1　分数関数，無理関数，逆関数と合成関数

1.1　分数関数のグラフ

問題

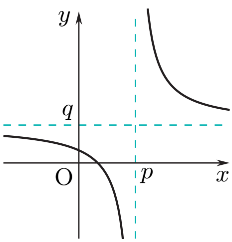
76　x の関数 $y=\dfrac{-2x-6}{x-3}$ のグラフは双曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ を x 軸方向に b，y 軸方向に c だけ平行移動したものである。a，b，c の値を求めよ。

（麻布大　改）

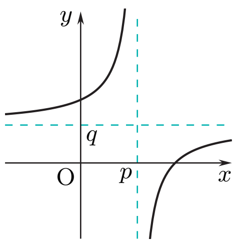
77　関数 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ のグラフが，$x=3$ と $y=1$ を漸近線とし，さらに点 $(2,\ 2)$ を通るとき，b の値を求めよ。　（防衛大）

チェック・チェック

76，**77**　$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0,\ ad-bc \neq 0)$ のグラフは，$y=\dfrac{k}{x-p}+q$ と変形することで，$y=\dfrac{k}{x}$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものとわかります。これは **$x=p$，$y=q$ が漸近線**となる直角双曲線です。



$k>0$ のとき



$k<0$ のとき

解答・解説

76 $y=\dfrac{-2x-6}{x-3}=\dfrac{-2(x-3)-12}{x-3}=-2-\dfrac{12}{x-3}$ より，これは $y=-\dfrac{12}{x}$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動したものである。よって

$\underline{\boldsymbol{a=-12,\ b=3,\ c=-2}}$

77 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}=\dfrac{a(x+c)+b-ac}{x+c}=a+\dfrac{b-ac}{x+c}$

$x=3,\ y=1$ が漸近線であることから　　$c=-3,\ a=1$

点 $(2,\ 2)$ を通るから　　$2=\dfrac{2a+b}{2+c}=\dfrac{2+b}{2+(-3)}$　　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{b=-4}}$

1.2　分数関数のグラフと直線との共有点

問題

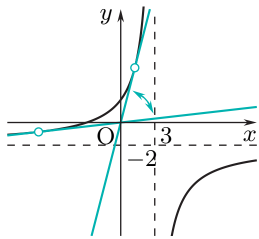
78 2 つの関数 $y = \dfrac{1}{x-1}$ と $y = -|x| + k$ のグラフが 2 個以上の点を共有する k の値の範囲は $\boxed{}$ である。（法政大）

79 x の関数 $y = \dfrac{-2x-6}{x-3}$ ……① のグラフが直線 $y = kx$ と共有点をもたないとき，k の範囲を求めよ。（麻布大　改）

チェック・チェック

78 双曲線と折れ線の共有点を調べる問題です。折れ線が点 $(0,\ k)$ で折れることに着目して，折れ線を y 軸にそって移動してみましょう。

79 双曲線①と原点を通る直線 $y = kx$ が共有点をもたない条件を求めるには，右図のグラフ（**76** の利用）から傾き k の範囲を調べます。接するときが境界となります。微分を利用して，原点を通る接線の方程式を求めるという解法もありますが，分数方程式 $\dfrac{-2x-6}{x-3} = kx$ の分母を払って整式の方程式に直し，これが実数解をもたない条件を求めればよいですね。



解答・解説

78 $y = -|x| + k = \begin{cases} -x + k & (x \geqq 0) \\ x + k & (x \leqq 0) \end{cases}$

$y = \dfrac{1}{x-1}$ と $y = -x + k$ のグラフが接する

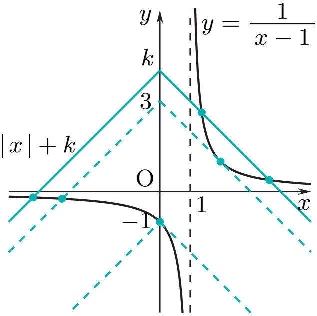
ときの k の値を求めると

$$\frac{1}{x-1} = -x + k$$

$$x^2 - (k+1)x + k + 1 = 0$$

判別式を D とすると

$$D = (k+1)^2 - 4(k+1)$$
$$= (k+1)(k-3) = 0 \qquad \therefore \quad k = -1,\ 3$$



2 つの関数 $y = \dfrac{1}{x-1}$ と $y = -|x| + k$ のグラフが 2 個以上の点を共有する k の値の範囲は上のグラフより　$\underline{\boldsymbol{k \geqq 3}}$

79 双曲線①と $y = kx$ が**共有点をもたない**条件は

$$\frac{-2x-6}{x-3} = kx \iff \begin{cases} -2x - 6 = kx(x-3) \\ x \neq 3 \end{cases}$$
$$\iff kx^2 - (3k-2)x + 6 = 0$$

が**実数解をもたない**ことである。

$k = 0$ のとき，$x = -3$ が解となり，不適。

$k \neq 0$ のときは，判別式を D とすると

$$D = (3k-2)^2 - 24k < 0 \qquad \therefore \quad 9k^2 - 36k + 4 < 0$$

この不等式を解くと　$\underline{\boldsymbol{2 - \dfrac{4\sqrt{2}}{3} < k < 2 + \dfrac{4\sqrt{2}}{3}}}$　($k \neq 0$ をみたす)

1.3　分数不等式

問題

80 次の不等式を，グラフをかいて，解け。

$x+1 \geqq \dfrac{1}{x}$ （金沢経済大）

81 不等式 $\dfrac{3}{1+\dfrac{2}{x}} \geqq x^2$ を解け。（武蔵工業大）

チェック・チェック

80，**81** 教科書では，グラフをかきながら分数不等式を解いています。不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqq 0$ を解くには，両辺に $\{g(x)\}^2$ (>0) をかけて

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geqq 0 \iff \begin{cases} f(x)g(x) \geqq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

と同値変形することもできます。これにより整式の不等式を解けばよいことになります。

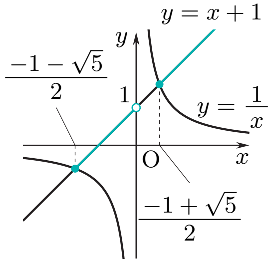
解答・解説

80 $x+1=\dfrac{1}{x}$ を解くと

$$x^2+x-1=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$y=x+1$ と $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフは右図のようになる。したがって，$x+1 \geqq \dfrac{1}{x}$ となるのは

$$\boldsymbol{\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqq x < 0 \text{ または } \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leqq x}$$



別解 同値変形を利用して解くと

$$x+1 \geqq \frac{1}{x} \iff \frac{x^2+x-1}{x} \geqq 0 \iff x(x^2+x-1) \geqq 0 \text{ かつ } x \neq 0$$
$$\iff \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqq x < 0 \text{ または } \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leqq x$$

81 $$\frac{3}{1+\dfrac{2}{x}}=\frac{3x}{x+2}=\frac{3(x+2)-6}{x+2}=3+\frac{-6}{x+2} \quad (x \neq 0,\ -2)$$

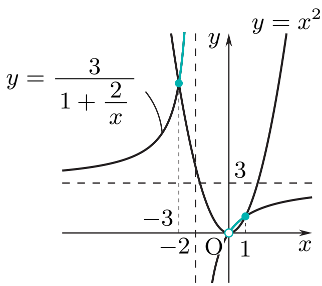
また，$\dfrac{3x}{x+2}=x^2$ を解くと

$$x^3+2x^2-3x=0$$
$$x(x+3)(x-1)=0 \qquad \therefore \quad x=0,\ -3,\ 1$$

よって，$y=\dfrac{3}{1+\dfrac{2}{x}}$ と $y=x^2$ のグラフは右図。

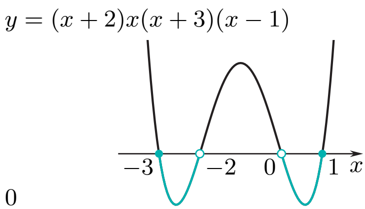
したがって，不等式の解は

$$\boldsymbol{-3 \leqq x < -2 \text{ または } 0 < x \leqq 1}$$



別解 同値変形を利用すると

$$\frac{3}{1+\dfrac{2}{x}} \geqq x^2 \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{3x}{x+2} \geqq x^2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{x^2(x+2)-3x}{x+2} \leqq 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x \neq 0 \text{ かつ } x \neq -2 \\ (x+2)x(x+3)(x-1) \leqq 0 \end{cases}$$
$$\iff -3 \leqq x < -2 \text{ または } 0 < x \leqq 1$$



1.4　無理関数のグラフと直線との共有点

問題

82　(1) 直線 $y=ax+1$ が曲線 $y=\sqrt{2x-5}-1$ に接するように，実数 a の値を定めよ。

(2) 方程式 $\sqrt{2x-5}-1=ax+1$ の実数解の個数を求めよ。ただし，重解は 1 個とみなす。（広島文教女子大）

83　2 つの関数 $y=a|x-1|-a$ と $y=\sqrt{x}$ のグラフが，3 つの異なる共有点をもつための実数 a の条件を求めよ。（法政大）

チェック・チェック

82，**83**　$y=\sqrt{x} \iff \begin{cases} y^2=x \\ y \geqq 0 \end{cases}$

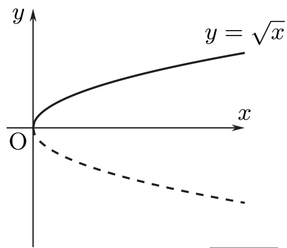
なので，グラフは右図のように**放物線の上半分**となります。

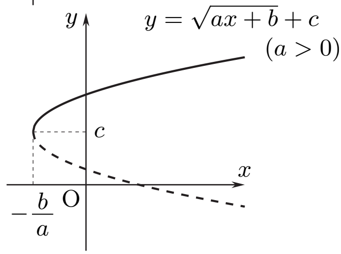
また，$y=\sqrt{ax+b}+c\ (a \fallingdotseq 0)$ のグラフは

$$y=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$$

と変形されるので，$y=\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{b}{a}$，y 軸方向に c だけ平行移動したものです。

曲線 $y=\sqrt{ax+b}+c$ と直線 $y=mx+n$ の共有点の個数は方程式 $\sqrt{ax+b}+c=mx+n$ の異なる実数解の個数と一致します。グラフを利用して共有点の個数を調べましょう。





解答・解説

82 (1) 直線と曲線の共有点の x 座標は

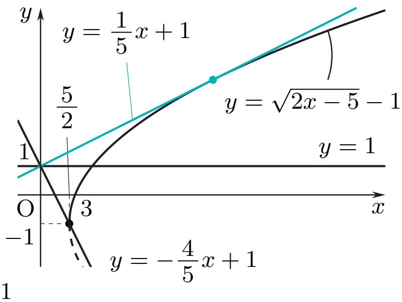
$$ax+1=\sqrt{2x-5}-1$$
$$(ax+2)^2=2x-5$$
$$a^2x^2+2(2a-1)x+9=0$$

の実数解であり，$a \neq 0$ のとき，これは 2 次方程式である。重解をもつ条件は

$$\frac{D}{4}=(2a-1)^2-9a^2=0$$
$$-5a^2-4a+1=0$$
$$(a+1)(5a-1)=0 \qquad \therefore \quad a=-1,\ \frac{1}{5}$$

また，$y=\sqrt{2x-5}-1$ の定義域は $x \geqq \dfrac{5}{2}$ であり，図より $a=-1$ は不適。よって

$$\boldsymbol{a=\frac{1}{5}}$$



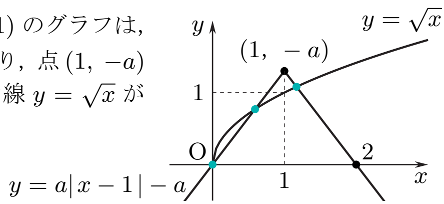
(2) $y=ax+1$ は点 $(0,\ 1)$ を通り，傾きが a の直線なので，(1) の図より $\sqrt{2x-5}-1=ax+1$ の実数解の個数は下の表のようになる。

a	$\cdots$	$-\frac{4}{5}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{5}$	$\cdots$
個数	0	1	1	1	2	1	0

$$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{a<-\frac{4}{5}} \text{ または } \boldsymbol{a>\frac{1}{5}} \text{ のとき} & \textbf{0 個} \\ \boldsymbol{-\frac{4}{5} \leqq a \leqq 0} \text{ または } \boldsymbol{a=\frac{1}{5}} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{0<a<\frac{1}{5}} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \end{cases}$$

83 $y=a|x-1|-a=a(|x-1|-1)$ のグラフは，a の値に関わらず 2 点 $(0,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通り，点 $(1,\ -a)$ で傾きが変わる折れ線である。これと曲線 $y=\sqrt{x}$ が 3 つの異なる共有点をもつのは右図より

$$-a>1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a<-1}$$



1.5　無理方程式・無理不等式

問題

84 方程式 $\sqrt{x+3} = |2x|$ を解け。　（千葉工業大）

85 $x+2 = \sqrt{4x+9}$ をみたす x の値は $\boxed{}$ であり，$x+2 < \sqrt{4x+9}$ をみたす x の値の範囲は $\boxed{}$ である。　（大阪工業大）

86 不等式 $\sqrt{7x-3} \leqq \sqrt{-x^2+5x}$ をみたす x の範囲は $\boxed{}$ である。　（大阪薬科大）

チェック・チェック

84～**86** 教科書では，グラフをかきながら無理方程式・無理不等式を解いていますが，次のように**同値変形**することもできます。

- $\sqrt{A} = B \iff \begin{cases} A = B^2 \\ B \geqq 0 \end{cases}$
- $\sqrt{A} \leqq B \iff \begin{cases} A \leqq B^2 \\ A \geqq 0 \\ B \geqq 0 \end{cases}$
- $\sqrt{A} \geqq B \iff \begin{cases} B \leqq 0 \\ A \geqq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} B \geqq 0 \\ A \geqq B^2 \end{cases}$

解答・解説

84 $\sqrt{x+3} = |2x| \iff x+3 = 4x^2$

$4x^2 - x - 3 = 0$

$(4x+3)(x-1) = 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x = -\frac{3}{4},\ 1}$

85 $x+2 = \sqrt{4x+9}$ の両辺を 2 乗すると

$(x+2)^2 = 4x+9$

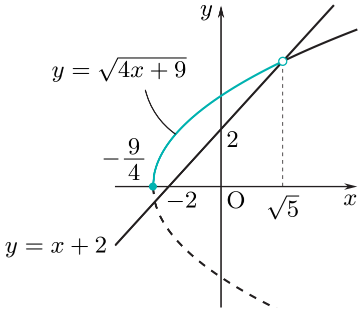
$x^2 - 5 = 0 \qquad \therefore \quad x = \pm\sqrt{5}$

右図より，方程式 $x+2 = \sqrt{4x+9}$ の解は

$\boldsymbol{x = \sqrt{5}}$

不等式 $x+2 < \sqrt{4x+9}$ の解は

$\boldsymbol{-\frac{9}{4} \leqq x < \sqrt{5}}$



別解 $x+2 = \sqrt{4x+9}$

$$\iff \begin{cases} \boldsymbol{x+2 \geqq 0} \\ \boldsymbol{(x+2)^2 = 4x+9} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geqq -2 \\ x^2 - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqq -2 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

$\therefore \quad x = \sqrt{5}$

また

$x+2 < \sqrt{4x+9}$

$$\iff \begin{cases} \boldsymbol{x+2 < 0} \\ \boldsymbol{4x+9 \geqq 0} \end{cases} \text{または} \begin{cases} \boldsymbol{x+2 \geqq 0} \\ \boldsymbol{(x+2)^2 < 4x+9} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x < -2 \\ x \geqq -\frac{9}{4} \end{cases} \text{または} \begin{cases} x \geqq -2 \\ x^2 - 5 < 0 \end{cases}$$

$$\iff -\frac{9}{4} \leqq x < -2 \text{ または } -2 \leqq x < \sqrt{5}$$

$$\iff -\frac{9}{4} \leqq x < \sqrt{5}$$

86 $\sqrt{7x-3} \leqq \sqrt{-x^2+5x}$

$$\iff \boldsymbol{0 \leqq 7x-3 \leqq -x^2+5x}$$

$$\iff \begin{cases} 7x-3 \geqq 0 \\ x^2+2x-3 \leqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqq \frac{3}{7} \\ (x+3)(x-1) \leqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geqq \frac{3}{7} \\ -3 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

$$\iff \boldsymbol{\frac{3}{7} \leqq x \leqq 1}$$

1.6 逆関数

問題

87 関数 $y = f(x) = \dfrac{2x+c}{ax+b}$ のグラフが点 $\left(-2,\ \dfrac{9}{5}\right)$ を通り，かつ $x = -\dfrac{1}{3}$，$y = \dfrac{2}{3}$ を漸近線にもつとする。

(1) 定数 a，b，c の値を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ の逆関数を求めよ。

(3) 関数 $y = f(x)$ の値域が $\{y \mid y \geqq 1\}$ となるとき，$f(x)$ の定義域を求めよ。（九州共立大　改）

88 (1) $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ の逆関数を求めよ。（東京電機大）

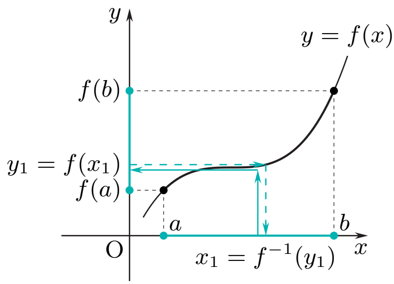
(2) 関数 $y = e^x - e^{-x}$ の逆関数を求めよ。

チェック・チェック

87 関数 $y = f(x)$ が逆関数 $y = f^{-1}(x)$ をもつとき

$\{f(x)$ の値域 $\}$
$= \{f^{-1}(x)$ の定義域 $\}$
$\{f(x)$ の定義域 $\}$
$= \{f^{-1}(x)$ の値域 $\}$

であり，$f(x)$ と $f^{-1}(x)$ では定義域と値域が入れ替わります。



88 関数 $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めるには，次のようにします。

(i) $y = f(x)$ を x について解いて $x = g(y)$ とする。

(ii) x と y を入れ替えて $y = g(x)$ とする。このとき，$f^{-1}(x) = g(x)$ である。

解答・解説

87 $y=f(x)$ のグラフは $x=-\dfrac{1}{3}$ を漸近線にもつことから $a \fallingdotseq 0$ であり

$$\begin{array}{r@{\,}l} & \dfrac{2}{a} \\ ax+b \,\big)\!\! & \overline{2x+c} \\ & 2x+\frac{2b}{a} \\ \hline & \quad c-\frac{2b}{a} \end{array}$$

$$f(x)=\frac{2x+c}{ax+b}=\frac{2}{a}+\frac{c-\dfrac{2b}{a}}{ax+b}$$
$$=\frac{2}{a}+\frac{1}{a}\cdot\frac{c-\dfrac{2b}{a}}{x+\dfrac{b}{a}}$$

(1) 点 $\left(-2,\ \dfrac{9}{5}\right)$ を通るから

$$\frac{2(-2)+c}{-2a+b}=\frac{9}{5}$$
$$5c-20=9(-2a+b) \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$x=-\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{2}{3}$ を漸近線にもつから

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{a}=-\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{a}=\dfrac{2}{3} \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} \underline{\boldsymbol{a=3}} \\ \underline{\boldsymbol{b=1}} \end{cases}$$

①に a，b の値を代入して

$$5c-20=9(-2\times3+1)$$
$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{c=-5}}$$

(2) (1) より

$$y=\frac{2x-5}{3x+1}$$

x について解くと

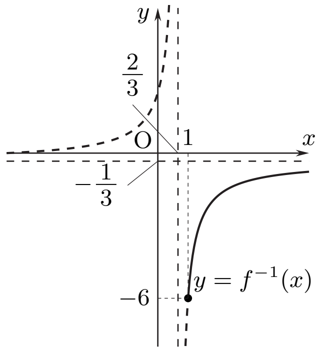
$$y(3x+1)=2x-5$$
$$3xy+y=2x-5$$
$$(3y-2)x=-y-5$$
$$\therefore \quad x=\frac{-y-5}{3y-2}$$

よって，逆関数は

$$f^{-1}(x)=\underline{\boldsymbol{\frac{-x-5}{3x-2}}}$$

(3) (2) の結果から

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{3} - \frac{\frac{17}{3}}{3x-2} = -\frac{1}{3} - \frac{\frac{17}{9}}{x-\frac{2}{3}}$$



$f^{-1}(x)$ の定義域は $f(x)$ の値域に一致するから，$x \geqq 1$ であり，右のグラフより

$$-6 \leqq f^{-1}(x) < -\frac{1}{3}$$

である。**$f(x)$ の定義域は $f^{-1}(x)$ の値域に一致する**から，$f(x)$ の定義域は

$$\underline{\boldsymbol{-6 \leqq x < -\frac{1}{3}}}$$

88 (1) $\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{x} \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2xy = x^2 - 2 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2yx - 2 = 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$x > 0$ より

$$x = y + \sqrt{y^2 + 2}$$

よって，逆関数は

$$\underline{\boldsymbol{y = x + \sqrt{x^2 + 2}}}$$

(2) $y = e^x - e^{-x} \iff e^{2x} - ye^x - 1 = 0$

$$\therefore \quad e^x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2} \quad (> 0)$$

自然対数をとると

$$x = \log \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}$$

よって，逆関数は

$$\underline{\boldsymbol{y = \log \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}}}$$

1.7　合成関数

問題

89 2 つの関数 $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$，$g(x)=x+2$ がある。このとき，

$$g(f(x))=\frac{\boxed{}\,x+\boxed{}}{x+\boxed{}},\quad f(g(x))=\frac{\boxed{}\,x+\boxed{}}{x+\boxed{}}$$ である。

（日本大）

90 関数 $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+1}$ と $g(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ の合成関数 $(f\circ g)(x)$ は $(f\circ g)(x)=x$ をみたしている。このとき，a，b，c を求めよ。さらに，合成関数 $(g\circ f)(x)$，$(g\circ g)(x)$ を求めよ。（武蔵工業大）

チェック・チェック

89，**90** 合成関数 $f\big(g(x)\big)$ は $\big(f\circ g\big)(x)$ とも表します。これは「x を g でうつしてから，$g(x)$ を f でうつす」ということです。

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & y=g(x) \arrow[r, bend left, "f"] & z=f(y)=f(g(x)) \end{tikzcd}$$

$f(x)$ と $g(x)$ の合成においては，一般には

$$f\circ g \neq g\circ f$$

であることに注意しましょう。

解答・解説

89 $g\bigl(f(x)\bigr)=g\left(\dfrac{2x+3}{x+1}\right)=\dfrac{2x+3}{x+1}+2=\underline{\boldsymbol{\dfrac{4x+5}{x+1}}}$

$f\bigl(g(x)\bigr)=f(x+2)=\dfrac{2(x+2)+3}{(x+2)+1}=\underline{\boldsymbol{\dfrac{2x+7}{x+3}}}$

90 $$(f\circ g)(x)=f\bigl(g(x)\bigr)=\dfrac{3\cdot\dfrac{ax+1}{bx+c}-1}{2\cdot\dfrac{ax+1}{bx+c}+1}$$

$$=\frac{3(ax+1)-(bx+c)}{2(ax+1)+(bx+c)}=\frac{(3a-b)x+3-c}{(2a+b)x+2+c}$$

より

$$(f\circ g)(x)=x$$

$$\begin{cases} bx+c\fallingdotseq 0\\ (2a+b)x+2+c\fallingdotseq 0\\ (3a-b)x+3-c=x\{(2a+b)x+2+c\}\end{cases}$$

$$\begin{cases} bx+c\fallingdotseq 0 & \cdots\cdots ①\\ (2a+b)x+2+c\fallingdotseq 0 & \cdots\cdots ②\\ (2a+b)x^2+(2+c-3a+b)x+c-3=0 & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

①かつ②をみたす**すべての x** に対して③が成立する条件は

$$\begin{cases} 2a+b=0\\ 2+c-3a+b=0\\ c-3=0\end{cases}\iff\begin{cases} 2a+b=0\\ 3a-b-c=2\\ c=3\end{cases}$$

$\therefore$ $\underline{\boldsymbol{a=1,\ b=-2,\ c=3}}$

このとき，$g(x)=\dfrac{x+1}{-2x+3}$ より

$$(g\circ f)(x)=g\bigl(f(x)\bigr)=g\left(\frac{3x-1}{2x+1}\right)=\frac{\dfrac{3x-1}{2x+1}+1}{-2\cdot\dfrac{3x-1}{2x+1}+3}=\underline{\boldsymbol{x}}$$

$$(g\circ g)(x)=g\bigl(g(x)\bigr)=g\left(\frac{x+1}{-2x+3}\right)$$

$$=\frac{\dfrac{x+1}{-2x+3}+1}{-2\cdot\dfrac{x+1}{-2x+3}+3}=\underline{\boldsymbol{\frac{x-4}{8x-7}}}$$

別解　$\bigl(f\circ g\bigr)(x)=x \iff g(x)=f^{-1}(x)$

$g(x)$ は $f(x)$ の逆関数であるから，$y=\dfrac{3x-1}{2x+1}$ とおくと

$$y(2x+1)=3x-1 \qquad (2y-3)x=-y-1$$

$$\therefore \quad x=\frac{y+1}{-2y+3}$$

したがって

$$g(x)=f^{-1}(x)=\frac{x+1}{-2x+3} \qquad \therefore \quad a=1,\ b=-2,\ c=3$$

また，$\bigl(g\circ f\bigr)(x)$ についても，$\bigl(g\circ f\bigr)(x)=\boldsymbol{g}\bigl(f(x)\bigr)=\boldsymbol{f^{-1}}\bigl(f(x)\bigr)=x$ としてもよい。

1.8　逆関数と合成関数

問題

91 関数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ は $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{\boxed{}}$ であり，合成関数 $g(f(x))=\dfrac{x}{x-1}$ であるとき，$g(x)=\dfrac{1}{\boxed{}}$ である。

（湘南工科大）

92 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(d>0)$ と $g(x)=\dfrac{x+2}{3x+4}$ があって，$f(g(x))=x$ であるとき，$f(x)$ を求めよ。（東北学院大）

チェック・チェック

91 $f(x)$，$g(f(x))=h(x)$ において，$f^{-1}(x)$ が存在するならば

$$g\circ f=h \iff g=h\circ f^{-1}$$

すなわち

$$g(x)=h\big(f^{-1}(x)\big)$$

です。

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, bend left, "h"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & & y \\ & z \arrow[ul, bend left, "f^{-1}"'] \arrow[ur, bend right, "g"'] & \end{tikzcd}$$

92 $\boldsymbol{f\big(g(x)\big)=x}$ ということは $f(x)$ は $g(x)$ の逆関数ということです。

すなわち

$$f(x)=g^{-1}(x)$$

です。

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "g"] & y \arrow[l, bend left, "f"] \end{tikzcd}$$

解答・解説

91 $y=f(x)=\dfrac{x-1}{x}$ とおくと

$$xy=x-1$$
$$(y-1)x=-1$$
$$\therefore\quad x=\frac{-1}{y-1}$$

よって，逆関数 $f^{-1}(x)$ は

$$f^{-1}(x)=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{-x+1}}}$$

$h(x)=g\big(f(x)\big)=\dfrac{x}{x-1}$ とおくと，$h=g\circ f$ より $\boldsymbol{g=h\circ f^{-1}}$ である。

$$\therefore\quad g(x)=h\big(f^{-1}(x)\big)=h\left(\frac{1}{-x+1}\right)=\frac{\dfrac{1}{-x+1}}{\dfrac{1}{-x+1}-1}$$
$$=\frac{1}{1-(-x+1)}=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{x}}}$$

別解　$g\big(f(x)\big)=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x}}=\dfrac{1}{f(x)}$

$$\therefore\quad g(x)=\frac{1}{x}$$

92 $f\big(g(x)\big)=x$ より $\boldsymbol{f(x)=g^{-1}(x)}$ である。$y=g(x)=\dfrac{x+2}{3x+4}$ とおくと

$$(3x+4)y=x+2$$
$$(3y-1)x=-4y+2$$
$$\therefore\quad x=\frac{-4y+2}{3y-1}$$

$d>0$ に注意して

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\underline{\boldsymbol{\frac{4x-2}{-3x+1}}}$$

【注意】

- 問題文で $d>0$ としてあるのは，$f(x)=\dfrac{-4x+2}{3x-1}$ という答を排除するためのものです。
- **90** のように合成を実行して，分母を払い，係数比較にもち込んでもよいが，やはり逆関数を用いる解法がスマート。

2　数列の極限

2.1　$1/n \to 0 \ (n \to \infty)$

問題

93 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^2+4^2+\cdots\cdots+(2n)^2} = \boxed{}$ である。

（大阪工業大）

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+2}-n\right)$ を求めよ。（成蹊大）

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+3n}-n} = \boxed{}$ （北見工業大）

94 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an+2}-\sqrt{n^2+2n+3}\right)=3$ が成り立つとき，定数 a の値は $\boxed{}$ である。（摂南大）

チェック・チェック

93 (1) まずは，分母の和の計算をします。$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ は覚えていますね。

(2) 次の式を使います。

$$\sqrt{A}-\sqrt{B} = \frac{(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{(\sqrt{A}+\sqrt{B})} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

(3) 次の式を使います。

$$\frac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B})} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B}$$

94 これも $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ の処理がポイントです。

解答・解説

93 (1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^2+4^2+\cdots\cdots+(2n)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\boldsymbol{4\sum_{k=1}^{n}k^2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1\cdot 2}=\underline{\boldsymbol{\frac{3}{4}}}$$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n+2}-n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n+2}-n)\boldsymbol{(\sqrt{n^2+3n+2}+n)}}{\boldsymbol{\sqrt{n^2+3n+2}+n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{\sqrt{n^2+3n+2}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+1}=\frac{3}{1+1}=\underline{\boldsymbol{\frac{3}{2}}}$$

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+3n}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\boldsymbol{(\sqrt{n^2+3n}+n)}}{(\sqrt{n^2+3n}-n)\boldsymbol{(\sqrt{n^2+3n}+n)}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+3n}+n)}{3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}{3}$$

$$=\frac{2(1+1)}{3}=\underline{\boldsymbol{\frac{4}{3}}}$$

94 $\displaystyle I=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+2}-\sqrt{n^2+2n+3})$ とおくと

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+an+2}-\sqrt{n^2+2n+3})\boldsymbol{(\sqrt{n^2+an+2}+\sqrt{n^2+2n+3})}}{\boldsymbol{\sqrt{n^2+an+2}+\sqrt{n^2+2n+3}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)n-1}{\sqrt{n^2+an+2}+\sqrt{n^2+2n+3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a-2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}}=\frac{a-2}{2}$$

$I=3$ より $\displaystyle \frac{a-2}{2}=3$ $\quad\therefore\quad \underline{\boldsymbol{a=8}}$

2.2　r^n $(n \to \infty)$，ハサミウチの原理

問題

95 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+4^n}{3^n+4^n}$ を求めよ。（東京電機大）

96 n が自然数で，$x \geqq 0$ であるとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+3}-2x+3}{x^n+1}$ を求めよ。（名城大　改）

97 $0<a<b$ である定数 a，b がある。$x_n = \left(\dfrac{a^n}{b}+\dfrac{b^n}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ とおくとき

(1) 不等式 $b^n < a(x_n)^n < 2b^n$ を証明せよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。（立命館大）

チェック・チェック

95，**96** 次の定理を使います。

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} +\infty & (r>1 \text{ のとき}) \\ 1 & (r=1 \text{ のとき}) \\ 0 & (-1<r<1 \text{ のとき}) \\ \text{振動} & (r \leqq -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限

96 では，$0 \leqq x < 1$，$x=1$，$x>1$ の場合分けが必要となります。

97 (1) 右辺 $-$ 左辺 >0 を確認します。

(2) $0<b^n<a(x_n)^n<2b^n$ なので，自然対数をとると

$$n\log b < \log a + n\log x_n < \log 2 + n\log b$$

そして，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log x_n$ について調べます。このとき，ハサミウチの原理を使います。すなわち

$a_n < x_n < b_n$ において

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \text{ ならば } \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

ハサミウチの原理

解答・解説

95 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+4^n}{3^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=\frac{0+1}{0+1}=\underline{\mathbf{1}}$

96 $x \geqq 0$ であるから

(i) $0 \leqq x < 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+3}=0$ より

$$与式=\frac{0-2x+3}{0+1}=-2x+3$$

(ii) $x=1$ のとき

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{n+3}-2\cdot1+3}{1^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2}=1$$

(iii) $x>1$ のとき

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{x^3+\dfrac{-2x+3}{x^n}}{1+\dfrac{1}{x^n}}=x^3$$

(i)，(ii)，(iii) より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+3}-2x+3}{x^n+1}=\underline{\begin{cases}\mathbf{-2x+3} & \mathbf{(0 \leqq x \leqq 1\ のとき)}\\ \mathbf{x^3} & \mathbf{(x \geqq 1\ のとき)}\end{cases}}$$

97 (1) $a(x_n)^n=a\left(\dfrac{a^n}{b}+\dfrac{b^n}{a}\right)=\dfrac{a}{b}a^n+b^n$ かつ $0<a<b$ より

$\mathbf{a(x_n)^n-b^n}=\left(\dfrac{a}{b}a^n+b^n\right)-b^n=\dfrac{a}{b}a^n\ \mathbf{>0}$

$\mathbf{2b^n-a(x_n)^n}=2b^n-\left(\dfrac{a}{b}a^n+b^n\right)=b^n-\dfrac{a}{b}a^n=\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b}\ \mathbf{>0}$

よって，不等式 $b^n<a(x_n)^n<2b^n$ は成立する。 （証終）

(2) $(0<)\ b^n<a(x_n)^n<2b^n$ において各式の**自然対数をとる**と

$$n\log b<\log a+n\log x_n<\log 2+n\log b$$

$$\log b-\frac{\log a}{n}<\log x_n<\log b+\frac{\log 2-\log a}{n}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log b-\frac{\log a}{n}\right)=\log b,\quad \lim_{n\to\infty}\left(\log b+\frac{\log 2-\log a}{n}\right)=\log b$$

であるから，**ハサミウチの原理**より

$$\lim_{n\to\infty}\log x_n=\log b$$

対数関数の連続性より

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\underline{\boldsymbol{b}}$$

2.3　無限級数

問題

98 次の各問いに答えよ。

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+\cdots+n}$ の和は $\boxed{}$。（福岡大）

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ の和の値は $\boxed{}$ である。（関西大）

99 自然数 n に対して $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos k\pi$ とおく。このとき，S_n および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。（東京農工大）

100 無限級数 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{5}{3^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{5}{3^3}+\cdots$ の和を求めよ。

（東京電機大）

101 (1) k を自然数とする。不等式 $\sqrt{k}+\sqrt{k-1}<2\sqrt{k}<\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$ を用いて，$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\dfrac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$ を示せ。

(2) n を自然数とする。不等式 $\sqrt{n+1}-1<\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{n}$ を示せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kn}}$ を求めよ。（神戸商船大）

チェック・チェック

98 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の定義は“**部分和の極限**”です。すなわち無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ において，部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ を考え，数列 $\{S_n\}$ が S に収束するとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**収束する**といい，S を $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の**和**といいます。

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

(1)，(2) とも部分分数分解して，$\sum$(階差) の形にします。

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$
$$\frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$$

99 $\cos k\pi = \begin{cases} 1 & (k=0,\ 2,\ 4,\ \cdots) \\ -1 & (k=1,\ 3,\ 5,\ \cdots) \end{cases} = (-1)^k$ です。

100 分子をみると，1，5，1，5，$\cdots$ の繰り返しになっているので，部分和の数列 $\{S_n\}$ は，n が偶数であるか奇数であるかで**場合分け**しなければなりません。

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = \alpha \text{ かつ } \lim_{m\to\infty} S_{2m-1} = \beta$$

であるとき

$\alpha = \beta$ ならば，$\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$

$\alpha \fallingdotseq \beta$ ならば，$\{S_n\}$ は発散

です。

101 (1) 逆数をとります。

(2) (1) を利用します。左側，右側の式は**階差**になっています。

(3) ハサミウチの原理を利用します。

解答・解説

98 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{2}k(k+1)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=2(1-0)=\underline{2}$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-2}}-\frac{1}{n}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-0-0\right)=\underline{\frac{3}{4}}$$

99 $\cos k\pi=\begin{cases}1 & (k\text{ が偶数})\\ -1 & (k\text{ が奇数})\end{cases}=(-1)^k$ より $\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos k\pi=\left(-\frac{1}{2}\right)^k$ である

から

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k=1\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\underline{\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}}$$

さらに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\underline{\frac{2}{3}}$

100 第 n 項までの和を S_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。

n が奇数のとき，$n=2m-1$（m は自然数）と表せ

$$S_{2m-1}=\frac{1}{2}+\frac{5}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{5}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{5}{3^{m-1}}+\frac{1}{2^m}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\right\}+\frac{5}{3}\left\{1+\frac{1}{3}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{m-2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^m}{1-\frac{1}{2}}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^m+\frac{5}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}\right\}$$

n が偶数のとき，$n=2m$（m は自然数）と表せ

$$
\begin{aligned}
S_{2m} &= \frac{1}{2}+\frac{5}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{5}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^m}+\frac{5}{3^m} \\
&= \frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\right\}+\frac{5}{3}\left\{1+\frac{1}{3}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^m}{1-\frac{1}{2}}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^m}{1-\frac{1}{3}} \\
&= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^m+\frac{5}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^m\right\}
\end{aligned}
$$

これらの極限を考えると

$$
\lim_{m\to\infty} S_{2m-1} = 1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2},\quad \lim_{m\to\infty} S_{2m}=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}
$$

となり一致するので，求める和は

$$
\lim_{n\to\infty} S_n = \underline{\boldsymbol{\frac{7}{2}}}
$$

101 (1) $0<\sqrt{k}+\sqrt{k-1}<2\sqrt{k}<\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$ より，逆数をとると

$$
\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} > \frac{1}{2\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} &= \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}\times\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}=\sqrt{k}-\sqrt{k-1} \\
\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} &= \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\times\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}
\end{aligned}
$$

なので

$$
\sqrt{k+1}-\sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k}-\sqrt{k-1}
$$

が成り立つ。 （証終）

(2) (1) より

$$
\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)
$$

$$
\therefore\quad \sqrt{n+1}-1 < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{n} \quad \cdots\cdots ①
$$

（証終）

(3) ①の各辺に $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ をかけて

$$
\frac{2(\sqrt{n+1}-1)}{\sqrt{n}} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kn}} < 2
$$

ここで

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n+1}-1)}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=2
$$

なので，**ハサミウチの原理**より

$$
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kn}} = \underline{\boldsymbol{2}}
$$

2.4　無限等比級数

問題

102 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)^k$ を計算すれば $\boxed{}$ である。　（日本工業大）

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}\right)$ の和は $\boxed{}$　（東海大）

(3) $\displaystyle\frac{3+4}{5}+\frac{3^2+4^2}{5^2}+\cdots+\frac{3^n+4^n}{5^n}+\cdots=\boxed{}$　（神奈川大）

(4) $r=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}r^k\right)=\boxed{}$ である。　（南山大）

チェック・チェック

102 (1) 無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ $(a \neq 0)$ の収束・発散は次の通りです。

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{a}{1-r} & (-1<r<1 \text{ のとき})\\ \text{発散} & (r \leqq -1,\ r \geqq 1 \text{ のとき})\end{cases}$$

無限等比級数の収束・発散

(2)，(3) 無限級数の演算では

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ が収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ であるならば

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)=\alpha \pm \beta\ (\text{複号同順})$$

無限級数の和の性質

(4) 無限級数の計算を 2 度行います。

解答・解説

102 (1) $0 < \sqrt{3}-1 < 1$ より

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)^k = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)}{1-(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2(2-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{2(2-\sqrt{3})}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2(4-3)} = \underline{\boldsymbol{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}}$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ はともに収束し

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}\right) = \frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{12}}}$$

(3) $$\frac{3+4}{5}+\frac{3^2+4^2}{5^2}+\cdots+\frac{3^n+4^n}{5^n}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ はともに収束し

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{3}{2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{5}} = 4$$

であるから

$$\text{与式} = \frac{3}{2}+4 = \underline{\boldsymbol{\frac{11}{2}}}$$

(4) $r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき $0 < r < 1$ より，初項 r^n，公比 r の無限等比級数は収束し

$$\sum_{k=n}^{\infty} r^k = \frac{r^n}{1-r}$$

となるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty} r^k\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{1-r} = \frac{r}{1-r}\cdot\frac{1}{1-r} = \frac{r}{(1-r)^2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(3-\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{7-3\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-1)(7+3\sqrt{5})}{49-45} = \frac{4\sqrt{5}+8}{4} = \underline{\boldsymbol{2+\sqrt{5}}}$$

2.5　無限等比級数の収束

問題

103 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，無限級数

$$\tan x + (\tan x)^3 + (\tan x)^5 + \cdots + (\tan x)^{2n-1} + \cdots$$

が収束するような x の範囲は $\boxed{}$ であり，級数の和が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ になるのは $x = \boxed{}$ のときである。　（愛知工業大）

104 等比級数

$$(x^2+x) + \frac{x^2+x}{x^2+x+1} + \frac{x^2+x}{(x^2+x+1)^2} + \cdots + \frac{x^2+x}{(x^2+x+1)^{n-1}} + \cdots$$

について，次の問いに答えよ。

(1) この級数が収束するような x の範囲を求めよ。

(2) また，x がその範囲にあるとき，この等比級数の和を求めよ。

（東北学院大）

チェック・チェック

無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ が収束する条件は，初項 a，公比 r について

$a = 0$ または $-1 < r < 1$

が成立することです。

103 初項 $\tan x$，公比 $\tan^2 x$ の無限等比級数です。

104 初項 $x^2 + x$，公比 $\dfrac{1}{x^2+x+1}$ の無限等比級数です。

解答・解説

103 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，無限級数

$$\tan x + (\tan x)^3 + (\tan x)^5 + \cdots + (\tan x)^{2n-1} + \cdots$$

が収束するための条件は，初項 $\tan x\ (\fallingdotseq 0)$，公比 $(\tan x)^2$ より

$$\boldsymbol{|\tan^2 x| < 1}$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{0 < x < \frac{\pi}{4}}} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\tan x)^{2n-1} = \frac{\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より

$$\tan 2x = \sqrt{3}$$

①より，$0 < 2x < \dfrac{\pi}{2}$ であり

$$2x = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6}}}$$

104 $(x^2+x) + \dfrac{x^2+x}{x^2+x+1} + \dfrac{x^2+x}{(x^2+x+1)^2} + \cdots$

(1) 初項 x^2+x，公比 $\dfrac{1}{x^2+x+1}$ より，この級数が収束する条件は

$$\boldsymbol{x^2 + x = 0 \text{ または } \left|\frac{1}{x^2+x+1}\right| < 1}$$

すなわち

$$x = 0,\ -1 \quad \cdots\cdots \text{①} \quad \text{または} \quad |x^2+x+1| > 1 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

$x^2+x+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ より

$$\text{②} \iff x^2+x+1 > 1 \qquad \therefore\quad x < -1,\ 0 < x$$

「①または②」をまとめると

$$\underline{\boldsymbol{x \leqq -1,\ 0 \leqq x}}$$

(2) この等比級数の和 S は

<u>$\boldsymbol{x = -1,\ 0}$ **のとき**</u>，初項 $x^2+x=0$ より

$$S = \underline{\boldsymbol{0}}$$

<u>$\boldsymbol{x < -1,\ 0 < x}$ **のとき**</u>

$$S = \frac{x^2+x}{1-\dfrac{1}{x^2+x+1}} = \underline{\boldsymbol{x^2+x+1}}$$

2.6　循環小数

問題

105 (1) 循環小数は，たとえば，$3.21818181\cdots$ の場合，$3.2\dot{1}\dot{8}$ と表される。$\dfrac{1}{99}$ をこのような循環小数で表すと $\boxed{}$ であり，$3.2\dot{1}\dot{8}$ を既約分数で表すと $\boxed{}$ である。（福岡大）

(2) $0.\dot{3}0\dot{6}$ を既約分数で表すと，$\boxed{}$ となる。（神奈川工科大）

チェック・チェック

105 同じ数字の列を無限に繰り返す小数を**循環小数**といい，循環節（繰り返される数字の列）の始めと終わりの数字の上には ˙ をつけます。

$$\begin{aligned} 0.3\dot{6} &= 0.3666\cdots\cdots \\ &= 0.3 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + \cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0.\dot{3}\dot{6} &= 0.363636\cdots\cdots \\ &= 0.36 + 0.0036 + 0.000036 + \cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0.\dot{3}0\dot{6} &= 0.306306306\cdots\cdots \\ &= 0.306 + 0.000306 + 0.000000306 + \cdots\cdots \end{aligned}$$

解答・解説

105 (1) わり算を実行すると

$$\begin{array}{r} 0.0101\cdots \\ 99\overline{)1\ 00} \\ \underline{99} \\ 100 \\ \underline{99} \\ 1\cdots \end{array}$$

$$\frac{1}{99} = \underline{\mathbf{0.\dot{0}\dot{1}}}$$

また

$$3.2\dot{1}\dot{8} = 3.2 + 0.018 + 0.00018 + 0.0000018 + \cdots\cdots$$
$$= \frac{32}{10} + \frac{18}{1000} + \frac{18}{1000}\cdot\frac{1}{100} + \frac{18}{1000}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots\cdots$$
$$= \frac{32}{10} + \frac{\frac{18}{1000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{32}{10} + \frac{18}{990} = \frac{16}{5} + \frac{1}{55} = \underline{\mathbf{\frac{177}{55}}}$$

(2)
$$0.\dot{3}0\dot{6} = 0.306 + 0.000306 + 0.000000306 + \cdots\cdots$$
$$= \frac{306}{1000} + \frac{306}{1000}\cdot\frac{1}{1000} + \frac{306}{1000}\cdot\left(\frac{1}{1000}\right)^2 + \cdots\cdots$$
$$= \frac{306}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{306}{999} = \underline{\mathbf{\frac{34}{111}}}$$

2.7　無限ベキ級数

問題

106 次の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対して，$2^n > n$ であることを示せ。

(2) 数列の和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ を求めよ。

(3) $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。　　（広島大）

107 $0 < x < 1$ に対して，$\frac{1}{x} = 1 + h$ とおくと $h > 0$ である。二項定理を用いて，$\frac{1}{x^n} > \frac{n(n-1)}{2}h^2$ $(n \geqq 2)$ が示されるから $\lim_{n\to\infty} nx^n = \boxed{}$ である。

したがって，$S_n = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}$ とおくと，$\lim_{n\to\infty} S_n = \boxed{}$ である。　　（芝浦工業大）

チェック・チェック

$\sum_{k=1}^{n} a_k r^k$ を r の**ベキ級数**といいます。とくに

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}\left(= \sum_{k=1}^{n}(\text{等差})(\text{等比})\right) \quad (r \neq 1)$$

は

$S_n - rS_n$ ("**公比倍してひく**")

を計算して求めることができます。これは，等比数列の和の公式を導くときの手法ですね。

106，**107** ともに，解答の中で $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0\ (|x| < 1)$ を導いて使っています。この事実は覚えておきましょう。

107 の前半を確認しておきます。

$0 < x < 1$ のとき，$\frac{1}{x} > 1$ であり，$\frac{1}{x} = 1 + h$ $(h > 0)$ とおくことができます。二項定理を用いると，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^n} &= (1+h)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 h + {}_n\mathrm{C}_2 h^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n h^n \\ &> {}_n\mathrm{C}_2 h^2 \\ &= \frac{n(n-1)}{2}h^2 \end{aligned}$$

解答・解説

106 (1) 数学的帰納法で $2^n > n$ を示す。
$n=1$ のとき，左辺 $=2$，右辺 $=1$ であり，左辺 $>$ 右辺 は成り立つ。
$n=k$ での成立を仮定すると

$$2^{k+1}=2\cdot 2^k > 2\cdot k = k+k \geqq k+1 \qquad \therefore \quad n=k+1 \text{ でも成立。}$$

よって，すべての自然数 n に対して，$2^n > n$ は成り立つ。（証終）

別解 二項定理を用いると

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\cdot 1^k\cdot 1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \geqq \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 > n$$

(2)
$$S_n = 1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0 + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots ①$$
$$\frac{1}{4}S_n = \qquad 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + (n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + n\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \cdots\cdots ②$$

① − ② より

$$\frac{3}{4}S_n = 1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - n\left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} - n\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} - n\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

よって　$\underline{\boldsymbol{S_n = \frac{16}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} - \frac{4}{3}n\left(\frac{1}{4}\right)^n}}$

(3) (1) の不等式の両辺を平方すると，$4^n > n^2 > 0$ なので，逆数をとって整理すると

$$0 < \frac{1}{4^n} < \frac{1}{n^2} \qquad \therefore \quad 0 < n\left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{1}{n}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ なので，ハサミウチの原理より　$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

また，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ でもあるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{16}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} - \frac{4}{3}n\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = \underline{\boldsymbol{\frac{16}{9}}}$$

107 $\dfrac{1}{x^n} > \dfrac{n(n-1)}{2}h^2$ かつ $x > 0$，$h > 0$ より，$n \geqq 2$ のとき逆数をとって整理すると

$$0 < x^n < \frac{2}{n(n-1)h^2} \qquad \therefore \quad 0 < nx^n < \frac{2}{(n-1)h^2}$$

さらに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n-1)h^2} = 0$ なので，**ハサミウチの原理**より

$$\lim_{n\to\infty} nx^n = \underline{\mathbf{0}}$$

また，$x \fallingdotseq 1$ より

$$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} \qquad \cdots\cdots ①$$
$$xS_n = \quad x + 2x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-1} + nx^n \qquad \cdots\cdots ②$$

① − ② より

$$(1-x)S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} - nx^n = \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

$0 < x < 1$ なので　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{(1-x)^2}}}$

別解 $x \fallingdotseq 1$ より

$$x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x(1-x^n)}{1-x}$$

両辺を x で微分して

$$1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} = \frac{\{1-(n+1)x^n\}(1-x) + x(1-x^n)}{(1-x)^2}$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - nx^n - x^n + x(nx^n)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

2.8 漸化式と極限

問題

108 $f(x)$ を実数を係数とする x の多項式として，ある実数値 a を初項 a_1 の値とする数列 a_1，a_2，$\cdots$ を，漸化式

$$a_{n+1} = f(a_n),\ n = 1,\ 2,\ \cdots$$

で定義する。このとき実数 α が方程式 $x = f(x)$ の解であることは $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であるための $\boxed{}$。

［選択欄］

(a) 必要条件であるが十分条件でない

(b) 十分条件であるが必要条件でない

(c) 必要十分条件である

(d) 必要条件でも十分条件でもない　（摂南大）

チェック・チェック

108 漸化式 $a_{n+1} = f(a_n)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ が極限値 α をもつとすると

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$$

であり，$f(x)$ は連続なので，$\alpha = f(\alpha)$ が成り立ちます。すなわち

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Longrightarrow \alpha = f(\alpha)$$

しかし，逆は成り立つでしょうか？成り立たないなら反例を示しましょう。

解答・解説

108　$\alpha = f(\alpha) \underset{\times}{\overset{\circ}{\leftrightarrows}} \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$

$\leftarrow$ の証）$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$ でもある。多項式 $f(x)$ は連続な関数であるから

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(\alpha)$$

すなわち，α は方程式 $x = f(x)$ の解である。

$\rightarrow$ の反例） $a_{n+1} = 2a_n$，$a_1 = 1$ とすると $f(x) = 2x$ であり，$x = f(x)$ の解 α は $\alpha = 0$ であるが，$a_n = 2^{n-1}$ なので

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \therefore \quad \alpha \neq \lim_{n\to\infty} a_n$$

(a) 必要条件であるが十分条件でない

2.9　2 項間漸化式と極限

問題

109 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + 1\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ。　　(西日本工業大)

チェック・チェック

109 2 項間漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ で定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めるには

$$t = pt + q$$

の解 α を使って

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$$

と変形します。これは数列 $\{a_n - \alpha\}$ が初項 $a_1 - \alpha$，公比 p の等比数列であることを示しています。

解答・解説

109 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+1$

(1) $\boldsymbol{t=\dfrac{1}{3}t+1}$ を解くと

$$t=\frac{3}{2}$$

よって，与式は次のように変形できる。

$$\boldsymbol{a_{n+1}-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{3}{2}\right)}$$

数列 $\left\{a_n-\dfrac{3}{2}\right\}$ は，初項 $a_1-\dfrac{3}{2}=1-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$a_n-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{a_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}}$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ より

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\underline{\boldsymbol{\frac{3}{2}}}$$

2.10　3 項間漸化式と極限

問題

110 $a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=\dfrac{1}{4}(a_{n+1}+3a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を n を用いて表せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n を用いて表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。　(宮崎大)

チェック・チェック

110 3 項間漸化式 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ で定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めるには

$$t^2+pt+q=0$$

の解 α，β を使って

$$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$$

と変形します。$\alpha=\beta$（重解）のときは

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

です。本問では，$t^2=\dfrac{1}{4}(t+3)$ より

$$4t^2-t-3=0 \qquad \therefore\quad t=-\frac{3}{4},\ 1$$

$$\begin{cases} a_{n+2}-a_{n+1}=-\dfrac{3}{4}(a_{n+1}-a_n) & \cdots\cdots ① \\ a_{n+2}+\dfrac{3}{4}a_{n+1}=1\cdot\left(a_{n+1}+\dfrac{3}{4}a_n\right) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を考えればよいのですが，(1) より①が得られるので，解答では①だけで一般項を求めてみます。階差数列と一般項の関係を使います。

解答・解説

110 (1) $b_n = a_{n+1} - a_n \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと

$$b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$$

これに，$a_{n+2} = \frac{1}{4}(a_{n+1} + 3a_n)$ を代入すると

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_{n+1} + 3a_n) - a_{n+1} = -\frac{3}{4}(a_{n+1} - a_n) = -\frac{3}{4}b_n$$

$$\therefore \quad b_{n+1} = -\frac{3}{4}b_n$$

また，$b_1 = a_2 - a_1 = 1 - 0 = 1$ であり，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = 1$，公比 $-\frac{3}{4}$ の等比数列であるから

$$b_n = 1 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \underline{\boldsymbol{\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}}}$$

(2) (1) より

$$a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1} = 0 + \frac{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)}$$

$$= \frac{4}{7}\left\{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ。

$$\therefore \quad a_n = \underline{\boldsymbol{\frac{4}{7}\left\{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\} \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)}}$$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 0$ より　$\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\boldsymbol{\frac{4}{7}}}$

【参考】$t^2 = \frac{1}{4}(t+3)$ を解くと

$$4t^2 - t - 3 = 0 \qquad (4t+3)(t-1) = 0 \qquad \therefore \quad t = -\frac{3}{4},\ 1$$

これより与えられた漸化式は次の 2 通りに変形できる。

$$\begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} = -\dfrac{3}{4}(a_{n+1} - a_n) & \cdots\cdots ① \\ a_{n+2} + \dfrac{3}{4}a_{n+1} = 1 \cdot \left(a_{n+1} + \dfrac{3}{4}a_n\right) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より　$a_{n+1} - a_n = (a_2 - a_1)\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 1 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ ……①′

②より　$a_{n+1} + \frac{3}{4}a_n = \left(a_2 + \frac{3}{4}a_1\right) \cdot 1^{n-1} = 1$ ……②′

②′ − ①′ より　$\frac{7}{4}a_n = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$$\therefore \quad a_n = \frac{4}{7}\left\{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\} \longrightarrow \frac{4}{7} \ (n \to \infty)$$

2.11　連立漸化式と極限

問題

111 p，q は $p>0$，$q>0$，$p+q=1$ をみたす定数とする。$a_0=1$，$b_0=2$ とし，a_n，b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を

$$a_n = pa_{n-1}+qb_{n-1}$$
$$b_n = pb_{n-1}+qa_n$$

により定める。

(1) $c_n=b_n-a_n$ とおくとき，c_n が等比数列であることを示せ。

(2) a_n と $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(3) b_n と $\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。　　(名古屋市立大)

チェック・チェック

111 連立漸化式 $\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n \\ b_{n+1}=ra_n+sb_n \end{cases}$ の一般解を求める一つの方法は $\{a_n-tb_n\}$ が等比数列となる t を見つけることです。

$$a_{n+1}-tb_{n+1}=(p-rt)a_n+(q-st)b_n=(p-rt)\left(a_n-\frac{st-q}{p-rt}b_n\right)$$

であり，$t=\dfrac{st-q}{p-rt}$ を変形すると，$\boldsymbol{t=\dfrac{pt+q}{rt+s}}$ となります。$t=\dfrac{pt+q}{rt+s}$ の解を α，β とすると

数列 $\{a_n-\alpha b_n\}$，$\{a_n-\beta b_n\}$

はどちらも等比数列となります。

本問は $\begin{cases} a_n=pa_{n-1}+qb_{n-1} \\ b_n=pb_{n-1}+q\underline{a_n} \end{cases}$ と少し変則的な式になっています。

$$b_n=\bigcirc b_{n-1}+\triangle \underline{a_{n-1}}$$

と直してから，誘導にのって式を変形していきましょう。

解答・解説

111 (1) $a_n = pa_{n-1} + qb_{n-1}$ ……①

$b_n = pb_{n-1} + qa_n$ ……②

①を②に代入すると

$$\begin{aligned} b_n &= pb_{n-1} + q(pa_{n-1} + qb_{n-1}) \\ &= pqa_{n-1} + (p + q^2)b_{n-1} \quad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

③−①より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b_n - a_n} &= (pq - p)a_{n-1} + (p + q^2 - q)b_{n-1} \\ &= p(q-1)a_{n-1} + \{p + q(q-1)\}b_{n-1} \\ &= -p^2a_{n-1} + p^2b_{n-1} \quad (\because\ p + q = 1) \\ &\boldsymbol{= p^2(b_{n-1} - a_{n-1})} \end{aligned}$$

$c_n = b_n - a_n$ とおくと

$$c_n = p^2c_{n-1}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すなわち，$\{c_n\}$ は初項 $c_0 = b_0 - a_0 = 2 - 1 = 1$，公比 p^2 の等比数列である。（証終）

(2) (1) より

$$c_n = b_n - a_n = 1 \cdot (p^2)^n = p^{2n}$$

$$\therefore\quad b_{n-1} = a_{n-1} + p^{2(n-1)} \quad \cdots\cdots ④$$

④を①に代入すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_n} &= pa_{n-1} + q(a_{n-1} + p^{2(n-1)}) \\ &\boldsymbol{= a_{n-1} + qp^{2(n-1)}} \quad (\because\ p + q = 1) \end{aligned}$$

$n \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} qp^{2(k-1)} = 1 + q \cdot \frac{1 - p^{2n}}{1 - p^2} \\ &= 1 + \frac{1 - p^{2n}}{1 + p} \quad (\because\ p + q = 1) \end{aligned}$$

これは $n = 0$ のときも成り立つ。

$$\begin{aligned} \therefore\quad a_n &= 1 + \frac{1 - p^{2n}}{1 + p} \\ &= \boldsymbol{\frac{2 + p - p^{2n}}{1 + p}\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)} \end{aligned}$$

また $p > 0$，$q > 0$，$p + q = 1$ より $0 < p < 1$ なので，$\lim_{n \to \infty} p^{2n} = 0$ であり

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \boldsymbol{\frac{2 + p}{1 + p}}$$

(3) $$\begin{aligned} b_n = a_n + c_n &= \frac{2 + p - p^{2n}}{1 + p} + p^{2n} \\ &= \boldsymbol{\frac{2 + p + p^{2n+1}}{1 + p}\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)} \end{aligned}$$

$\lim_{n \to \infty} p^{2n+1} = 0$ より　$\lim_{n \to \infty} b_n = \boldsymbol{\dfrac{2 + p}{1 + p}}$

2.12　分数漸化式と極限

問題

112 次の式で与えられる数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ。

$$a_1 = 5,\ a_{n+1} = \frac{5a_n - 16}{a_n - 3}\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

(1) 数列の一般項 a_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。　(岐阜大)

チェック・チェック

112 **分数漸化式** $a_{n+1} = \dfrac{pa_n + q}{ra_n + s}$ の一般解を求めるには $\boldsymbol{t = \dfrac{pt + q}{rt + s}}$ の解 α, β を使って

$$\text{数列}\left\{\frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta}\right\}$$

をつくります。重解 $\alpha = \beta$ のときは数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n - \alpha}\right\}$ を考えます。

本問は重解のタイプになっています。

しかし，ノーヒントでこれを出題するというのは少々酷です。一般項を推定し，数学的帰納法でそれを確認することが出題者の意図かもしれません。

解答・解説

112 (1) $a_{n+1}=\dfrac{5a_n-16}{a_n-3}$

$\boldsymbol{t=\dfrac{5t-16}{t-3}}$ を解くと

$$t^2-8t+16=0 \qquad \therefore \quad t=4\ (\text{重解})$$

数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-4}\right\}$ を考える。

$$\boldsymbol{\frac{1}{a_{n+1}-4}}=\frac{1}{\dfrac{5a_n-16}{a_n-3}-4}=\frac{a_n-3}{(5a_n-16)-4(a_n-3)}$$
$$=\frac{a_n-3}{a_n-4}=\boldsymbol{1+\frac{1}{a_n-4}}$$

より，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-4}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1-4}=\dfrac{1}{5-4}=1$，公差 1 の等差数列である。したがって

$$\frac{1}{a_n-4}=1+(n-1)\cdot 1=n$$
$$\therefore \quad a_n=\underline{\boldsymbol{4+\frac{1}{n}}}$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ より

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\underline{\boldsymbol{4}}$$

【注意】 $a_1=5,\ a_2=\dfrac{9}{2},\ a_3=\dfrac{13}{3},\ a_4=\dfrac{17}{4},\ a_5=\dfrac{21}{5},\ \cdots$

となります。これらから $a_n=\dfrac{4n+1}{n}=4+\dfrac{1}{n}$ を**推定**せよ，というのが出題者の意図でしょうか。このあとは**数学的帰納法**により推定の立証を行います。

2.13 漸化式とハサミウチの原理

問題

113 数列 $\{a_n\}$ は

$$0 < a_1 < 3,\ a_{n+1} = 1 + \sqrt{1 + a_n}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたすものとする。このとき，次の (1)，(2)，(3) を示せ。

(1) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$0 < a_n < 3$ が成り立つ。

(2) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$3 - a_n \leqq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(3 - a_1)$ が成り立つ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ （神戸大）

114 次の条件で定められる $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ。

$$a_1 = 4,\ a_{n+1} = \frac{2{a_n}^2 + a_n + 6}{3a_n}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) すべての自然数 n に対し，$a_n \geqq 3$ が成り立つことを，n についての数学的帰納法で示せ。

(2) すべての自然数 n に対し，$a_{n+1} - 3 \leqq \dfrac{2}{3}(a_n - 3)$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。 （福井大）

115 関数 $f(x) = 1 - x^2$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f(a) = a$ をみたす正の実数 a を求めよ。

(2) a を (1) で求めた実数とする。$x \geqq \dfrac{1}{2}$ ならば

$$|\,f(x) - f(a)\,| \geqq \frac{\sqrt{5}}{2}|\,x - a\,|$$

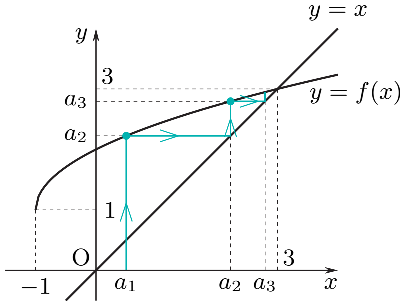
となることを示せ。

(3) a を (1) で求めた実数とする。$\dfrac{1}{2} \leqq x_1 \leqq 1$ として

$$x_{n+1} = f(x_n),\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

で決まる数列 $\{x_n\}$ を考える。すべての n に対して，$\dfrac{1}{2} \leqq x_n \leqq 1$ が成り立つならば，$x_1 = a$ であることを示せ。 （九州大）

チェック・チェック



113 グラフをかくと収束の様子がよくわかります。

$$f(x)=1+\sqrt{1+x}$$

とおくと

$$a_{n+1}=f(a_n)$$

であり，直線 $y=x$ で折れる階段状のグラフがかけます。

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha \quad (\alpha=f(\alpha))$$

の様子がわかりますね。本問ではこれを式で示すことを誘導しています。グラフをかいて納得するだけではダメです。

$$|a_n-\alpha|\leqq\beta|a_{n-1}-\alpha|$$

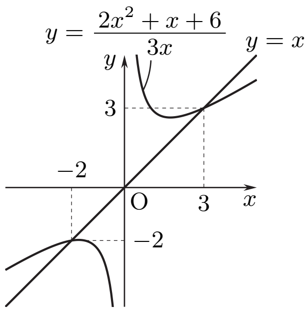
を示して，これを繰り返し使うと

$$\begin{aligned}(0\leqq)\ |a_n-\alpha| &\leqq \beta|a_{n-1}-\alpha|\\ &\leqq \beta\cdot\beta|a_{n-2}-\alpha|\\ &\leqq \cdots \leqq \beta^{n-1}|a_1-\alpha|\end{aligned}$$

$|\beta|<1$ のとき $\lim_{n\to\infty}\beta^{n-1}|a_1-\alpha|=0$ ですから，**ハサミウチの原理**により

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha|=0 \qquad \therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$$

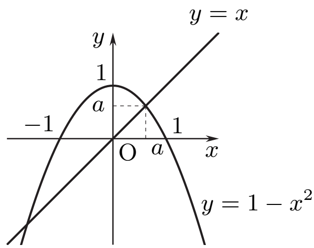
となります。



114 (2) $\alpha=f(\alpha)$ すなわち $\alpha=\dfrac{2\alpha^2+\alpha+6}{3\alpha}$ を解くと

$$\alpha^2-\alpha-6=0$$
$$(\alpha-3)(\alpha+2)=0$$
$$\therefore\quad \alpha=3,\ -2$$

$\{a_n-3\}$ を考えるか，$\{a_n+2\}$ を考えるかは a_1 のとり方により決まります。



115 (1)，(2) は **113**，**114** と同じ流れですが，(3) では x_1 について問われています。**背理法**を利用しましょう。

解答・解説

113 (1) $n=1$ のときは条件そのものである。

$n=k$ のときの成立を仮定すると

$$0<a_{k+1}=1+\sqrt{1+a_k}<1+\sqrt{1+3}=3$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立ち，**数学的帰納法**によりすべての自然数 n に対して，$0<a_n<3$ が成り立つ。 （証終）

(2) $$3-a_{n+1}=3-(1+\sqrt{1+a_n})=2-\sqrt{1+a_n}=\frac{4-(1+a_n)}{2+\sqrt{1+a_n}}$$
$$=\frac{1}{2+\sqrt{1+a_n}}\cdot(3-a_n)<\frac{1}{2+\sqrt{1+0}}\cdot(3-a_n)\quad(\because\ (1))$$
$$=\frac{1}{3}\cdot(3-a_n)$$

これより，$n\geqq 2$ のとき

$$3-a_n<\frac{1}{3}(3-a_{n-1})<\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}(3-a_{n-2})<\cdots<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3-a_1)$$

$n=1$ のときは等号が成立する。

よって，すべての自然数 n に対して $3-a_n\leqq\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3-a_1)$ が成り立つ。 （証終）

(3) (1)，(2) より

$$0<3-a_n\leqq\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3-a_1)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3-a_1)=0$ であるから，**ハサミウチの原理**より

$$\lim_{n\to\infty}(3-a_n)=0\qquad\therefore\quad\lim_{n\to\infty}a_n=3$$ （証終）

114 (1) $n=1$ のとき，$a_1=4\ (\geqq 3)$ より，成り立つ。

$n=k$ のとき，$a_k\geqq 3$ が成り立つと仮定すると

$$a_{k+1}-3=\frac{2{a_k}^2+a_k+6}{3a_k}-3=\frac{2{a_k}^2-8a_k+6}{3a_k}$$
$$=\frac{2(a_k-1)(a_k-3)}{3a_k}\geqq 0\qquad(\because\ a_k\geqq 3)$$

$$\therefore\quad a_{k+1}\geqq 3$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立ち，**数学的帰納法**によりすべての自然数 n に対して，$a_n\geqq 3$ が成り立つ。 （証終）

(2) $$a_{n+1}-3=\frac{2(a_n-1)(a_n-3)}{3a_n}=\frac{2}{3}(a_n-3)\left(1-\frac{1}{a_n}\right)$$

(1) より $a_n-3\geqq 0$ であり，また，$1-\dfrac{1}{a_n}<1$ だから

$$\frac{2}{3}(a_n-3)\left(1-\frac{1}{a_n}\right)\leqq\frac{2}{3}(a_n-3)\cdot 1$$

$$\therefore\quad a_{n+1}-3\leqq\frac{2}{3}(a_n-3)$$ （証終）

(3) (2) より

$$a_n - 3 \leqq \frac{2}{3}(a_{n-1}-3) \quad (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

したがって

$$\begin{aligned} a_n - 3 &\leqq \frac{2}{3}(a_{n-1}-3) \leqq \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}(a_{n-2}-3) = \left(\frac{2}{3}\right)^2(a_{n-2}-3) \\ &\leqq \cdots\cdots \\ &\leqq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(a_1-3) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad 0 \leqq a_n - 3 \leqq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

さらに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$ であるから，**ハサミウチの原理**より

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-3) = 0 \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\mathbf{3}}$$

115 (1) $f(a) = a \iff 1 - a^2 = a \qquad \therefore \quad a^2 + a - 1 = 0$

$a > 0$ より

$$a = \underline{\boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}$$

(2)

$$\begin{aligned} |f(x)-f(a)| &= |(1-x^2)-(1-a^2)| = |-x^2+a^2| \\ &= |x^2-a^2| = |x+a||x-a| \\ &\geqq \left(\frac{1}{2}+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)|x-a| \quad \left(\because\ x \geqq \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}|x-a| \end{aligned}$$

(証終)

(3) すべての n に対して $x_n \geqq \dfrac{1}{2}$ なので，$f(a) = a$ と (2) より，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} |x_n - a| &= |f(x_{n-1}) - f(a)| \geqq \frac{\sqrt{5}}{2}|x_{n-1}-a| \\ &\geqq \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2|x_{n-2}-a| \geqq \cdots \geqq \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}|x_1-a| \end{aligned}$$

$x_1 \neq a$ と仮定すると， $\dfrac{\sqrt{5}}{2} > 1$ より

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}|x_1-a| = \infty \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty}|x_n-a| = \infty$$

これは，すべての n に対して，$\dfrac{1}{2} \leqq x_n \leqq 1$ であることに反する。

$$\therefore \quad x_1 = a$$

(証終)

3　関数の極限

3.1　$f(x)$ $(x \to a)$

問題

116 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \boxed{}$$

（北見工業大）

117 (1) 極限 $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + ax - 12}{\sqrt{x-1} - 1}$ が有限な値になるのは $a = \boxed{}$ のときであり，このとき極限値は $\boxed{}$ となる。（大阪産業大）

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 8} \frac{ax^2 + bx + 8}{\sqrt[3]{x} - 2} = 84$ となるような a，b の値は $(a,\ b) = \boxed{}$ である。（東北学院大）

118 $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{ax + b}{\cos x} = \frac{2}{3}$ のとき，定数 a，b の値を求めよ。（東洋大）

チェック・チェック

116 分子の $\sqrt{} - \sqrt{}$ を変形して，$\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ **を解消**します。

117 次の定理を使います。

> $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ （**α は有限確定値**）かつ $\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = 0$ ならば
> $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = 0$

証明は簡単です。

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) \right\} = \alpha \cdot 0 = 0$$

118 ここでは，さらに $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ も使います。

解答・解説

116 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{1+1}=\underline{1}$$

117 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(\sqrt{x-1}-1)=0$ なので，与式が有限な値になるのは

$\displaystyle\lim_{x\to 2}(x^2+ax-12)=0$　　$4+2a-12=0$　　$\therefore$　$\underline{a=4}$

のときである。このとき

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x-12}{\sqrt{x-1}-1}=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{(x+6)(x-2)}{\sqrt{x-1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+6)(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-1)-1}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x+6)(\sqrt{x-1}+1)=(2+6)(\sqrt{2-1}+1)=\underline{16}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 8}(\sqrt[3]{x}-2)=0$ なので，与式の左辺が有限な値になるのは

$\displaystyle\lim_{x\to 8}(ax^2+bx+8)=0$

$64a+8b+8=0$　　$\therefore$　$b=-8a-1$ ……①

のときである。このとき，$x-2^3=(\sqrt[3]{x}-2)\{(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4\}$ に注意して

$$\lim_{x\to 8}\frac{ax^2-(8a+1)x+8}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\left\{\frac{(ax-1)(x-8)}{\sqrt[3]{x}-2}\cdot\frac{(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4}{(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 8}\frac{(ax-1)(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-2^3}$$
$$=\lim_{x\to 8}(ax-1)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)=(8a-1)(8^{\frac{2}{3}}+2\cdot 8^{\frac{1}{3}}+4)=12(8a-1)$$

$\therefore$　$12(8a-1)=84$　　$8a-1=7$　　$\therefore$　$a=1$

①より　$b=-9$　　$\therefore$　$(a,\ b)=\underline{(1,\ -9)}$

118 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$ であるから，与式が有限な値になるためには $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(ax+b)=0$

すなわち $\dfrac{\pi}{2}a+b=0$ が必要で，このとき

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{at}{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{a}{-\frac{\sin t}{t}}=-a\qquad\left(t=x-\frac{\pi}{2}\text{とおいた}\right)$$

よって

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=\frac{2}{3}\iff b=-\frac{\pi}{2}a\ \text{かつ}\ -a=\frac{2}{3}$$

$\therefore$　$\underline{a=-\dfrac{2}{3},\ b=\dfrac{\pi}{3}}$

3.2 $f(x)$ $(x \to \pm\infty)$

問題

119 $f(x)=\dfrac{3^x}{2^x+3^x}$ とする。このとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\boxed{}$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=\boxed{}$ である。 (北海道工業大)

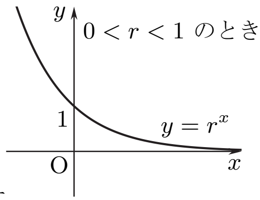
120 (1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{2x}(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})$ を求めよ。 (信州大)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x}+x)$ の値は $\boxed{}$ である。 (会津大)

121 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2-1}-(ax+b)\}=2$ が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。 (大阪工業大)

チェック・チェック

119 $0<r<1$ のときの $y=r^x$ のグラフを考えると
$$\lim_{x\to\infty} r^x=0,\quad \lim_{x\to-\infty} r^x=\infty$$
です。

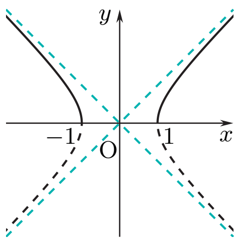


120 (1) $\sqrt{}-\sqrt{}$ を変形して，$\infty\times 0$ を解消します。

(2) $\sqrt{}+x$ を変形して $\infty-\infty$ を解消します。

121 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2-1}-(ax+b+2)\}=0$ ですから，$y=ax+b+2$ は曲線 $y=\sqrt{x^2-1}$ の漸近線です。

$$y=\sqrt{x^2-1} \iff \begin{cases} y^2=x^2-1 \\ y\geqq 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2-y^2=1 \\ y\geqq 0 \end{cases}$$



解答・解説

119 $f(x)=\dfrac{3^x}{2^x+3^x}=\dfrac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0$ より

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\underline{\mathbf{1}}$

また，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=\infty$ より

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\underline{\mathbf{0}}$

120 (1) 与式 $\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{2x}\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})\cdot\frac{\boldsymbol{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}}{\boldsymbol{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}}\right\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\sqrt{2x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\sqrt{2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\underline{-\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}}$$

(2) 与式 $\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\left\{(\sqrt{x^2-x}+x)\cdot\frac{\boldsymbol{\sqrt{x^2-x}-x}}{\boldsymbol{\sqrt{x^2-x}-x}}\right\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}-x}$

ここで $-x=t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であり

与式 $\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\sqrt{t^2+t}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}+1}=\underline{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$

121 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2-1}-(ax+b)\}=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=2$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x=\infty$ より，与式の左辺が有限な値になるのは

$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=0}$ すなわち $1-a=0$ $\therefore$ $\underline{\boldsymbol{a=1}}$

のときである。このとき

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x-b)=2$

$$\therefore\quad b=-2+\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=-2+\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$=-2+\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=\underline{\mathbf{-2}}$$

3.3 $(\sin\theta)/\theta \to 1\ (\theta \to 0)$

問題

122 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\sin x} = \boxed{}$ （東北学院大）

(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(2\sin\theta)}{\theta} = \boxed{}$ （会津大）

123 次の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$ （東京農工大）

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$ （摂南大）

124 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\tan 2x = \boxed{}$ （高知女子大）

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\tan\frac{x+\pi}{2} = \boxed{}$ （神奈川大）

チェック・チェック

122 $\sin\theta$ についての極限の問題です。$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ にもち込みます。

(1) では，$x-\pi=\theta$，(2) では，$2\sin\theta = y$ とおいてみましょう。

123 $\cos\theta$ についての極限の問題です。ここでも $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ にもち込みます。

(1) $1-\cos 2x = 2\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{2} = 2\sin^2 x$ （$\because$ 半角の公式）と変形します。

(2) $1-\cos x$ は (1) と同じ変形です。分母の $\sqrt{}$ も払います。

124 $\tan\theta$ についての極限の問題です。やはり，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ にもち込みます。

(1) $\tan 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$ として，sin，cos の極限に直します。

(2) $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{\tan\theta}$ です。

解答・解説

122 (1) $x-\pi=\theta$ とおくと，$x\to\pi$ のとき $\theta\to 0$ で

$$\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\sin x}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin(\pi+\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{-\dfrac{\sin\theta}{\theta}}=\underline{\mathbf{-1}}$$

(2) $$\frac{\sin(2\sin\theta)}{\theta}=\frac{\sin(2\sin\theta)}{2\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot 2$$

であり，$y=2\sin\theta$ とおくと，$\theta\to 0$ のとき $y\to 0$ で

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(2\sin\theta)}{2\sin\theta}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(2\sin\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(2\sin\theta)}{2\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot 2=1\cdot 1\cdot 2=\underline{\mathbf{2}}$$

123 (1) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\cdot 1^2=\underline{\mathbf{2}}$$

(2) $$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\\
&=\lim_{x\to 0}\left\{2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)-(1-x^2)}\right\}\\
&=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)\right\}\\
&=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{4}\cdot 1^2\cdot(1+1)=\underline{\mathbf{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

124 (1) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\tan 2x&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\\
&=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}=2\cdot 1\cdot 1=\underline{\mathbf{2}}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}x\tan\frac{x+\pi}{2}&=-\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{1}{\tan\dfrac{x}{2}}=-\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{\cos\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\\
&=-\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\cdot\cos\frac{x}{2}\\
&=-2\cdot 1\cdot 1=\underline{\mathbf{-2}}\end{aligned}$$

3.4 e の定義

問題

125 次の問いに答えよ。

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{x}$ を求めよ。 （高知女子大）

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log(e+h)-1}{h} = \boxed{}$ である。ただし，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h} = 1$ を用いてよい。 （日本工業大）

126 次の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{2x}}$ （早稲田大）

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^{(1+h)^2} - e^{h^2+1}}{h}$ （法政大）

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\{\log(n+1) - \log n\}$ （東京工科大）

127 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$ を求めよ。 （小樽商科大）

チェック・チェック

自然対数の底 e はいろいろな形で表現されます。

(1) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$　　(2) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{\log_e(1+h)}{h}=1$

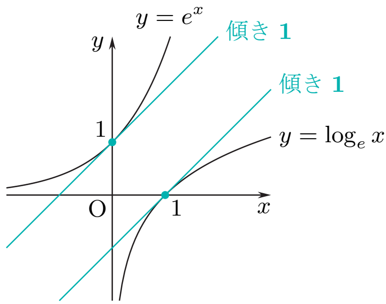
(3) $\displaystyle \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$　　(4) $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

(1)，(2) は右図のように

$y=e^x$，$y=\log_e x$

のグラフ上のそれぞれの点 (0，1)，(1，0) における**接線の傾きが 1** であることを意味しています。

(3)，(4) はそれぞれ，(2)，(3) を変形すれば導くことができます。



125 (1) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ が利用できるように変形します。

126 (1)，(2) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ が利用できるように変形します。

127 $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$，$\displaystyle \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ が利用できるように変形します。

解答・解説

125 (1) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+1-e^{-x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^x-1}{x}-\left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right)\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)$$
$$=1+1=\underline{\mathbf{2}}$$

(2) $$\lim_{h\to 0}\frac{\log(e+h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log\dfrac{e+h}{e}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log\left(1+\dfrac{h}{e}\right)}{h}$$

ここで，$\dfrac{h}{e}=t$ とおくと，$h\to 0$ のとき $t\to 0$ で

$$与式=\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{e\cdot t}=\frac{1}{e}\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=\frac{1}{e}\cdot 1=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{e}}}$$

126 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+e^x)(1-e^x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+e^x}\cdot\frac{-1}{\dfrac{e^x-1}{x}}=\frac{1}{1+1}\cdot\frac{-1}{1}=\underline{\boldsymbol{-\frac{1}{2}}}$$

(2) $$\lim_{h\to 0}\frac{e^{(1+h)^2}-e^{h^2+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{h^2+1}(e^{2h}-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}2e^{h^2+1}\cdot\frac{e^{2h}-1}{2h}$$
$$=2e\cdot 1=\underline{\boldsymbol{2e}}$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}n\{\log(n+1)-\log n\}=\lim_{n\to\infty}n\log\frac{n+1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ なので，対数関数の連続性より

$$与式=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\log e=\underline{\mathbf{1}}$$

127 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{(e^{x^2}-1)\frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)\right\}$$
$$=1\cdot 1^2\cdot(1+1)=\underline{\mathbf{2}}$$

3.5　図形への応用

問題

128 次の問に答えよ。

(1) $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に対し，不等式 $\sin\theta \leqq \theta \leqq \tan\theta$ が成立することを示せ。

(2) 正の実数 x と自然数 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，複素数 $1 + \dfrac{x}{n}i$ の偏角を $\theta_n (0 \leqq \theta_n < 2\pi)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\theta_n$ を求めよ。

(3) (2) で与えた複素数の n 乗 $\left(1 + \dfrac{x}{n}i\right)^n$ の実部を a_n とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。（金沢大）

129 半径 1 の円に内接する正 n 角形の面積を S_n，外接する正 n 角形の面積を T_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2(T_n - S_n)$ を求めよ。（武蔵工業大）

チェック・チェック

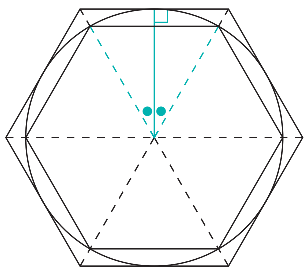
128 (1) 教科書にもある有名な不等式ですね。$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ を示すときの出発点となる不等式です。

(2) (1) の不等式を利用し，ハサミウチの原理を用います。

(3) 複素数の n 乗は，複素数を極形式で表して，**ド・モアブルの定理**を用います。

129 図をかいてみて，S_n，T_n を求めることが第一歩です。たとえば，$n = 6$ のときは右図のようになりますね。

三角関数が絡んだ極限ですから，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ を使います。

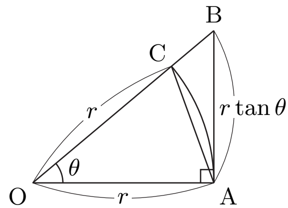


解答・解説

128 (1) $\theta = 0$ のとき

$$\sin\theta = \theta = \tan\theta = 0$$

より成立する。



$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，OA $= r$，$\angle$AOB $= \theta$，$\angle$OAB $= \dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形 OAB を考え，OB 上に OC $= r$ となるように点 C をとると

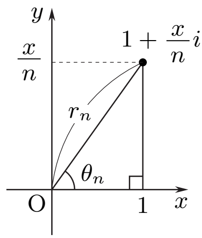
(△OAC の面積) < (おうぎ形 OAC の面積) < (△OAB の面積)

$$\frac{1}{2}r^2\sin\theta < \frac{1}{2}r^2\theta < \frac{1}{2}r^2\tan\theta$$

$$\therefore\quad \sin\theta < \theta < \tan\theta$$

以上より，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で $\sin\theta \leqq \theta \leqq \tan\theta$ が成立する。　(証終)

(2) $1 + \dfrac{x}{n}i$ $\left(\dfrac{x}{n} > 0\right)$ の絶対値を r_n，偏角を θ_n とおくと，$0 < \theta_n < \dfrac{\pi}{2}$ であり



$$r_n = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2}$$

$$\cos\theta_n = \frac{1}{r_n},\quad \sin\theta_n = \frac{x}{nr_n},\quad \tan\theta_n = \frac{x}{n}$$

(1) の結果と $n > 0$ より

$$n\sin\theta_n \leqq n\theta_n \leqq n\tan\theta_n$$

$$\frac{x}{r_n} \leqq n\theta_n \leqq x$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{r_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}} = x$$

よって，**ハサミウチの原理**より

$$\lim_{n\to\infty} n\theta_n = \underline{\boldsymbol{x}}$$

(3) $1 + \dfrac{x}{n}i = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ とド・モアブルの定理より

$$\left(1 + \frac{x}{n}i\right)^n = (r_n)^n(\cos n\theta_n + i\sin n\theta_n)$$

$$\therefore\quad a_n = (r_n)^n\cos n\theta_n$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}(r_n)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2\right\}^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{x^2}}\right\}^{\frac{x^2}{2n}} = e^0 = 1$$

また，cos の連続性より

$$\lim_{n\to\infty}\cos n\theta_n = \cos x$$

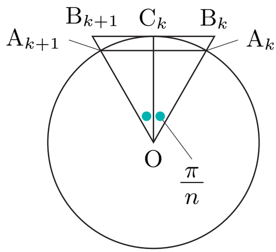
よって

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1\cdot\cos x = \underline{\boldsymbol{\cos x}}$$

129 右図のように，半径 1 の円の中心を O，円に内接する正 n 角形の頂点を A_1，A_2，$\cdots$，A_n，外接する正 n 角形の頂点を B_1，B_2，$\cdots$，B_n とすると

$$\angle A_kOA_{k+1} = \angle B_kOB_{k+1} = \frac{2\pi}{n}$$

$$(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$



より

$$\begin{aligned} S_n &= n \times \triangle OA_kA_{k+1} \\ &= n \times \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \\ &= \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

また，辺 B_kB_{k+1} の中点を C_k とおくと，$OC_k = 1$ であり

$$B_kB_{k+1} = 2B_kC_k = 2OC_k \tan\frac{\pi}{n} = 2\tan\frac{\pi}{n}$$

なので

$$\begin{aligned} T_n &= n \times \triangle OB_kB_{k+1} = n \times \frac{1}{2}B_kB_{k+1} \cdot OC_k \\ &= n\tan\frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} n^2(T_n - S_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} n^2\left(n\tan\frac{\pi}{n} - \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right) \\ &= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\pi}{\theta}\right)^2\left(\frac{\pi}{\theta}\tan\theta - \frac{\pi}{2\theta}\sin 2\theta\right) \quad \left(\because\ \frac{\pi}{n} = \theta とおいた\right) \\ &= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\pi}{\theta}\right)^3\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2}\right) \\ &= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\pi}{\theta}\right)^3 \frac{\sin\theta \cdot (1-\cos^2\theta)}{\cos\theta} \\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\pi^3}{\cos\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3 = \frac{\pi^3}{1} \cdot 1^3 = \underline{\boldsymbol{\pi^3}} \end{aligned}$$