定理に現れる式の実部，虚部を比較することによって

$$\cos 5\theta, \quad \sin 5\theta$$

のそれぞれを $\cos\theta$，$\sin\theta$ の多項式で表せ。（京都教育大　改）

40 次の複素数を $a+bi$（a，b は実数）の形に表せ。
ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする。

(1) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^4$ （神奈川大）

(2) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{-5}$ （武蔵工業大）

41 次の各問いに答えよ。ただし，$i^2=-1$ である。

(1) $1+i$，$1+\sqrt{3}i$ を極形式で表せ。

(2) (1) の結果を利用して $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$ を極形式で表せ。

(3) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{12}$ を求めよ。（九州東海大）

チェック・チェック

$(x+yi)^n$ を二項定理で展開するのは大変です。極形式に直して，ド・モアブルの定理を用います。

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad (n \text{ は整数})$$

ド・モアブルの定理

39 (1) ド・モアブルの定理を証明せよ，という問題です。

まずは，$\alpha^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ が成り立つことを示しましょう。数学的帰納法を用いるとよいでしょう。

(2) ド・モアブルの定理より

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta$$

です。左辺を二項定理を用いて展開し，右辺の実部，虚部と比較しましょう。

40 (1) ド・モアブルの定理より

$$\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n\{\cos n\theta + i\sin n\theta\}$$

が成り立ちます。

(2) $n \geqq 0$ のとき

$$\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{-n} = \frac{1}{r^n}\{\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\}$$

ですね。

41 (1)，(2) は (3) を求めるための親切な誘導です。

解答・解説

39 (1) $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ のとき，すべての自然数 n に対して

$$\alpha^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを**数学的帰納法**を用いて証明する。

(I) $n=1$ のとき，$(*)$ は明らかに成り立つ。

(II) $n=k$（k は自然数）のとき $(*)$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}\alpha^{k+1} &= \alpha^k\cdot\alpha = (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta + i(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta)\\ &= \cos(k\theta+\theta) + i\sin(k\theta+\theta)\\ &= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

よって，$(*)$ は $n=k+1$ のときも成り立つ。

(I)，(II) より，すべての自然数 n に対して $(*)$ は成り立つ。

このとき，**θ を $-\theta$ に置き換える**と

$$\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}^n = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)$$

$$\therefore\quad \beta^n = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

以上より，題意は示された。（証終）

(2) **ド・モアブルの定理**より

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta \quad \cdots\cdots ①$$

また，**二項定理**より

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^5 &= {}_5\mathrm{C}_0\cos^5\theta + {}_5\mathrm{C}_1\cos^4\theta(i\sin\theta) + {}_5\mathrm{C}_2\cos^3\theta(i\sin\theta)^2\\ &\quad + {}_5\mathrm{C}_3\cos^2\theta(i\sin\theta)^3 + {}_5\mathrm{C}_4\cos\theta(i\sin\theta)^4 + {}_5\mathrm{C}_5(i\sin\theta)^5\\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta\\ &\quad + (\sin^5\theta - 10\sin^3\theta\cos^2\theta + 5\sin\theta\cos^4\theta)i \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

①，② において，複素数の相等より

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta\\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1-\cos^2\theta)^2\\ &= \underline{\boldsymbol{16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta}}\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}\sin 5\theta &= \sin^5\theta - 10\sin^3\theta\cos^2\theta + 5\sin\theta\cos^4\theta\\ &= \underline{\boldsymbol{16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta}}\end{aligned}$$

40 (1) まず $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ を極形式で表して，次にド・モアブルの定理を用いると

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^4 &= \left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^4\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\times 4\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\times 4\right)\\ &= \cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\\ &= \underline{\boldsymbol{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}}\end{aligned}$$

(2) まず $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ を極形式で表して，次にド・モアブルの定理を用いると

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{-5} &= \left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{-5}\\ &= \cos\left\{\frac{\pi}{6}\times(-5)\right\}+i\sin\left\{\frac{\pi}{6}\times(-5)\right\}\\ &= \cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\\ &= \underline{\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}}\end{aligned}$$

41 (1) $1+i$，$1+\sqrt{3}i$ をそれぞれ極形式で表すと

$$\begin{aligned}1+i &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\\ &= \underline{\boldsymbol{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1+\sqrt{3}i &= 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ &= \underline{\boldsymbol{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}}\end{aligned}$$

(2) (1) より

$$\begin{aligned}\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} &= \frac{2}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\\ &= \underline{\boldsymbol{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果とド・モアブルの定理から

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{12} &= (\sqrt{2})^{12}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{12}\times 12\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\times 12\right)\right\}\\ &= 2^6(\cos\pi+i\sin\pi) = \underline{\boldsymbol{-64}}\end{aligned}$$

1.5　1 の n 乗根の図示

問題

42 $z^3=1$ をみたすすべての複素数 z を極形式によって表し，それらを複素数平面に図示せよ。（滋賀大）

43 複素数 z は 5 次方程式 $z^5=1$ の解で，$z \neq 1$ であるものとする。このとき，z は 4 次方程式 $\boxed{}$ を満たし，この方程式を z^2 で割ると，$w=z+\dfrac{1}{z}$ の値は 2 次方程式 $\boxed{}$ を満たす。したがって，$z+\dfrac{1}{z}$ の値は $\boxed{}$ または $\boxed{}$ と求まる。

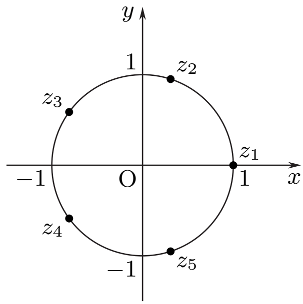
方程式 $z^5=1$ の解 z_1，z_2，$\cdots$，z_5 が複素数平面上で図の位置にあるとすると

$$z_2=\overline{z_5},\quad z_2z_5=1$$

が成り立つので

$$\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{1}{2}(z_2+z_5)=\boxed{}$$

となり，これを使うと，単位円に内接する正 5 角形の一辺の長さが $\boxed{}$ と求まる。解 z_2 の実部は $\boxed{}$，虚部は $\boxed{}$ となる。



（九州工業大）

チェック・チェック

42 3 次方程式 $z^3=1$ の解は 3 個あり，その解の求め方は，次の 2 つの方法があります。

(i) **因数分解**して，直接解く。

(ii) z^3 を**極形式**で表し，1 の絶対値 1，偏角 $2n\pi$（n は整数）と比較する。

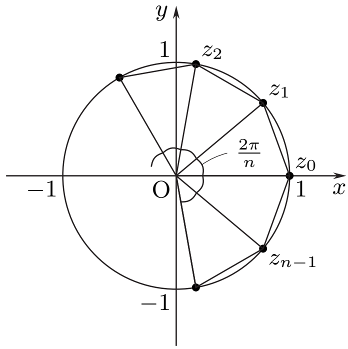
43 $\boldsymbol{z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)}$

を利用すると，z についての 4 次方程式が得られます。

一般に，$z^n=1$ をみたす複素数 z を 1 の n 乗根といい，1 の n 乗根は n 個あり

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

と表すことができます。これを複素数平面上で図示すると，z_0，z_1，z_2，…，z_{n-1} は点 1 が分点の 1 つとなるように，単位円を n 等分した n 個の点となります。

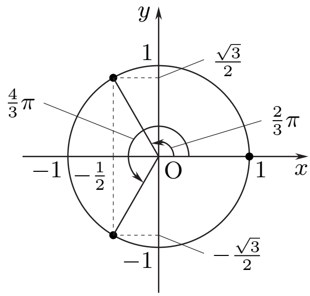


解答・解説

42 $z^3-1=0$ を解くと

$$(z-1)(z^2+z+1)=0$$

$$\therefore \quad z=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$



極形式で表すと

$$z=1=\boldsymbol{\cos 0+i\sin 0}$$

$$z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\boldsymbol{\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi}$$

$$z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\boldsymbol{\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi}$$

これらを複素数平面に図示すると **上図の黒丸** になる。

別解 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$$z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$$

また

$$1=\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi \quad (n\text{ は整数})$$

だから，$z^3=1$ のとき

$$r^3=1 \quad \text{かつ} \quad 3\theta=2n\pi \qquad \therefore \quad r=1 \quad \text{かつ} \quad \theta=\frac{2}{3}n\pi$$

$0\leqq\frac{2}{3}n\pi<2\pi$ のとき，$n=0,\ 1,\ 2$ だから，z を極形式で表すと

$$z=\cos 0+i\sin 0,\ \cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi,\ \cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$$

43 $z^5=1$ より

$$z^5-1=0$$

$$\therefore \quad (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$$

$z\neq 1$ より，z は 4 次方程式

$$\boldsymbol{z^4+z^3+z^2+z+1=0}$$

をみたす。$z=0$ は上式をみたさないから，両辺を z^2 でわると

$$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0$$

$$\therefore \quad \left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2\cdot z\cdot\frac{1}{z}+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0$$

よって，$w=z+\frac{1}{z}$ は，2 次方程式

$$\boldsymbol{w^2+w-1=0}$$

をみたす。これを解くと

$$w=z+\frac{1}{z}=\boldsymbol{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$$z^5=r^5(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)$$

また

$$1=\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi \quad (n\text{ は整数})$$

だから，$z^5=1$ のとき

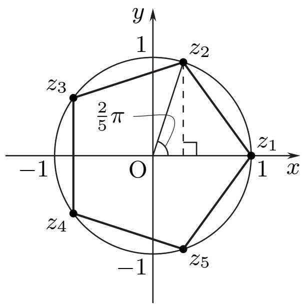
$$r^5=1 \quad \text{かつ} \quad 5\theta=2n\pi \qquad \therefore \quad r=1 \quad \text{かつ} \quad \theta=\frac{2}{5}n\pi$$

$0\leqq\dfrac{2}{5}n\pi<2\pi$ のとき，$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ である。このとき，下図のように $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_5$ をとると

$$z_k=\cos\left\{(k-1)\cdot\frac{2}{5}\pi\right\}+i\sin\left\{(k-1)\cdot\frac{2}{5}\pi\right\} \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

である。$\cos\dfrac{2}{5}\pi$ は z_2 の実部だから

$$\begin{aligned}\cos\frac{2}{5}\pi&=\frac{z_2+\overline{z_2}}{2}=\frac{1}{2}(z_2+z_5) \quad (\because \quad z_2=\overline{z_5})\\&=\frac{1}{2}\left(z_2+\frac{1}{z_2}\right) \quad (\because \quad z_2z_5=1)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \left(\because \quad ①,\ \cos\frac{2}{5}\pi>0\right)\\&=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}}\end{aligned}$$



よって，単位円に内接する正 5 角形の一辺の長さを l とすると

$$\begin{aligned}l^2&=|z_2-z_1|^2=(z_2-1)(\overline{z_2}-1)\\&=|z_2|^2-(z_2+\overline{z_2})+1\\&=1^2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad l=\underline{\boldsymbol{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}}$$

また

$$(z_2\text{ の実部})=\cos\frac{2}{5}\pi=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}}$$

$$\therefore \quad (z_2\text{ の虚部})=\sqrt{1^2-(z_2\text{ の実部})^2}=\sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}}=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}}$$

1.6 1 の n 乗根

問題

44 複素数 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ を $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ の形で表すと $r=\boxed{}$，$\theta=\boxed{}$ となる。また，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ を m 乗して 1 になるような最小の自然数 m は $\boxed{}$ である。 (近畿大)

45 $\theta=\dfrac{2}{7}\pi$，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$，$\beta=\alpha+\alpha^2+\alpha^4$ のとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overline{\alpha}=\alpha^6$ を示せ。

(2) $\beta+\overline{\beta}$，$\beta\overline{\beta}$ を求めよ。

(3) $\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 4\theta$ を求めよ。 (小樽商科大)

46 16 乗して 1 になる複素数は全部で 16 個あり，それらは

$$\cos\frac{2\pi\times k}{16}+i\sin\frac{2\pi\times k}{16}\quad(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 15)$$

と表される。このうち 16 乗して初めて 1 となる複素数の個数を n とし，それらを z_1，z_2，$\cdots$，z_n とすると

$n=\boxed{}$，

$z_1+z_2+\cdots+z_n=\boxed{}$，

$z_1z_2\cdots z_n=\boxed{}$，

$(1-z_1)(1-z_2)\cdots(1-z_n)=\boxed{}$

である。 (近畿大)

チェック・チェック

44 極形式で表された複素数 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ が m 乗して 1 になる条件は

$$\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^m=1$$

$$\therefore\quad r^m(\cos m\theta+i\sin m\theta)=\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi\quad (n\text{ は整数})$$

両辺の絶対値と偏角を比較して

$$r=1 \text{ かつ } m\theta=2n\pi$$

が成り立つことです。

45 (1) $\theta=\dfrac{2}{7}\pi$ ですから，$7\theta=2\pi$ であり

$$\alpha^7=(\cos\theta+i\sin\theta)^7=\cos 7\theta+i\sin 7\theta=1$$

$\alpha\fallingdotseq 1$ なので，α は 1 の虚数 7 乗根の 1 つです。

(2) $\alpha^7-1=(\alpha-1)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)$ を使います。

(3) $\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 4\theta$ は $\beta=\alpha+\alpha^2+\alpha^4$ の虚部です。

β の値を求めることを考えましょう。(2) がヒントになっています。

46 1 の n 乗根（$z^n=1$ の解）のうち，n 乗して初めて 1 になるものを，1 の**原始 n 乗根**といいます。

1 の n 乗根は

$$\cos\frac{2\pi\times k}{n}+i\sin\frac{2\pi\times k}{n}\quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

として n 個ありますが，このうち原始 n 乗根となるのは

k と n が互いに素

となるときです。

解答・解説

44 極形式で表すと

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\qquad\therefore\quad \underline{\boldsymbol{r=1}},\ \ \underline{\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{4}}}$$

また $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^m=1$ より

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\times m\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\times m\right)=\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi\qquad (n\text{ は整数})$$

したがって

$$\frac{\pi}{4}\times m=2n\pi\qquad\therefore\quad m=8n$$

これをみたす最小の自然数 m は $\underline{\boldsymbol{8}}$ である。

45 (1) $7\theta=2\pi$ であり，ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned}\alpha^6&=(\cos\theta+i\sin\theta)^6\\&=\cos 6\theta+i\sin 6\theta=\cos(7\theta-\theta)+i\sin(7\theta-\theta)\\&=\cos(2\pi-\theta)+i\sin(2\pi-\theta)=\cos\theta-i\sin\theta\\&=\overline{\alpha}\end{aligned}$$

（証終）

(2) $\alpha^7=\cos 7\theta+i\sin 7\theta=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1\quad\cdots\cdots①$ より

$$\alpha^7-1=0$$

$$\therefore\quad(\alpha-1)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$$

$\alpha\fallingdotseq 1$ より

$$\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0\quad\cdots\cdots②$$

また，(1) より

$$\begin{aligned}\overline{\beta}&=\overline{\alpha}+(\overline{\alpha})^2+(\overline{\alpha})^4=\alpha^6+\alpha^{12}+\alpha^{24}=\alpha^6+\alpha^7\cdot\alpha^5+(\alpha^7)^3\cdot\alpha^3\\&=\alpha^6+\alpha^5+\alpha^3\quad(\because\ ①)\end{aligned}$$

したがって，②より

$$\beta+\overline{\beta}=(\alpha+\alpha^2+\alpha^4)+(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^3)=\underline{\boldsymbol{-1}}$$

であり

$$\begin{aligned}\beta\overline{\beta}&=(\alpha+\alpha^2+\alpha^4)(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6)\\&=\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6+3\alpha^7+\alpha^8+\alpha^9+\alpha^{10}\\&=\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6+3+\alpha+\alpha^2+\alpha^3\quad(\because\ ①)\\&=3+(-1)\quad(\because\ ②)\\&=\underline{\boldsymbol{2}}\end{aligned}$$

(3) (2) より β, $\overline{\beta}$ は 2 次方程式 $x^2+x+2=0$ の解であり，これを解くと

$$\beta=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i$$

また，ド・モアブルの定理より

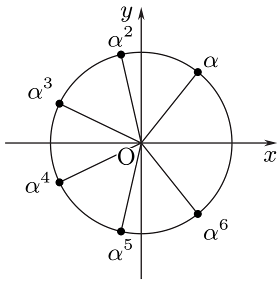
$$\begin{aligned}\beta&=\alpha+\alpha^2+\alpha^4\\&=(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos2\theta+i\sin2\theta)+(\cos4\theta+i\sin4\theta)\\&=\cos\theta+\cos2\theta+\cos4\theta+i(\sin\theta+\sin2\theta+\sin4\theta)\end{aligned}$$

β の虚部を比較して

$$\sin\theta+\sin2\theta+\sin4\theta=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\quad\cdots\cdots③$$

ところで

$$\begin{aligned}&\sin\theta+\sin2\theta+\sin4\theta\\=&\sin\theta+\sin2\theta+2\sin2\theta\cos2\theta\\=&\sin\theta+\sin2\theta(1+2\cos2\theta)\end{aligned}$$



ここで，$2\theta=\frac{4}{7}\pi$ であり，$\frac{\pi}{2}<\frac{4}{7}\pi<\frac{2}{3}\pi$ より

$$-\frac{1}{2}<\cos2\theta<0\qquad\therefore\quad0<1+2\cos2\theta<1$$

これと $\sin\theta>0$, $\sin2\theta>0$ より

$$\sin\theta+\sin2\theta+\sin4\theta>0$$

であるから，③より

$$\underline{\boldsymbol{\sin\theta+\sin2\theta+\sin4\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}}}$$

46 $\cos\frac{2\pi\times k}{16}+i\sin\frac{2\pi\times k}{16}$ のうち，**16 乗して初めて 1 になるのは，k ($0\leqq k\leqq15$) と 16 とが互いに素のとき**であり，このような k の値は

$$k=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15$$

したがって，求める複素数の個数 n は $\underline{\mathbf{8}}$ である。

また

$$z^{16}=1\qquad\therefore\quad(z^8+1)(z^8-1)=0$$

において，$z^8-1=0$ の解は 8 乗して 1 になるから，16 乗して初めて 1 となる 8 個の複素数 z_1, z_2, $\cdots$, z_8 は $z^8+1=0$ の解である。したがって

$$z^8+1=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_8)\quad\cdots\cdots①$$

が成り立つ。①の右辺を展開したときの z^7 の係数と定数項を，左辺の z^7 の係数と定数項と比較して

$$z_1+z_2+\cdots+z_8=\underline{\mathbf{0}},\qquad z_1z_2\cdots z_8=\underline{\mathbf{1}}$$

また，①の両辺に $z=1$ を代入すると

$$(1-z_1)(1-z_2)\cdots(1-z_8)=1^8+1=\underline{\mathbf{2}}$$

1.7 複素数の n 乗根

問題

47 方程式 $z^2=-i$ を解け。 （滋賀県立大）

48 $z^4=8(1+\sqrt{3}i)$ をみたす複素数 z は 4 つある。これらの 4 つの複素数を極形式で答えよ。 （琉球大 改）

49 方程式 $X^6-\sqrt{2}X^3+1=0$ の複素数解を求めよ。 （信州大）

チェック・チェック

47，**48** $z^n=p+qi$（p，q は実数）をみたす z を求めるには，$n=2$ ぐらいなら $z=x+yi$（x，y は実数）とおき，両辺の実部，虚部を比較することもできますが，n が大きな数になっていくと大変です。このときは，両辺を極形式で表し，両辺の絶対値，偏角を比較します。

47 x，y を実数として，$(x+yi)^2=-i$ の**実部・虚部を比較する解法**と，**極形式を利用する解法**の 2 つがあります。

48 $z^n=p+qi$（p，q は実数）をみたす z を求めるには，**47** のように $n=2$ ぐらいなら $z=x+yi$（x，y は実数）とおき，両辺の実部，虚部を比較することもできますが，n が大きな数になっていくと大変です。このときは，両辺を極形式で表し，両辺の絶対値，偏角を比較します。

49 $X^3=t$ とおけば，与式は t についての 2 次方程式に帰着されます。これを解くと，$X^3=$（複素数）となりますから，上の 2 題と同じタイプの方程式になりますね。

解答・解説

47 $z=x+yi$（x，y は実数）とおくと

$$z^2=-i \qquad \therefore \quad (x^2-y^2)+2xyi=-i$$

複素数の相等より

$$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2xy=-1 \end{cases} \qquad \therefore \quad x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y=\mp\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{（複号同順）}$$

よって

$$\underline{\boldsymbol{z=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}}$$

別解 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)(r>0)$ とおくと，$z^2=-i$ より

$$r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

したがって，m を整数とすると

$$\begin{cases} r^2=1 \\ 2\theta=-\dfrac{\pi}{2}+2m\pi \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} r=1 \\ \theta=-\dfrac{\pi}{4}+m\pi \end{cases}$$

$-\pi \leqq \theta < \pi$ で考えると $\theta=-\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$ だから

$$z=\begin{cases} \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ \cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

48 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，$z^4=8(1+\sqrt{3}i)$ より

$$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=16\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

したがって，n を整数とすると

$$\begin{cases} r^4=16 \\ 4\theta=\dfrac{\pi}{3}+2n\pi \end{cases}$$

$$\therefore \quad r=2, \quad \theta=\frac{\pi}{12},\ \frac{7}{12}\pi,\ \frac{13}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi \quad (\because \quad n=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

よって，求める複素数 z は

$$z=\underline{\boldsymbol{2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)}},\quad \underline{\boldsymbol{2\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)}},$$

$$\underline{\boldsymbol{2\left(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi\right)}},\quad \underline{\boldsymbol{2\left(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi\right)}}$$

49 $X^3=t$ とおくと，与えられた方程式は

$$t^2-\sqrt{2}t+1=0 \qquad \therefore\quad t=X^3=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2} \quad \text{(以下，複号同順)}$$

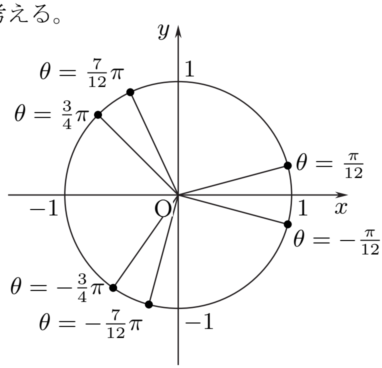
$X=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(r>0,\ -\pi\leqq\theta<\pi)$ とおくと

$$X^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$$

したがって，m を整数とすると

$$\begin{cases} r^3=1 \\ 3\theta=\pm\dfrac{\pi}{4}+2m\pi \end{cases} \qquad \therefore \qquad \begin{cases} r=1 \\ \theta=\pm\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2}{3}m\pi \end{cases}$$

$-\pi\leqq\theta<\pi$ より $\theta=\pm\dfrac{\pi}{12},\ \pm\dfrac{7}{12}\pi,\ \pm\dfrac{3}{4}\pi$ を考える。



ところで

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12}&=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\\&=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

同様に

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

よって，求める複素数解 X は

$$X=\cos\left(\pm\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}\pm i\sin\frac{\pi}{12}$$

$$=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i}}$$

$$X=\cos\left(\pm\frac{7}{12}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{7}{12}\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\pm i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=-\sin\frac{\pi}{12}\pm i\cos\frac{\pi}{12}$$

$$=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i}}$$

$$X=\cos\left(\pm\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{3}{4}\pi\right)=\cos\frac{3}{4}\pi\pm i\sin\frac{3}{4}\pi$$

$$=\underline{\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i}}$$

2 複素数平面

2.1 原点のまわりの回転

問題

50 複素数平面上の点 $1+i$ を原点のまわりに時計の針と反対向きに $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転させた点は $\boxed{}$ である。 （神奈川大）

51 複素数平面上の点 $z_0 = -\sqrt{3}+i$ を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を z_1 とし，さらに，z_1 を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点を z_2 とする。このとき，$z_1 = \boxed{}$，$z_2 = \boxed{}$ となる。また，複素数 $z_2 - z_1$ の絶対値は $\boxed{}$ である。 （神奈川工科大　改）

52 複素数平面上で 3 点 0，$1+i$，z が正三角形の頂点となるように，複素数 z を定めよ。 （武蔵工業大）

チェック・チェック

50, **51** 点 z を原点のまわりに θ だけ回転した点を w とすると

$$z = r(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$$

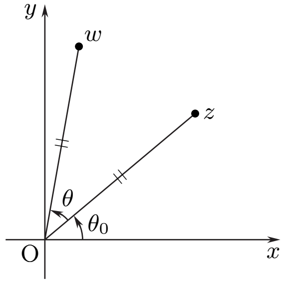
のとき

$$\begin{aligned} w &= r\{\cos(\theta_0+\theta) + i\sin(\theta_0+\theta)\} \\ &= r(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \therefore\quad w &= z(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}$$

となります。すなわち，原点のまわりに θ だけ回転するということは

$\cos\theta + i\sin\theta$ をかける

ということです。



50 点 z を原点のまわりに θ だけ回転した点を w とすると

$$z = r(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$$

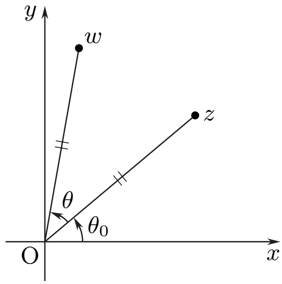
のとき

$$\begin{aligned} w &= r\{\cos(\theta_0+\theta) + i\sin(\theta_0+\theta)\} \\ &= r(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \therefore\quad w &= z(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}$$

となります。すなわち，**原点のまわりに θ だけ回転**するということは

$\cos\theta + i\sin\theta$ をかける

ということです。



51 $z_1 = z_0\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$，$z_2 = z_1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ です。

52 正三角形は $\pm\frac{\pi}{3}$ の回転を考えましょう。

解答・解説

50 求める複素数は

$$(1+i)\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=(1+i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$
$$=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i}}$$

51 z_0，z_1 を次々に回転させると

$$z_1=z_0\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=(-\sqrt{3}+i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=\underline{\boldsymbol{-\sqrt{3}-i}}$$
$$z_2=z_1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=(-\sqrt{3}-i)i$$
$$=\underline{\boldsymbol{1-\sqrt{3}i}}$$

また

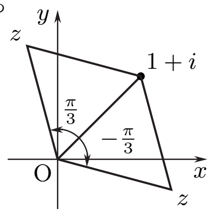
$$z_2-z_1=(1-\sqrt{3}i)-(-\sqrt{3}-i)$$
$$=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$$

より

$$|\,z_2-z_1\,|=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2}$$
$$=\underline{\boldsymbol{2\sqrt{2}}}$$

52 点 $1+i$ を原点のまわりに $\pm\frac{\pi}{3}$ 回転させた点が z だから

$$z=(1+i)\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$
$$=(1+i)\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=\underline{\boldsymbol{\frac{1\mp\sqrt{3}}{2}+\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}i}}\quad\textbf{（複号同順）}$$



2.2　$(\gamma-\alpha)/(\beta-\alpha)$

問題

53 A，B，C は複素数平面上の三角形の頂点で，それぞれ複素数 α，β，γ を表すとする。この 3 数が関係式

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\sqrt{3}-i$$

をみたすとき，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\boxed{}$，$\angle\mathrm{BAC}=\boxed{}$ である。

（大阪電気通信大）

54 複素数平面において，$\sqrt{3}+i$，$4\sqrt{3}+2i$ の表す点をそれぞれ P，Q とする。このとき，点 Q を点 P のまわりに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転した点 Q$'$ の表す複素数は $\boxed{}$ である。また，$2\sqrt{3}-i$ の表す点を R とするとき，$\angle\mathrm{QPR}$ の大きさは $\boxed{}$ である。

（福岡大）

55 複素数平面上の三角形の頂点を，A(α)，B(β)，C(γ) とする。これらが

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)^2$$

をみたすとき，次の各問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の絶対値を r，偏角を θ とおく。このとき，r および θ を求めよ。
　ただし，$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ とする。

(2) $\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}$ の値を求めよ。

（東京農工大）

チェック・チェック

53 α，β，γ が表す点をそれぞれ A，B，C とすると

$$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right| = \frac{|\gamma-\alpha|}{|\beta-\alpha|} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$$

$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \arg(\gamma-\alpha) - \arg(\beta-\alpha) = \angle\mathrm{BAC}$$

ですから，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の絶対値，偏角をみて $\triangle$ABC の形状を知ることができます。

54

55 (2) (1) より $\triangle$ABC の形状をとらえ，長さの比 $\dfrac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CA}}$ と $\angle$ACB を求めましょう。

解答・解説

53 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\sqrt{3}-i=2\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$ より

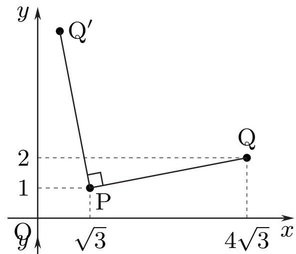
$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\left|\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\right|=\underline{\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}}$，　$\angle\mathrm{BAC}=\underline{\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}}$

54 点 P，Q，Q′ の表す複素数をそれぞれ p，q，q' とする。このとき

$$\frac{q'-p}{q-p}=i$$

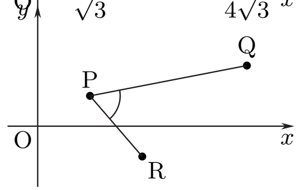
より

$$\begin{aligned}q'&=p+(q-p)i\\&=\sqrt{3}+i+(3\sqrt{3}+i)i\\&=\underline{\boldsymbol{\sqrt{3}-1+(3\sqrt{3}+1)i}}\end{aligned}$$



また，点 R の表す複素数を r とすると

$$\begin{aligned}\frac{q-p}{r-p}&=\frac{3\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-2i}\\&=\frac{(3\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+2i)}{(\sqrt{3}-2i)(\sqrt{3}+2i)}\\&=\frac{7+7\sqrt{3}i}{3+4}=1+\sqrt{3}i\\&=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$



よって

$$\angle\mathrm{QPR}=\arg\frac{q-p}{r-p}=\underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}}$$

55 (1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+i)^2=\dfrac{1}{2}\left\{2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}^2$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

であるから

$$r=\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\underline{\mathbf{2}},\quad \theta=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}}$$

(2) (1) より，三角形 ABC は右図のような

$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$ の直角三角形であるから

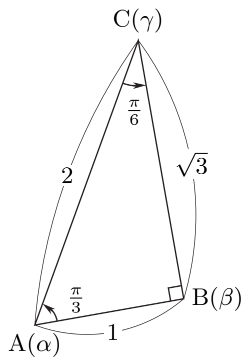
$$\arg\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=\frac{\pi}{6},\quad \left|\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$=\underline{\boldsymbol{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i}}$$



2.3　原点以外の点のまわりの回転

問題

56 複素数 $4+2i$ を $2+i$ のまわりに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転して得られる複素数は，$\boxed{}$ である。（明治大）

57 (1) α，β は $\alpha \neq \beta$ をみたす複素数とし，θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。複素数平面上で，点 α を点 β のまわりに θ 回転した点を表す複素数を γ とする。γ を α と β と θ を用いて表せ。

(2) $\alpha = i$（i は虚数単位）とする。点 α を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点を表す複素数を β とする。点 α を点 β のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転した点を表す複素数を γ とする。γ の実部と虚部を求めよ。（奈良女子大）

チェック・チェック

56 $\dfrac{\pi}{2}$ 回転は

$$\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \quad すなわち \quad i$$

との積を考えます。

57 (1) これは説明できるようにしておきましょう。全体を $-\beta$ だけ平行移動することで，原点まわりの回転として考えます。

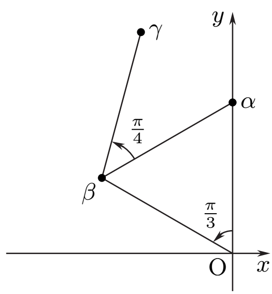
(2) 点 α を原点のまわりに θ 回転した点 β は

$$\beta = \alpha(\cos\theta + i\sin\theta)$$

です。また，点 α を点 β のまわりに θ 回転した点 γ は，(1) の結果から

$$\boldsymbol{\gamma = \beta + (\alpha - \beta)(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

ですね。

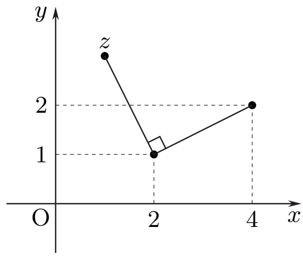


解答・解説

56 $4+2i$ を $2+i$ のまわりに $\frac{\pi}{2}$ 回転して得られる複素数を z とおくと

$$z-(2+i)=\{(4+2i)-(2+i)\}i$$

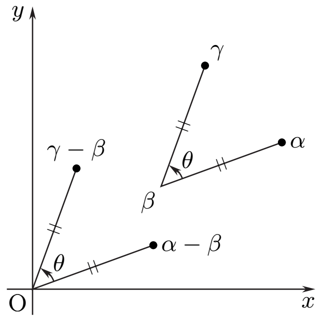
$$\therefore\quad z=2+i+(2+i)i=\underline{\mathbf{1+3}\boldsymbol{i}}$$



57 (1) 3 点 α, β, γ を $-\beta$ だけ平行移動すると，点 $\gamma-\beta$ は点 $\alpha-\beta$ を原点のまわりに θ だけ回転した点であるから

$$\gamma-\beta=(\alpha-\beta)(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{\gamma=\beta+(\alpha-\beta)(\cos\theta+i\sin\theta)}}$$



(2) β は α を原点のまわりに $\frac{\pi}{3}$ 回転した点を表す複素数だから

$$\beta=\alpha\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=i\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

よって，(1) の結果より

$$\gamma=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)+\left\{i-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right\}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+i)(1+i)$$

$$=\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}+\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i$$

であるから

$$\underline{(\gamma \text{ の実部})=\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}}$$

$$\underline{(\gamma \text{ の虚部})=\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

2.4 三角形

問題

58 A$(1+i)$，B$(3+5i)$，C(γ) が複素数平面上の正三角形の 3 頂点で，C が第 2 象限の点であるとき，γ を求めよ。 （広島大）

59 (1) $z^3=-8$ をみたす複素数 z を求めよ。

(2) α，β は $\beta^3+8\alpha^3=0$ $(\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0)$ をみたす複素数とする。角 $\theta=\arg\beta-\arg\alpha$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ および，$|\beta|:|\alpha|$ を求めよ。

(3) O を原点とする複素数平面上において，複素数 α，β を表す点をそれぞれ A，B とする。O，A，B を頂点とする三角形ができるとき，その三角形はどのような三角形か。 （九州工業大）

60 複素数平面上で，複素数 α，β，γ を表す点をそれぞれ A，B，C とする。次の問いに答えよ。

(1) A，B，C が正三角形の 3 頂点であるとき

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

が成立することを示せ。

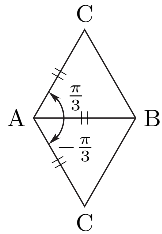
(2) 逆に，この関係式 $(*)$ が成立するとき，A = B = C となるか，または，A，B，C が正三角形の 3 頂点となることを示せ。 （金沢大）

チェック・チェック

58 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) が正三角形である条件は

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}\quad\text{かつ}\quad\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$$

ですから，γ は β を α のまわりに $\pm\frac{\pi}{3}$ 回転することにより得られます。本問では，C(γ) が第 2 象限の点となるように回転の向きを決めます。



59 $\theta=\arg\beta-\arg\alpha=\arg\frac{\beta}{\alpha}$，$\frac{|\beta|}{|\alpha|}$ はそれぞれ $\frac{\beta}{\alpha}$ の偏角，絶対値です。

60 (1) 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) が**正三角形**である

$$\iff \mathrm{AB}=\mathrm{AC}\ \text{かつ}\ \angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$$

$$\iff \left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=1\quad\text{かつ}\ \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\frac{\pi}{3}$$

$$\iff \boldsymbol{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)}$$

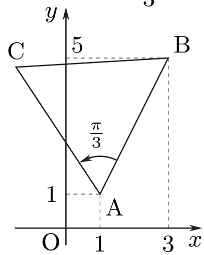
$$\iff \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ここから先は，$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$ として式を整理してもよいですが，$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を **$\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ を解とする 2 次方程式の解**ととらえるとよいでしょう。

(2) (1) の逆をたどることを考えましょう。

解答・解説

58 $C(\gamma)$ は第 2 象限の点であるから，C は点 $A(\alpha)$ のまわりに点 $B(\beta)$ を $\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点である。したがって，複素数 γ は



$$\begin{aligned}\gamma &= \alpha + (\beta - \alpha)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\ &= (1+i) + (2+4i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ &= 1 + i + \{1 - 2\sqrt{3} + (2+\sqrt{3})i\}\\ &= \underline{\mathbf{2 - 2\sqrt{3} + (3+\sqrt{3})}\boldsymbol{i}}\end{aligned}$$

59 (1) $z^3 = -8$ より

$$z^3 + 8 = 0$$

$$(z+2)(z^2 - 2z + 4) = 0$$

$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{z} = \mathbf{-2,\quad 1 \pm \sqrt{3}}\boldsymbol{i}}$$

(2) $\beta^3 + 8\alpha^3 = 0$ の両辺を $\alpha^3\ (\neq 0)$ でわると

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 + 8 = 0$$

よって，(1) より

$$\frac{\beta}{\alpha} = -2 \text{ または } 1 \pm \sqrt{3}i$$

(i) $\dfrac{\beta}{\alpha} = -2$ のとき

$$\frac{\beta}{\alpha} = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$$

したがって

$$\theta = \arg\beta - \arg\alpha = \arg\frac{\beta}{\alpha} = \pi$$

また

$$\frac{|\beta|}{|\alpha|} = 2 \qquad \therefore \quad |\beta| : |\alpha| = 2 : 1$$

(ii) $\dfrac{\beta}{\alpha} = 1 \pm \sqrt{3}i$ のとき

$$\frac{\beta}{\alpha} = 2\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\} \quad \text{(複号同順)}$$

したがって

$$\theta = \arg\beta - \arg\alpha = \arg\frac{\beta}{\alpha} = \pm\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi \quad (\because\quad 0 \leqq \theta < 2\pi)$$

また

$$\frac{|\beta|}{|\alpha|} = 2 \qquad \therefore\quad |\beta| : |\alpha| = 2 : 1$$

(i)，(ii) より

$$\underline{\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3},\ \ \pi,\ \ \frac{5}{3}\pi}}$$

また，いずれのときも

$$\underline{\boldsymbol{|\beta| : |\alpha| = 2 : 1}}$$

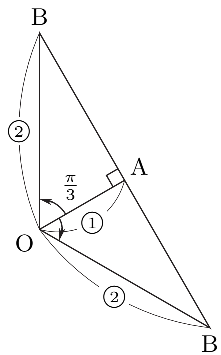
(3) $\theta = \pi$ のときは，3 点 O，A，B が同一直線上にあるので題意をみたさない。

したがって，3 点 O，A，B を頂点とする三角形ができるのは，(2) の (ii) より

$$\frac{\beta}{\alpha} = 2\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

(複号同順)

のときであり，右図のようになる。これは



$\underline{\angle\mathrm{A} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\textbf{，OB : OA = 2 : 1 の}}$

<u>直角三角形</u>

である。

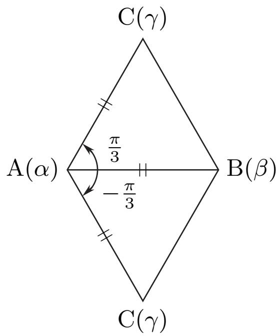
60 (1) $\triangle$ABC が**正三角形**である ……①

$\iff$ AB = AC かつ $\angle \mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$

$\iff \left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right| = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = 1$

かつ $\arg \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \pm\dfrac{\pi}{3}$

$\iff \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \cos\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)$



ここで

$$\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

をそれぞれ ω, $\overline{\omega}$ とおくと

$$\omega + \overline{\omega} = 1, \quad \omega\overline{\omega} = 1$$

よって，2 次方程式の解と係数の関係より，ω, $\overline{\omega}$ すなわち $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は

$z^2 - z + 1 = 0$ の解である。

$$① \iff \left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) + 1 = 0 \quad \cdots\cdots②$$

両辺に $(\beta-\alpha)^2$ をかけると

$$(\gamma-\alpha)^2 - (\gamma-\alpha)(\beta-\alpha) + (\beta-\alpha)^2 = 0 \quad \cdots\cdots③$$

$$\iff \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0 \quad \cdots\cdots(*)$$

すなわち

$$① \iff ② \Longrightarrow ③ \iff (*)$$

したがって，①が成立するとき，$(*)$ は成立する。 （証終）

(2) (1) より

$$(*) \iff (\gamma-\alpha)^2 - (\gamma-\alpha)(\beta-\alpha) + (\beta-\alpha)^2 = 0 \cdots\cdots③$$

(i) $\beta - \alpha = 0$ のとき，③は

$$(\gamma-\alpha)^2 = 0 \qquad \therefore \quad \gamma = \alpha$$

よって，$\alpha = \beta = \gamma$ であり，A = B = C である。

(ii) $\beta - \alpha \neq 0$ のとき，③の両辺を $(\beta-\alpha)^2$ $(\neq 0)$ でわると

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) + 1 = 0$$

これは②と一致するから

$$(*) \iff ③ \Longrightarrow ② \iff ①$$

したがって，$(*)$ が成立するとき①は成立する。

よって，$(*)$ が成立するとき

A = B = C または $\triangle$ABC は正三角形である。 （証終）

2.5 四角形

問題

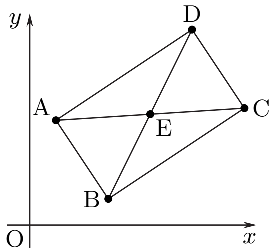
61 複素数平面上で，0 でない複素数 α, β を表す点をそれぞれ A，B とし，原点を O とする。α, β が等式 $\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2=0$ をみたすとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ の値，$\arg\alpha-\arg\beta$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) さらに，点 C を四角形 OACB が平行四辺形になるように定める。
$\beta=1+3i$ であるとき，頂点 C を表す複素数を求めよ。 （星薬科大）

62 複素数平面上に図のような長方形があり，点 A を表す複素数が $\sqrt{3}+4\sqrt{3}i$，点 B を表す複素数が $3\sqrt{3}+\sqrt{3}i$ であり，$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=1:\sqrt{3}$ であるとする。このとき，点 C を表す複素数は $\boxed{}$ である。

また，線分 AC と線分 BD の交点を E とすると，E を表す複素数は $\boxed{}$ である。



チェック・チェック

61 (1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ により，3 点 O，A，B の位置関係，すなわち

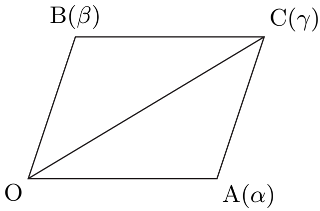
$\quad$ OA : OB と ∠BOA

が決まります。

(2) 四角形 OACB が平行四辺形である条件は

$$\gamma = \alpha + \beta$$

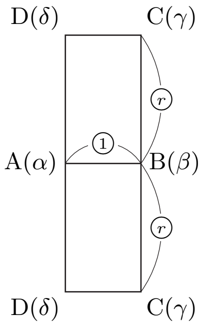
です。



62 四角形 ABCD が AB : BC = 1 : r の長方形である条件は，A を B のまわりに $\pm\frac{\pi}{2}$ 回転し，B を中心に r 倍した点が C であるということであり，これは

$$\gamma - \beta$$
$$= r\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right\}(\alpha - \beta)$$

をみたすことです。本問では ABCD が反時計方向にまわっているので，$-\frac{\pi}{2}$ 回転することになります。



解答・解説

61 (1) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 = 0$
両辺を β^2 $(\neq 0)$ でわると

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 2\cdot\frac{\alpha}{\beta} + 2 = 0$$

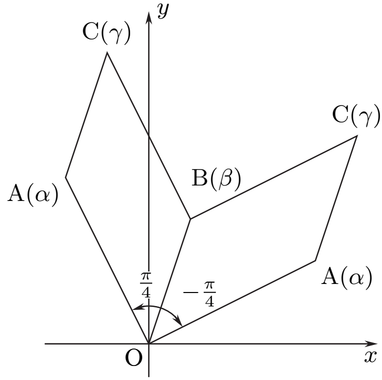
$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} = 1 \pm i}}$$

さらに

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{2}\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$\arg\alpha - \arg\beta = \arg\dfrac{\alpha}{\beta}$ より

$$\underline{\boldsymbol{\arg\alpha - \arg\beta = \pm\frac{\pi}{4}}}$$



(2) $\alpha = (1 \pm i)\beta = (1 \pm i)(1 + 3i) = -2 + 4i,\ 4 + 2i$
平行四辺形 OACB の頂点 C(γ) は

$$\gamma = \beta + \alpha$$

で求められるので

$$(1+3i) + (-2+4i) = -1 + 7i, \quad (1+3i) + (4+2i) = 5 + 5i$$

すなわち $\underline{\boldsymbol{\gamma = -1 + 7i,\ \ 5 + 5i}}$

62 頂点 A，B，C を表す複素数をそれぞれ α，β，γ とすると，C は点 A を点 B のまわりに $-\dfrac{\pi}{2}$ 回転して，さらに B を中心に $\sqrt{3}$ 倍した点であるから

$$\begin{aligned}\gamma &= \beta + \sqrt{3}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}(\alpha - \beta)\\ &= (3\sqrt{3} + \sqrt{3}i) - \sqrt{3}i(-2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}i)\\ &= \underline{\boldsymbol{9 + 3\sqrt{3} + (6 + \sqrt{3})i}}\end{aligned}$$

また，E は線分 AC の中点だから，E を表す複素数は

$$\begin{aligned}\frac{\alpha + \gamma}{2} &= \frac{(\sqrt{3} + 4\sqrt{3}i) + \{9 + 3\sqrt{3} + (6 + \sqrt{3})i\}}{2}\\ &= \underline{\boldsymbol{\frac{9 + 4\sqrt{3}}{2} + \frac{6 + 5\sqrt{3}}{2}i}}\end{aligned}$$

2.6　共線条件，垂直条件

問題

63 (1) 複素数平面上の異なる 3 点 α，β，γ が同一直線上にあるための必要十分条件は $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数であることを示せ。

(2) 3 個の複素数 -1，iz，z^2 の表す点が同一直線上にあるための条件を求めよ。（津田塾大　改）

64 複素数平面上で複素数 z，z^2，z^3 を表す点をそれぞれ A，B，C とし，これらはすべて異なるとする。

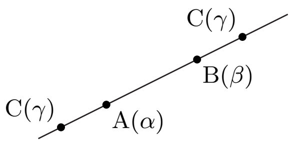
(1) $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$ ならば，$z+\overline{z}=\boxed{}$ である。ただし，$\overline{z}$ は z の共役な複素数とする。

(2) 三角形 ABC は $\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{3}$ の直角三角形であるとする。このとき，三角形 ABC の面積は $\boxed{}\sqrt{3}$ である。（城西大　改）

チェック・チェック

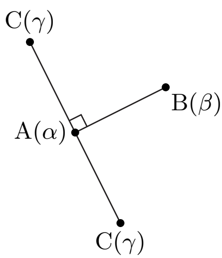
63 異なる 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ が同一直線上にある条件は

$$\mathrm{AB} \,/\!/\, \mathrm{AC}$$
$$\iff \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=0 \text{ または } \pi$$
$$\iff \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} \text{ が実数}$$



64 異なる 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ において

$$\mathrm{AB}\perp\mathrm{AC}$$
$$\iff \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\frac{\pi}{2}$$
$$\iff \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} \text{ が純虚数}$$



解答・解説

63 (1) 異なる 3 点 α, β, γ について

$$\begin{aligned}&\alpha,\ \beta,\ \gamma \text{ が同一直線上にある}\\ \iff\ &\angle \mathrm{BAC} = 0 \text{ または } \pi\\ \iff\ &\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = 0 \text{ または } \pi\\ \iff\ &\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} \text{ は実数}\end{aligned}$$

（証終）

(2) (i) $iz=-1$ のとき

$$z=\frac{-1}{i}=\frac{-i}{i^2}=i \qquad \therefore \quad z^2=-1$$

よって，$iz=z^2=-1$ であり，3 点は一致する。すなわち，3 点は同一直線上にあるといえる。

(ii) $iz \neq -1$ のとき

(1) より 3 点が同一直線上にあるための条件は $\dfrac{z^2-(-1)}{iz-(-1)}$ が実数であることだから

$$\frac{z^2-(-1)}{iz-(-1)}=\frac{(1+z^2)(1-iz)}{(1+iz)(1-iz)}=1-iz$$

したがって，iz が実数，すなわち，z は 0 または純虚数である。

(i)，(ii) より，求める条件は **z が 0 または純虚数であること** である。

64 (1) $\angle \mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$ より $\dfrac{z^3-z}{z^2-z}$ は純虚数である。

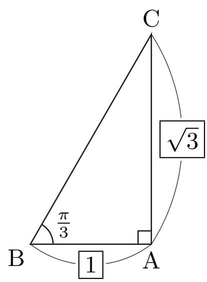
したがって，r を 0 でない実数として

$$\frac{z(z-1)(z+1)}{z(z-1)}=ri$$

とおける。このとき

$$z+1=ri \qquad \therefore \quad z=-1+ri$$

したがって　$z+\overline{z}=(-1+ri)+(-1-ri)=\underline{\mathbf{-2}}$



(2) $\angle \mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle \mathrm{B}=\dfrac{\pi}{3}$ より $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$ だから

$$\frac{|z^3-z|}{|z^2-z|}=\sqrt{3} \qquad \therefore \quad |z+1|=\sqrt{3}$$

(1) より $z+1=ri$ だから

$$|r|=\sqrt{3} \qquad \therefore \quad r=\pm\sqrt{3}$$

このとき，$z=-1\pm\sqrt{3}i$ だから

$$\mathrm{AB}=|z^2-z|=|z||z-1|=\sqrt{(-1)^2+(\pm\sqrt{3})^2}\sqrt{(-2)^2+(\pm\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$$

したがって

$$(\triangle \mathrm{ABC}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\times\sqrt{3}\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{7})^2\cdot\sqrt{3}=\underline{\mathbf{14}}\sqrt{3}$$

2.7 円の方程式

問題

65 複素数 z が

$$|z+2|=|z-4|,\ |z|=2$$

を満たし，z の虚部が正であるとき $z=$ $\boxed{}$ である。 (神奈川大)

66 方程式

$$z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+1=0$$

は，β が $\boxed{}$ という条件を満たすとき，円を表す。ただし，$\overline{z}$，$\overline{\beta}$ は，それぞれ z，β の共役複素数である。 (立教大)

67 z を複素数とすると，方程式

$$|z-2|=2|z+1|$$

は複素数平面上で円を表す。この円の中心は $\boxed{}$，半径は $\boxed{}$ である。

(北海道工業大)

チェック・チェック

65 複素数 z が

$$|z-\alpha|=|z-\beta|$$

をみたすとき，z は複素数平面上で 2 点 α，β を両端とする線分の**垂直二等分線**をえがきます。

また

$$|z-\alpha|=r \ (r \text{ は正の実数})$$

をみたすとき，z は複素数平面上で点 α を中心とする半径 r の**円**をえがきます。

66 $z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+c=0$（$c$ は実数）

を変形すると

$$z(\overline{z}+\overline{\beta})+\beta\overline{z}+c=0$$
$$z(\overline{z}+\overline{\beta})+\beta(\overline{z}+\overline{\beta})-\beta\overline{\beta}+c=0$$
$$(z+\beta)(\overline{z}+\overline{\beta})=\beta\overline{\beta}-c$$
$$\therefore \quad |z+\beta|^2=|\beta|^2-c$$

です。これより，**実数 $|\beta|^2-c$ が正**ならば，複素数 z は複素数平面上で，$-\beta$ を中心とする半径 $\sqrt{|\beta|^2-c}$ の円をえがきます。

67 複素数 z が

$$|z-\alpha|=k|z-\beta| \ (k \text{ は } 1 \text{ でない正の数})$$

をみたすとき，z は複素数平面上で線分 $\alpha\beta$ を $1:k$ に内分する点と外分する点を直径の両端とする円をえがきます。この円は**アポロニウスの円**とよばれています。

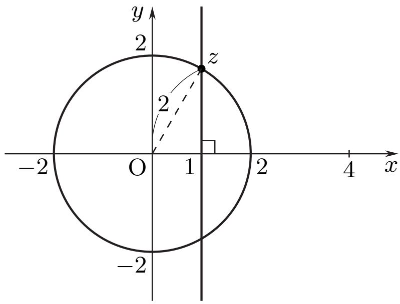
解答・解説

65 複素数 z が $|z+2|=|z-4|$ をみたすとき，z は 2 点 -2，4 を両端とする線分の垂直二等分線上にある。

また，複素数 z が $|z|=2$ をみたすとき，z は原点を中心とする半径 2 の円周上にある。

以上のことと z の虚部が正であることから，z は右図の位置にあることがわかる。したがって

$$z=\underline{\mathbf{1+\sqrt{3}\mathit{i}}}$$



別解 $|z+2|=|z-4|$ より $|z+2|^2=|z-4|^2$ だから

$$(z+2)\overline{(z+2)}=(z-4)\overline{(z-4)}$$
$$(z+2)(\overline{z}+2)=(z-4)(\overline{z}-4)$$
$$z\overline{z}+2(z+\overline{z})+4=z\overline{z}-4(z+\overline{z})+16$$
$$\therefore\quad z+\overline{z}=2\quad \cdots\cdots①$$

また，$|z|=2$ より $|z|^2=4$ だから

$$z\overline{z}=4\quad \cdots\cdots②$$

①，②より z は 2 次方程式 $z^2-2z+4=0$ の解のうち虚部が正のものであるから

$$z=1+\sqrt{3}i$$

66 $$z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+1=0$$
$$(z+\beta)(\overline{z}+\overline{\beta})-\beta\overline{\beta}+1=0$$
$$(z+\beta)\overline{(z+\beta)}=\beta\overline{\beta}-1$$
$$\therefore\quad |z+\beta|^2=|\beta|^2-1$$

この方程式が円を表すための条件は

$|\beta|^2-1>0$　すなわち　$\underline{\boldsymbol{|\beta|>1}}$

67 $|z-2|=2|z+1|$ より $|z-2|^2=4|z+1|^2$ だから

$$(z-2)\overline{(z-2)}=4(z+1)\overline{(z+1)}$$
$$(z-2)(\overline{z}-2)=4(z+1)(\overline{z}+1)$$
$$z\overline{z}-2(z+\overline{z})+4=4(z\overline{z}+z+\overline{z}+1)$$
$$z\overline{z}+2z+2\overline{z}=0$$
$$(z+2)(\overline{z}+2)=4$$
$$(z+2)\overline{(z+2)}=4 \qquad \therefore \quad |z+2|^2=4$$

よって，$|z+2|=2$ だから，z は円をえがき，その中心は $\underline{\mathbf{-2}}$，半径は $\underline{\mathbf{2}}$ である。

別解 $z=x+yi$（x，y は実数）とおくと

$$(x-2)^2+y^2=4\{(x+1)^2+y^2\}$$
$$x^2+y^2+4x=0 \qquad \therefore \quad (x+2)^2+y^2=4$$

よって，z は複素数平面上で円をえがき，中心は -2，半径は 2 である。

2.8　実数・純虚数と軌跡

問題

68 $\left(\dfrac{z}{1+\sqrt{3}i}\right)^2$ が実数となるような複素数 z が複素数平面上でえがく図形を図示せよ。 (津田塾大)

69 複素数 $z=x+yi$（x，y は実数）に対して，$\dfrac{z-4}{z-2}$ が純虚数であるとする。このとき，複素数 z の表す点の軌跡を x，y で表すと円 $\boxed{}=1$ から，2 点 $\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$，$\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ を除いたものとなる。 (埼玉工業大)

チェック・チェック

68 $w=x+yi$（x，y は実数）とおくと，$w^2=(x^2-y^2)+2xyi$ ですから

$$w^2 \text{ が実数} \iff x=0 \text{ または } y=0 \iff w \text{ が実数または純虚数}$$

となります。これを利用しましょう。

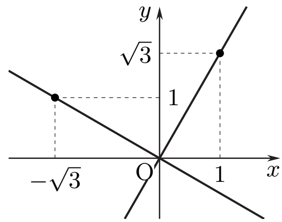
69 誘導にのって $\dfrac{z-4}{z-2}$ を x，y の式として整理してもよいし

$$w \text{ が純虚数} \iff w+\overline{w}=0 \text{ かつ } w \neq 0$$

を利用してもよいですね。

解答・解説

68 $\left(\dfrac{z}{1+\sqrt{3}i}\right)^2$ が実数となるとき



$\dfrac{z}{1+\sqrt{3}i}$ が実数または純虚数

よって，k を実数として

$$\frac{z}{1+\sqrt{3}i}=k \text{ または } ki$$

とおけるから，z は

$$z=k(1+\sqrt{3}i) \text{ または } z=k(-\sqrt{3}+i)$$

これは複素数平面上の直線で，z がえがく図形は **右上図** である。

69 $$\frac{z-4}{z-2}=\frac{x+yi-4}{x+yi-2}=\frac{\{(x-4)+yi\}\{(x-2)-yi\}}{\{(x-2)+yi\}\{(x-2)-yi\}}$$

$$=\frac{x^2-6x+8+y^2+2yi}{(x-2)^2+y^2}$$

この値が純虚数となることから

$$\begin{cases} x^2-6x+8+y^2=0 \\ 2y \neq 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \boldsymbol{(x-3)^2+y^2}=1 \\ y\neq 0 \end{cases}$$

よって，$y=0$ となる 2 点 **(2，0)，(4，0)** は除かれる。

別解 $\dfrac{z-4}{z-2}$ が純虚数であるから $z \neq 2,\ 4$ であり

$$\frac{z-4}{z-2}+\overline{\left(\frac{z-4}{z-2}\right)}=0$$

$$(\overline{z}-2)(z-4)+(z-2)(\overline{z}-4)=0$$

$$z\overline{z}-3(z+\overline{z})+8=0$$

$$(z-3)(\overline{z}-3)=1 \qquad \therefore \quad |z-3|=1$$

2.9 軌跡

問題

70 複素数 z が $|z-1|=2$ をみたすとき，複素数

$w = iz + 3$

で表される点 $\mathrm{P}(w)$ は中心が $\boxed{}$ の円周上にある。　（早稲田大）

71 複素数 z が $|z-1|=1$ をみたすとき，複素数平面上で

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

によって定まる点 w の軌跡を図示せよ。　（早稲田大）

72 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ とする。

(1) $\alpha z + \overline{\alpha}\,\overline{z} = 1$ を満たす複素数 z の全体が表す図形を図示しなさい。

(2) 複素数 z が円 $|z-\alpha| = d$ 上を動くとき，$w = \dfrac{1}{z}$ を表す点 w の軌跡が直線となるような正の定数 d を求めなさい。　（龍谷大）

チェック・チェック

70 w は次の操作により作られます。

$$z \xrightarrow[\text{に}\frac{\pi}{2}\text{回転}]{} iz \xrightarrow[\text{だけ平行移動}]{} iz+3$$

原点のまわり
に $\dfrac{\pi}{2}$ 回転

実軸方向に 3
だけ平行移動

71 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ の変換の意味は読み取りにくいので，z について解き直します。

$$z=-\frac{w+1}{w-1}i$$

となり，これを $|z-1|=1$ に代入すれば，w についての関係式が得られます。

72 (1) z が直線を表すことを一般的に説明しておきましょう。

点 z_0 を通り，線分 OA に垂直な直線上に z がある条件は，$\mathrm{A}(\alpha)$ とすると

$$\frac{z-z_0}{\alpha}\text{ が純虚数} \iff \frac{z-z_0}{\alpha}+\overline{\left(\frac{z-z_0}{\alpha}\right)}=0$$

さらに，これを変形すると

$$\overline{\alpha}(z-z_0)+\alpha(\overline{z}-\overline{z_0})=0 \qquad \therefore \quad \overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=\overline{\alpha}z_0+\alpha\overline{z_0}$$

$\overline{\alpha}z_0+\alpha\overline{z_0}=\overline{\alpha}z_0+\overline{\overline{\alpha}z_0}=$（実定数）より

$$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=\text{（実定数）}$$

は線分 OA に垂直な直線の方程式です。本問の場合は $\overline{\overline{\alpha}}z+\overline{\alpha}\,\overline{z}=1$ だから

$$\overline{\alpha}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

に垂直な直線です。

解答・解説

70 $|z-1|=2$ より，点 z は中心 1，半径 2 の円周上にある。

$w=iz+3$ より，点 w は点 z を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転して，実軸方向に 3 だけ平行移動した点なので，$\mathrm{P}(w)$ は

中心が $\underline{\boldsymbol{i+3}}$，半径が 2 の円周上

にある。

別解 $w=iz+3$ より

$$z=\frac{w-3}{i}$$

これを $|z-1|=2$ に代入すると

$$\left|\frac{w-3}{i}-1\right|=2 \qquad |w-3-i|=2|i| \qquad \therefore\quad |w-(3+i)|=2$$

よって，$\mathrm{P}(w)$ は点 $3+i$ を中心とする半径 2 の円周上にある。

71 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ より

$$w(z+i)=z-i \qquad \therefore\quad (w-1)z=-(w+1)i$$

$w=1$ のときこの等式は成立しないから $w \fallingdotseq 1$ であり

$$z=-\frac{w+1}{w-1}i$$

これを $|z-1|=1$ に代入すると

$$\left|-\frac{w+1}{w-1}i-1\right|=1$$

$$|-(w+1)i-w+1|=|w-1|$$

$$|(-1-i)w+1-i|=|w-1|$$

$$|-1-i|\left|w-\frac{1-i}{1+i}\right|=|w-1|$$

$$\therefore\quad \sqrt{2}|w+i|=|w-1|$$

両辺を 2 乗して

$$2|w+i|^2=|w-1|^2$$

$$2(w+i)\overline{(w+i)}=(w-1)\overline{(w-1)}$$

$$2(w+i)(\overline{w}-i)=(w-1)(\overline{w}-1)$$

$$2(w\overline{w}-wi+\overline{w}i+1)=w\overline{w}-w-\overline{w}+1$$

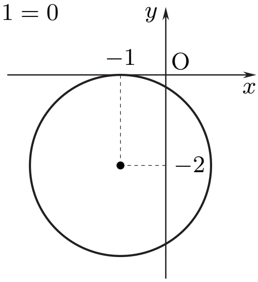
$$w\overline{w}+(1-2i)w+(1+2i)\overline{w}+1=0$$

$$w\overline{w}+\overline{(1+2i)}w+(1+2i)\overline{w}+1=0$$
$$\{w+(1+2i)\}\{\overline{w}+\overline{(1+2i)}\}-(1+2i)\overline{(1+2i)}+1=0$$
$$|w+1+2i|^2=4$$
$$\therefore\quad |w+1+2i|=2$$

よって，w の軌跡は

点 $-1-2i$ を中心とする半径 2 の円

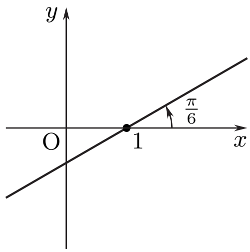
であり，**右図** となる。



72 (1) $z=x+yi$ とおく。$\alpha z+\overline{\alpha}\,\overline{z}=1$ より

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)(x+yi)+\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)(x-yi)=1$$
$$(x-\sqrt{3}y)+(y+\sqrt{3}x)i+(x-\sqrt{3}y)+(-y-\sqrt{3}x)i=2$$
$$\therefore\quad y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$$

よって，z は複素数平面上で，点 1 を通り傾きが $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，すなわち，実軸とのなす角が $\dfrac{\pi}{6}$ の直線を表す。これを図示すると **右図** のようになる。



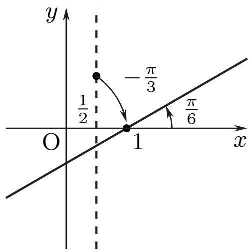
【参考】$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$

$w=\alpha z$ とおくと

$$w+\overline{w}=1\qquad\therefore\quad\frac{w+\overline{w}}{2}=\frac{1}{2}$$

よって，w は実部が $\dfrac{1}{2}$ の複素数だから，w は右図の点線の直線を表す。

$z=\dfrac{w}{\alpha}$ だから，z はこの点線の直線を原点まわりに $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転した直線となる。



(2) $w=\dfrac{1}{z}$ より

$$z=\frac{1}{w}$$

これを $|z-\alpha|=d$ に代入すると

$$\left|\frac{1}{w}-\alpha\right|=d\qquad\therefore\quad|1-\alpha w|=|w|d$$

両辺を $|\alpha|$ でわると

$$\left|\frac{1}{\alpha}-w\right|=\left|\frac{w}{\alpha}\right|d\qquad\therefore\quad\left|w-\frac{1}{\alpha}\right|=|w|d\quad(\because\quad|\alpha|=1)$$

よって，$d > 0$ において

$d \fallingdotseq 1$ のとき w の軌跡は（アポロニウスの）円

$d = 1$ のとき w の軌跡は 2 点 $\dfrac{1}{\alpha}$，0 を結ぶ線分の垂直二等分線

となるから，求める d の条件は　　$\underline{\underline{\boldsymbol{d = 1}}}$

2.10 領域

問題

73 $z = az_1 + bz_2$ において，z_1，z_2 は 2 つの与えられた複素数で，a，b は $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ である変数とする。

(1) $a + b = 1$ のとき，複素数平面上の点 z の軌跡を求めよ。

(2) $1 \leqq a + b \leqq 2$ のとき，点 z の存在する領域（範囲）を図示せよ。

（千葉大）

74 次のそれぞれの場合について，条件をみたす複素数 z の全体を，複素数平面上に図示しなさい。

(1) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| > 2$　　(2) z^2 の虚部 > 1　　（津田塾大　改）

75 z は $|z-2| \leqq 1$ をみたす複素数，a は $0 \leqq a \leqq 2$ をみたす実数とする。さらに $w = iaz$ とする。ただし，i は虚数単位である。

(1) 複素数平面において w の存在範囲を図示せよ。

(2) w の偏角の範囲を求めよ。　（法政大）

チェック・チェック

73 $z = az_1 + bz_2 = (a+b)\dfrac{az_1 + bz_2}{b+a}$ と変形すると，$\dfrac{az_1 + bz_2}{b+a}$ は線分 z_1z_2 を $b : a$ に分ける点を表しています。

74 (1) $|z-1| > 2|z+1|$ と変形できます。$|z-1| = 2|z+1|$ は**アポロニウスの円**でしたね。

(2) **$z = x + yi$（x，y は実数）とおいて**，z^2 の虚部を調べましょう。

75 (1) $w = iaz$ は z を原点を中心にして a 倍に拡大または縮小して，さらに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転する変換です。**まず a を固定**して円板 $|z-2| \leqq 1$ を動かし，次に a を $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲で動かします。

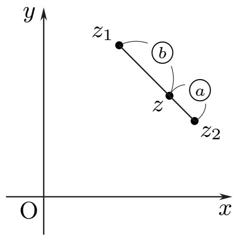
解答・解説

73 (1) $a+b=1$ より

$$z=az_1+bz_2=\frac{az_1+bz_2}{b+a}$$

z の表す点は線分 z_1z_2 を $b:a$ に内分する点である。
すなわち，z の軌跡は

<u>**線分 z_1z_2（両端を含む）。**</u>



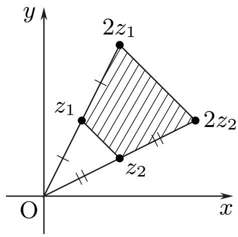
(2) $a+b=k$ $(1 \leqq k \leqq 2)$ とおく。このとき

$$z=az_1+bz_2=k\cdot\frac{az_1+bz_2}{b+a}$$

$w=\dfrac{az_1+bz_2}{b+a}$ とおくと，(1) より，w の軌跡は線分 z_1z_2 である。$z=kw$ より，z の軌跡はこの線分を k 倍 $(1 \leqq k \leqq 2)$ に拡大したものである。

よって，点 z の存在する領域は

<u>**右図の斜線部分（境界を含む）。**</u>



74 (1) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|>2$ すなわち $|z-1|>2|z+1|$

両辺正より 2 乗して

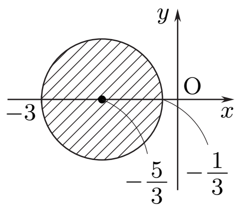
$$|z-1|^2>4|z+1|^2$$
$$(z-1)\overline{(z-1)}>4(z+1)\overline{(z+1)}$$
$$(z-1)(\overline{z}-1)>4(z+1)(\overline{z}+1)$$
$$z\overline{z}+\frac{5}{3}(z+\overline{z})+1<0$$
$$\left(z+\frac{5}{3}\right)\left(\overline{z}+\frac{5}{3}\right)-\frac{25}{9}+1<0$$
$$\left|z+\frac{5}{3}\right|^2<\frac{16}{9} \qquad \therefore \quad \left|z+\frac{5}{3}\right|<\frac{4}{3}$$

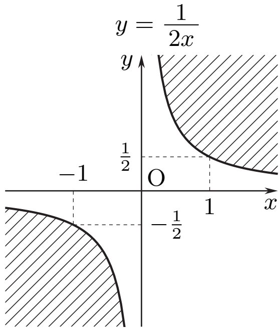
よって，複素数 z の表す点の集合は，複素数平面上において

点 $-\dfrac{5}{3}$ を中心とする半径 $\dfrac{4}{3}$ の円の内部

（境界は含まない）

であり，<u>**右図の斜線部分（境界は含まない）。**</u>





(2) $z=x+yi$（x，y は実数）とおくと

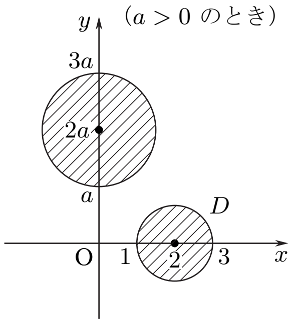
$$z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$$

（z^2 の虚部）>1 より $2xy>1$ だから

$x>0$ のとき　　$y>\dfrac{1}{2x}$

$x<0$ のとき　　$y<\dfrac{1}{2x}$

よって，複素数 z の表す点の集合は，複素数平面上において **右図の斜線部分（境界は含まない）。**



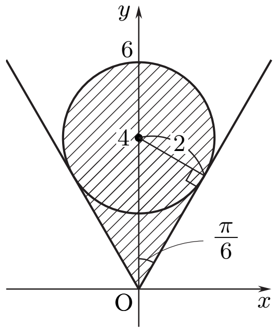
75 (1) $|z-2|=1$ は中心 2，半径 1 の円を表し，不等式 $|z-2|\leqq 1$ はこの円の周および内部を表す。これを D とする。

また，$w=iaz$ は，原点 O を中心にして z を a 倍に拡大または縮小して，さらに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転して得られる点である。

したがって **a を固定して考える**と，w の存在範囲は D を原点 O を中心にして a 倍に拡大または縮小し，さらに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転して得られる図形，つまり，$2ai$ を中心とし，半径 a の円の周および内部を表す。

a を $0\leqq a\leqq 2$ の範囲で動かすと，w の存在する範囲は

右下図の斜線部分（境界を含む）。



別解 $a\neq 0$ のとき

$$z=\frac{w}{ia}$$

$|z-2|\leqq 1$ に代入して

$$\left|\frac{w}{ia}-2\right|\leqq 1$$

$$\therefore\quad |w-2ai|\leqq|ia|=a\ (>0)$$

また，$a=0$ のときは $w=0$ であり，このときも不等式は成り立つ。

したがって，a を固定したとき，w は中心 $2ai$，半径 a の円の周および内部。以下解答と同じ。

(2) (1) の解答の図から

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\leqq \arg w\leqq\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\frac{\pi}{3}\leqq \arg w\leqq\frac{2}{3}\pi}$$

2.11 複素数と数列

問題

76 次の複素数の数列を考える。

$$\begin{cases} z_1 = 1 \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1+i)z_n + \dfrac{1}{2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

ただし，i は虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1) $z_{n+1} - \alpha = \dfrac{1}{2}(1+i)(z_n - \alpha)$ なる定数 α を求めよ。

(2) このとき，z_{17} を求めよ。 （福島大）

77 2 組の数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = -a_n - \sqrt{3}b_n$$
$$b_0 = 0, \quad b_{n+1} = \sqrt{3}a_n - b_n$$

と定める。$c_n = a_n + b_n i$（ただし，i は虚数単位）とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) c_{n+1} を c_n で表しなさい。

(2) $|\,c_n\,|$ を求めなさい。

(3) m を負でない整数とするとき，$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{3m+2}$ を求めなさい。

（前橋工科大）

78 複素数平面上の点列 $\{\mathrm{A}_n\}$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を次のように定める。原点を A_0 とし，原点以外の点 A_1 をとる。$n \geqq 2$ の場合，点 A_{n-1} を中心として点 A_{n-2} を正の向きに角 θ だけ回転して得られる点を A_n とする。また，A_n に対応する複素数を α_n とする。$\omega = \cos\theta + i\sin\theta$ とする。

(1) α_n を α_{n-1}，α_{n-2}，ω を用いて表せ。

(2) $\alpha_1 = \alpha$ とするとき，α_n を n，α，ω を用いて表せ。

(3) 点列 $\{\mathrm{A}_n\}$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ はある円の周上にあることを示し，その円の中心と半径をそれぞれ α，ω を用いて表せ。ただし，$\theta \fallingdotseq \pi \times k$（$k$ は整数）とする。 （同志社大）

チェック・チェック

76 (1) 複素数を係数とする **2 項間漸化式**です。

$$z_{n+1} = pz_n + q \quad \cdots\cdots ①$$
$$\alpha = p\alpha + q \quad \cdots\cdots ②$$

②をみたす α を求めて，① − ② をつくると，①は

$$z_{n+1} - \alpha = p(z_n - \alpha) \quad \cdots\cdots ③$$

と変形することができます。これは数列 $\{z_n - \alpha\}$ が公比 p の等比数列であることを表しています。

①を③に変形するための α についての方程式②は，③を展開して得られる式

$$z_{n+1} = pz_n - p\alpha + \alpha$$

と①を比較することにより得ることができます。すなわち

$$q = -p\alpha + \alpha \qquad \therefore \quad \alpha = p\alpha + q$$

です。

(2) まずは (1) の結果を利用して漸化式を解くとよいでしょう。

$\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$ は $\dfrac{1+i}{2}$ を $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ と**極形式**で表すことにより

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

と整理することができます。

77 (1) $c_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}i = (-a_n - \sqrt{3}b_n) + (\sqrt{3}a_n - b_n)i$

について，$c_n = a_n + b_n i$ が現れるように整理します。

(2) (1) より数列 $\{c_n\}$ は複素数 α を公比とする等比数列であることがわかります。

よって，数列 $\{|c_n|\}$ は $|\alpha| = \sqrt{(\text{実部})^2 + (\text{虚部})^2}$ を公比とする等比数列です。

(3) 求める和は $c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{3m+2}$ の実部として現れます。

78 (1) 複素数平面上で点 α_{n-2} を点 α_{n-1} のまわりに θ 回転した点を点 α_n とすると

$$\boldsymbol{\alpha_n - \alpha_{n-1} = (\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1})(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

という関係式が成立します。

(2) 3 項間漸化式の解き方を思い出しましょう。

(3) 点 α_n が点 β を中心とする半径 r の円の周上にあるということは

$$|\alpha_n - \beta| = r$$

が成立するということです。

解答・解説

76 (1) $z_{n+1}-\alpha=\dfrac{1}{2}(1+i)(z_n-\alpha)$ より

$$z_{n+1}=\frac{1}{2}(1+i)z_n+\frac{1-i}{2}\alpha$$

与えられた漸化式と比較して

$$\frac{1}{2}=\frac{1-i}{2}\alpha \qquad \therefore\quad \alpha=\frac{1}{1-i}=\underline{\boldsymbol{\frac{1+i}{2}}}$$

(2) (1) の結果から

$$z_{n+1}-\frac{1+i}{2}=\frac{1+i}{2}\left(z_n-\frac{1+i}{2}\right)$$

よって，数列 $\left\{z_n-\dfrac{1+i}{2}\right\}$ は公比 $\dfrac{1+i}{2}$ の等比数列であり

$$z_n-\frac{1+i}{2}=\left(z_1-\frac{1+i}{2}\right)\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n-1}=\frac{1-i}{2}\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n-1}$$

$$(\because\quad z_1=1)$$

したがって

$$\begin{aligned}z_{17}&=\frac{1+i}{2}+\frac{1-i}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{16}\\&=\frac{1+i}{2}+\frac{1-i}{2}\cdot 2^{-8}(\cos 4\pi+i\sin 4\pi)=\frac{1+i}{2}+\frac{1-i}{2}\cdot\frac{1}{256}\cdot 1\\&=\underline{\boldsymbol{\frac{257+255i}{512}}}\end{aligned}$$

77 (1)

$$\begin{aligned}c_{n+1}&=a_{n+1}+b_{n+1}i=(-a_n-\sqrt{3}b_n)+(\sqrt{3}a_n-b_n)i\\&=-(a_n+b_ni)+\sqrt{3}(a_ni-b_n)=-(a_n+b_ni)+\sqrt{3}(a_n+b_ni)i\\&=-c_n+\sqrt{3}c_ni=\underline{\boldsymbol{(-1+\sqrt{3}i)c_n}}\end{aligned}$$

(2) (1) より

$$|c_{n+1}|=|-1+\sqrt{3}i||c_n| \qquad \therefore\quad |c_{n+1}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}|c_n|=2|c_n|$$

よって，数列 $\{|c_n|\}$ は公比 2 の等比数列であり

$$|c_n|=|c_0|\cdot 2^n=|a_0+b_0i|\cdot 2^n=|1+0\cdot i|\cdot 2^n=\underline{\boldsymbol{2^n}}$$

(3) $\omega=-1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$ とおくと

$$\omega^3=2^3(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=8 \quad \cdots\cdots①$$

$$1+\omega+\omega^2=1+(-1+\sqrt{3}i)+(-2-2\sqrt{3}i)=-2-\sqrt{3}i \quad \cdots\cdots②$$

また，(1) の結果から $c_{n+1}=\omega c_n$ だから，数列 $\{c_n\}$ は公比 ω の等比数列であり

$$c_n=c_0\cdot\omega^n=1\cdot\omega^n=\omega^n$$

このとき

$$c_0+c_1+c_2+\cdots+c_{3m+2}=\omega^0+\omega^1+\omega^2+\cdots+\omega^{3m+2}$$
$$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{3m}(1+\omega+\omega^2)$$
$$=(1+\omega+\omega^2)(1+\omega^3+\cdots+\omega^{3m})=(1+\omega+\omega^2)\cdot\frac{(\omega^3)^{m+1}-1}{\omega^3-1}$$
$$=(-2-\sqrt{3}i)\cdot\frac{8^{m+1}-1}{8-1}\quad(\because\ ①,\ ②)$$

求める $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{3m+2}$ はこれの実部だから

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{3m+2}=\underline{\boldsymbol{-\frac{2(8^{m+1}-1)}{7}}}$$

78 (1) 点 α_{n-1} を中心に点 α_{n-2} を θ 回転したものが点 α_n だから

$$\alpha_n-\alpha_{n-1}=(\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1})(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{\alpha_n=(1-\omega)\alpha_{n-1}+\omega\alpha_{n-2}}}\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

(2) (1) の漸化式は

$(t^2=(1-\omega)t+\omega$ をみたす t は　$(t-1)(t+\omega)=0$　$\therefore$　$t=1,-\omega)$

$$\alpha_n-\alpha_{n-1}=-\omega(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2})\quad\cdots\cdots①$$
$$\alpha_n+\omega\alpha_{n-1}=\alpha_{n-1}+\omega\alpha_{n-2}\quad\cdots\cdots\cdots②$$

の 2 通りに変形できる。

① より

$$\alpha_{n+1}-\alpha_n=(\alpha_1-\alpha_0)(-\omega)^n=(\alpha-0)(-\omega)^n=\alpha(-\omega)^n\quad\cdots\cdots①'$$

② より

$$\alpha_{n+1}+\omega\alpha_n=\alpha_1+\omega\alpha_0=\alpha+\omega\cdot 0=\alpha\quad\cdots\cdots②'$$

②′ − ①′ より

$$(1+\omega)\alpha_n=\alpha-\alpha(-\omega)^n$$
$$\therefore\quad\underline{\boldsymbol{\alpha_n=\frac{\alpha\{1-(-\omega)^n\}}{1+\omega}}}\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

(3) (2) より

$$\alpha_n-\frac{\alpha}{1+\omega}=-\alpha\cdot\frac{(-\omega)^n}{1+\omega}\qquad\therefore\quad\left|\alpha_n-\frac{\alpha}{1+\omega}\right|=|\alpha|\frac{|\omega|^n}{|1+\omega|}$$

$\omega=\cos\theta+i\sin\theta$ より $|\omega|=1$ だから

$$\left|\alpha_n-\frac{\alpha}{1+\omega}\right|=\left|\frac{\alpha}{1+\omega}\right|$$

よって，点列 $\{\mathrm{A}_n\}$ は，$\underline{\textbf{中心 }\boldsymbol{\frac{\alpha}{1+\omega}}}$，$\underline{\textbf{半径 }\boldsymbol{\left|\frac{\alpha}{1+\omega}\right|}}$ の円の周上にある。（証終）