1　導関数

1.1　導関数の定義

問題

130 三角関数の極限に関する公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

を示すことにより，$\sin x$ の導関数が $\cos x$ であることを証明せよ。

（大阪大）

131 関数 $y=f(x)$ の導関数は，$y'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ で求められる。この式にしたがって，$y=\log x$ の導関数を求める。ここでは $x>0$ とする。

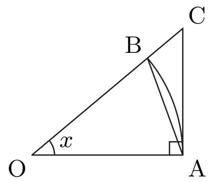
$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{}-\log x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log\left(\boxed{}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\log\boxed{}$$

ここで $t=\dfrac{x}{h}$ とおく。$h>0$ のとき，$h\to +0$ ならば $t\to\infty$ となるので，

$y'=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{x}\boxed{}$ 。$h<0$ のときも同様に考えることで，$\dfrac{d}{dx}\log x=\dfrac{1}{x}$ が得られる。

（静岡理工科大　改）

チェック・チェック



130 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，右図において

$\triangle\mathrm{OAB} <$ おうぎ形 $\mathrm{OAB} < \triangle\mathrm{OAC}$

より

$$\sin x < x < \tan x$$

を導くことができます。$x<0$ のときは，$t=-x$ とおけば $t>0$ ですから，やはり，同じ不等式を得ることができます。

また，関数 $f(x)$ の導関数とは

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

のことをいい，これを $f'(x)$ で表します。

$\sin x$ の導関数は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ であり，和を積に直す公式を用いて

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

が使えるように式を変形します。

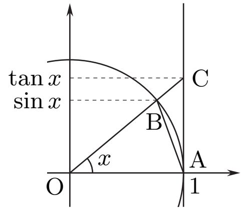
131 $\log x$ の導関数は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}$ であり，e の定義式

$$e=\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$$

が使えるように式を変形します。

解答・解説

130 $x > 0$ のとき，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ として考えてよいので，右図のように A(1, 0)，B($\cos x$, $\sin x$)，C(1, $\tan x$) をとると



$$(\triangle\text{OAB の面積}) < (\text{おうぎ形 OAB の面積}) < (\triangle\text{OAC の面積})$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x < \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$$

$$\boldsymbol{\sin x < x < \tan x} \qquad \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\therefore\quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \cdots\cdots ①$$

$x < 0$ のとき，$-x > 0$ なので，①より

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1 \qquad \cos x < \frac{-\sin x}{-x} < 1$$

$$\therefore\quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

よって，x が 0 に近いとき，x の正負にかかわらず①が成り立つ。$\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ なので，**ハサミウチの原理**より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \cdots\cdots ②$$

次に，$f(x) = \sin x$ とおくと

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\dfrac{h}{2}\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = 1\cdot\cos x \ (\because\ ②)\\ &= \cos x\end{aligned}$$

よって，$\sin x$ の導関数は $\cos x$ である。　　（証終）

131 $y = \log x \ (x > 0)$ より

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\underline{\boldsymbol{\log(x+h)}} - \log x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(\dfrac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\underline{\log\left(\boldsymbol{1+\dfrac{h}{x}}\right)}}{h} = \lim_{h\to 0}\log\underline{\left(\boldsymbol{1+\frac{h}{x}}\right)^{\boldsymbol{\frac{1}{h}}}}$$

$t = \dfrac{x}{h}$ とおく。$h > 0$ のとき，$x > 0$ より $h \to +0$ ならば $t \to \infty$ であり

$$y' = \lim_{t\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{x}} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{x}\underline{\boldsymbol{\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}}} = \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x}$$

$h < 0$ のとき，$x > 0$ より $h \to -0$ ならば $t \to -\infty$ であり

$$y' = \lim_{t\to-\infty}\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{x}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x}$$

以上により，$\dfrac{d}{dx}\log x = \dfrac{1}{x}$ が得られる。

1.2　微分係数

問題

132　$f(x)$ が $x=a$ で微分可能な関数であるとき，式

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a+h)}{h}$$

を $f'(a)$ を用いて表すと，$\boxed{}$ である。　（東北学院大）

133　次の極限値を計算せよ。

$$\lim_{x\to a}\frac{a^2\sin^2 x - x^2\sin^2 a}{x-a}=\boxed{}$$

（立教大）

134　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(3^{\frac{1}{n}}-1)=\boxed{}$　（小樽商科大）

チェック・チェック

132　微分係数の定義式が現れるように式変形します。

133　$f(x)=\sin^2 x$ として

$$\begin{aligned}\frac{a^2\sin^2 x - x^2\sin^2 a}{x-a} &= \frac{a^2\{f(x)-f(a)\}+a^2f(a)-x^2f(a)}{x-a}\\ &= a^2\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-(a+x)f(a)\\ &\longrightarrow a^2f'(a)-2af(a)\ (x\to a)\end{aligned}$$

と変形してもよいですが，$g(x)=a^2\sin^2 x - x^2\sin^2 a$ とすると，$g(a)=0$ より

$$与式=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$$

が得られます。

134　$(a^x)'=a^x\log a$ $(a>0,\ a\neq 1)$ を利用します。

解答・解説

132 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a+h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)\boldsymbol{-f(a)+f(a)}-f(a+h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\cdot 3-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right\}$

ここで

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}=\lim_{3h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}=f'(a)\\ \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)\end{cases}$$

なので

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a+h)}{h}=3f'(a)-f'(a)=\underline{\boldsymbol{2f'(a)}}$$

133 $g(x)=a^2\sin^2 x-x^2\sin^2 a$ とおくと，$g(a)=0$ なので

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}=\boldsymbol{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=g'(a)$$

ここで

$$g'(x)=a^2(\sin^2 x)'-(x^2)'\sin^2 a=a^2\cdot 2\sin x\cos x-2x\sin^2 a$$

であるから

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}=g'(a)=\underline{\boldsymbol{2a^2\sin a\cos a-2a\sin^2 a}}$$

134 $\dfrac{1}{n}=m$ とおくと，$n\to\infty$ のとき，$m\to 0$ であり

$$\lim_{n\to\infty}n(3^{\frac{1}{n}}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\boldsymbol{\lim_{m\to 0}\frac{3^m-3^0}{m}}$$

これは，$f(x)=3^x$ の $x=0$ における微分係数 $f'(0)$ である。$f'(x)=3^x\log 3$ より

$$\lim_{n\to\infty}n(3^{\frac{1}{n}}-1)=f'(0)=\underline{\boldsymbol{\log 3}}$$

1.3　連続，微分可能

問題

135 $-1 < x$ において，関数 $f(x)$ は $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{x^{n+2}+x^n+1}$ で定義されている。$f(x)$ を求めると，ある値 α で $f(x)$ が連続にならないことがわかる。このとき $f(\alpha)$ と等しい値をとるもうひとつの x は $\boxed{}$ である。（関西大）

136 関数 $f(x)$ はすべての実数に対して定義され，微分可能であって
$f(0)=0$ となるものとする。このとき

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ f'(0) & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおけば，$g(x)$ は $x=0$ において連続となる。このことを，微分係数の定義を用いて証明せよ。（慶應義塾大　改）

137 a，b，c，d を実数とし，関数 $f(x)$ を以下のように定める。

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & (x \leqq -1) \\ ax^3+bx^2+cx+d & (-1 < x < 1) \\ -\dfrac{1}{x}+1 & (1 \leqq x) \end{cases}$$

ただし，$f(x)$ は $x=-1$ および $x=1$ で微分可能であるものとする。このとき，a，b，c，d を定めよ。（九州工業大）

チェック・チェック

135 関数 $y=f(x)$ において，その定義域の x の値 a に対して

$\lim_{x\to a} f(x)$ が存在し，かつ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

のとき，$f(x)$ は $\boldsymbol{x=a}$ **で連続**であるといいます。

　また，$\boldsymbol{x=a}$ **で微分可能ならば** $\boldsymbol{x=a}$ **で連続**ですが，逆は成り立たないことにも注意しましょう。

136，**137** 関数 $y=f(x)$ において

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を x が a から b まで変わるときの $f(x)$ の**平均変化率**といいます。また

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad\left(h=b-a\text{ とおくと }\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$$

が存在するとき，これを $f'(a)$ とかき，$x=a$ における $f(x)$ の**微分係数**といい，関数 $f(x)$ は $x=a$ で**微分可能**であるといいます。

解答・解説

135 $-1<x<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x^n=0$ なので

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{x^{n+2}+x^n+1}=0$$

$x=1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 1^n=1$ なので

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^n}{1^{n+2}+1^n+1}=\frac{1}{3}$$

$1<x$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=0$ なので

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^2+1+\left(\frac{1}{x}\right)^n}=\frac{1}{x^2+1}$$

以上より，$f(x)$ は $-1<x<1$，$1<x$ で連続であり，

$$\lim_{x\to1-0}f(x)=0,\quad \lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2}$$

より **$x=1$ で不連続**，すなわち $\alpha=1$ である。$f(x)=\dfrac{1}{3}$ を考えると

$-1<x<1$ のとき　$f(x)=0\neq\dfrac{1}{3}$

$1<x$ のとき　$\dfrac{1}{x^2+1}=\dfrac{1}{3}$　$\therefore\ x=\sqrt{2}$

よって，求める x の値は　$\underline{\boldsymbol{\sqrt{2}}}$

136 $g(x)$ が **$x=0$ において連続**となるということは

$$\lim_{x\to0}g(x)=g(0)\quad\cdots\cdots ①$$

ということである。①は $g(x)$ の定義より

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)\quad\cdots\cdots ①'$$

と表すことができる。$x=0$ における**微分係数の定義**より

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\quad(\because\ f(0)=0)$$
$$=f'(0)$$

したがって，①′ は成立し，$g(x)$ は $x=0$ において連続となる。（証終）

137 $f(x)$ は $x=\pm1$ で微分可能より $x=\pm1$ で**連続**であるから

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to-1+0}f(x)=f(-1)\\ \displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=f(1)\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}-a+b-c+d=1 & \cdots\cdots ①\\ a+b+c+d=0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

$x=-1$ で微分可能なので

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

であり

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \lim_{h\to -0}\frac{-\dfrac{1}{-1+h}-1}{h}\\
&= \lim_{h\to -0}\frac{-h}{h(-1+h)}\\
&= \lim_{h\to -0}\frac{-1}{-1+h}\\
&= 1\\
(\text{右辺}) &= \lim_{h\to +0}\frac{\{a(-1+h)^3+b(-1+h)^2+c(-1+h)+d\}-1}{h}\\
&= \lim_{h\to +0}\frac{a(3h-3h^2+h^3)+b(-2h+h^2)+ch}{h} \quad (\because ①)\\
&= \lim_{h\to +0}\{a(3-3h+h^2)+b(-2+h)+c\}\\
&= 3a-2b+c
\end{aligned}$$

$\therefore\quad 1=3a-2b+c \ \cdots\cdots$ ③

$x=1$ で微分可能なので

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

であり

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \lim_{h\to -0}\frac{\{a(1+h)^3+b(1+h)^2+c(1+h)+d\}-0}{h}\\
&= \lim_{h\to -0}\frac{a(3h+3h^2+h^3)+b(2h+h^2)+ch}{h} \quad (\because ②)\\
&= \lim_{h\to -0}\{a(3+3h+h^2)+b(2+h)+c\}\\
&= 3a+2b+c\\
(\text{右辺}) &= \lim_{h\to +0}\frac{\left(-\dfrac{1}{1+h}+1\right)-0}{h}\\
&= \lim_{h\to +0}\frac{h}{h(1+h)}\\
&= \lim_{h\to +0}\frac{1}{1+h}\\
&= 1
\end{aligned}$$

$\therefore\quad 3a+2b+c=1 \ \cdots\cdots$ ④

①，②より

$a+c=-\dfrac{1}{2} \ \cdots\cdots$ ⑤，$b+d=\dfrac{1}{2} \ \cdots\cdots$ ⑥

③，④より

$3a+c=1 \ \cdots\cdots$ ⑦，$b=0 \ \cdots\cdots$ ⑧

⑤，⑦を解いて $a=\dfrac{3}{4}$，$c=-\dfrac{5}{4}$，⑥，⑧より $d=\dfrac{1}{2}$ なので

$\underline{\boldsymbol{a=\dfrac{3}{4},\ b=0,\ c=-\dfrac{5}{4},\ d=\dfrac{1}{2}}}$

1.4　合成関数，積・商の微分

問題

138 (1) $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} = \boxed{}$　（成蹊大）

(2) 次の関数の導関数を求めよ。　$\sqrt[3]{1-2x}$　（広島市立大）

139 (1) $f(x) = (2x-1)^2(3-2x)^3$ のとき，$f'(1) = \boxed{}$ である。
（日本工業大）

(2) 次の関数を微分しなさい。　$x^3\sqrt{1+x^2}$　（信州大）

140 (1) 関数 $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ を x について微分せよ。　（鳥取大）

(2) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ を微分せよ。　（津田塾大）

チェック・チェック

微分の計算は，正確にすばやくできるように練習しておきましょう。

138 合成関数の微分は

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x) \quad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\right)$$

です。とくに

$$\{(ax+b)^p\}' = pa(ax+b)^{p-1}$$

ですね。

139 積の微分は

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

です。

140 商の微分は

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

ですね。

解答・解説

138 (1) $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}=\dfrac{d}{dx}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\cdot(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+1)'$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=\underline{\boldsymbol{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}}$$

(2) $f(x)=\sqrt[3]{1-2x}=(1-2x)^{\frac{1}{3}}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{3}(1-2x)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(1-2x)'=\frac{1}{3}(1-2x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-2)$$
$$=\underline{\boldsymbol{-\frac{2}{3}(1-2x)^{-\frac{2}{3}}}}$$

139 (1) 積の微分の公式を用いる。$f(x)=(2x-1)^2(3-2x)^3$ より

$$f'(x)=\boldsymbol{\{(2x-1)^2\}'(3-2x)^3+(2x-1)^2\{(3-2x)^3\}'}$$
$$=2(2x-1)(2x-1)'\cdot(3-2x)^3+(2x-1)^2\cdot 3(3-2x)^2(3-2x)'$$
$$=4(2x-1)(3-2x)^3-6(2x-1)^2(3-2x)^2$$
$$=2(2x-1)(3-2x)^2\{2(3-2x)-3(2x-1)\}$$
$$=2(2x-1)(3-2x)^2(9-10x)$$

$\therefore\quad f'(1)=2(2-1)(3-2)^2(9-10)=\underline{\boldsymbol{-2}}$

(2) 積の微分と合成関数の微分の公式を用いる。$f(x)=x^3\sqrt{1+x^2}=x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ とおくと

$$f'(x)=\boldsymbol{(x^3)'(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+x^3\{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\}'}$$
$$=3x^2\sqrt{1+x^2}+x^3\cdot\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+x^2)'$$
$$=3x^2\sqrt{1+x^2}+\frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\frac{3x^2(1+x^2)+x^4}{\sqrt{1+x^2}}=\underline{\boldsymbol{\frac{4x^4+3x^2}{\sqrt{1+x^2}}}}$$

140 (1) **商の微分**の公式を用いる。$y=\dfrac{x+1}{x-1}$ より

$$y'=\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=\underline{-\frac{2}{(x-1)^2}}$$

(2) **商の微分と合成関数の微分**の公式を用いる。$y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ とおくと

$$y'=\frac{x'\sqrt{x^2+1}-x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\frac{1}{2}\cdot(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x^2+1}$$
$$=\frac{1}{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\underline{(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}}$$

1.5　三角関数・指数関数・対数関数の微分

問題

141 (1) 関数 $y=\sin(x^2)-(\sin x)^2$ を微分せよ。（東京都市大）

(2) $x\sin 2x$ を微分せよ。（津田塾大）

(3) 次の関数を微分せよ。　$y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$（埼玉大）

(4) つぎの関数を微分しなさい。　$y=\tan 2x$（信州大）

142 (1) e^{x^2+1} を微分せよ。ただし e は自然対数の底とする。（東京農工大）

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ の第 1 次導関数 $f'(x)$ は $\boxed{}$ である。（静岡理工科大）

(3) 計算せよ。　$\dfrac{d}{dx}2^x=\boxed{}$（東海大）

143 (1) 関数 $y=3^{\log x}$ を x について微分しなさい。（広島市立大他）

(2) 関数 $y=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ を微分せよ。（成蹊大）

(3) $\dfrac{1}{x^2}\log x$ を微分せよ。（東京農工大）

チェック・チェック

141 ～ **143** 主な関数の導関数を確認しておきましょう。

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}\ (\alpha\text{は実数}) \qquad (\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \log a \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0) \qquad (\log |x|)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}\ (a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$$

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \log a}\ (a > 0,\ a \neq 1,\ x \neq 0)$$

これらの公式と合成関数，積・商の微分の公式を用いるといろいろな関数の導関数を求めることができます。

解答・解説

141 (1) $y=\sin(x^2)-(\sin x)^2$ より

$$y'=\cos(x^2)\cdot(x^2)'-2\sin x\cdot(\sin x)'$$
$$=\underline{\mathbf{2x\cos(x^2)-2\sin x\cos x}}$$

(2) $y=x\sin 2x$ とおくと

$$y'=(x)'\sin 2x+x(\sin 2x)'=\underline{\mathbf{\sin 2x+2x\cos 2x}}$$

(3) $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ より

$$y'=\frac{(\cos x)'(1-\sin x)-\cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}$$
$$=\frac{-\sin x(1-\sin x)-\cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$
$$=\frac{-\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}$$
$$=\underline{\mathbf{\frac{1}{1-\sin x}}}$$

(4) $y=\tan 2x$ より

$$y'=\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot(2x)'=\underline{\mathbf{\frac{2}{\cos^2 2x}}}$$

142 (1) $f(x)=e^{x^2+1}$ とおくと

$$f'(x)=e^{x^2+1}\cdot(x^2+1)'=\underline{\mathbf{2xe^{x^2+1}}}$$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ より

$$f'(x)=\frac{-(1+e^x)'}{(1+e^x)^2}=\underline{\mathbf{\frac{-e^x}{(1+e^x)^2}}}$$

(3) $$\frac{d}{dx}2^x=\underline{\mathbf{2^x\log 2}}$$

別解 $2^x=e^{\log 2^x}=e^{x\log 2}$ より

$$\frac{d}{dx}2^x=e^{x\log 2}\cdot(x\log 2)'=e^{\log 2^x}\cdot(\log 2)=2^x\log 2$$

143 (1) $y = 3^{\log x}$ より

$$y' = 3^{\log x} \log 3 \cdot (\log x)' = \underline{\frac{3^{\log x} \log 3}{x}}$$

別解 対数微分法を用いる。$y = 3^{\log x} > 0$ より両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log 3^{\log x} = (\log x)(\log 3)$$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y} = \frac{\log 3}{x} \qquad \therefore \quad y' = y \cdot \frac{\log 3}{x} = \frac{3^{\log x} \log 3}{x}$$

(2) $y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ より

$$y' = \frac{(x + \sqrt{x^2+1})'}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

(3) $y = \dfrac{1}{x^2} \log x$ とおくと，$y = x^{-2} \log x$ であり

$$y' = (x^{-2})' \log x + x^{-2} (\log x)' = -2x^{-3} \log x + x^{-2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= -\frac{2}{x^3} \log x + \frac{1}{x^3} = \underline{\frac{1 - 2\log x}{x^3}}$$

1.6 対数微分法

問題

144 $y = x^{x^2}$ $(x > 0)$ の両辺の対数をとって微分する方法によって，導関数を求めよ。 （小樽商科大）

145 $x > 0$ で定義された関数 $y = x^{\sqrt{x}}$ を微分せよ。 （東京電機大）

チェック・チェック

144，**145** $y = f(x)$ が微分可能なとき，$f(x) \fallingdotseq 0$ であるような範囲では，両辺の絶対値の対数をとり

$$\log|y| = \log|f(x)|$$

と変形してから，両辺を x で微分して

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = (\log|f(x)|)'$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = (\log|f(x)|)'y = (\log|f(x)|)'f(x)$$

このような微分の仕方を**対数微分法**といいます。

解答・解説

144 $x>0$ より $y=x^{x^2}>0$ であり，$y=x^{x^2}$ の両辺の自然対数をとると

$$\log y = x^2 \log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = 2x\log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2\log x + 1)$$

$$\therefore\quad y' = x(2\log x+1)y = \underline{\boldsymbol{x^{x^2+1}(2\log x+1)}}$$

145 $x>0$ より $y=x^{\sqrt{x}}>0$ であり，両辺の自然対数をとると

$$\log y = \sqrt{x}\log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore\quad y' = \frac{\log x+2}{2\sqrt{x}}y = \underline{\boldsymbol{\frac{\log x+2}{2\sqrt{x}}x^{\sqrt{x}}}}$$

1.7　逆関数の微分

問題

146 $f(x)=\cos x$ $(\pi<x<2\pi)$ の逆関数を $g(x)$ とする。このとき，$g(x)$ の導関数を求めよ。（富山医薬大）

147 $y=f^{-1}(x)$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{f'(y)}$ は逆関数の微分法の公式であるが，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を $f'(y)$，$f''(y)$ を用いて表すと，合成関数の微分法により，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ $\boxed{}$ （小樽商科大）

148 関数 $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とする。$f(1)=2$，$f'(1)=2$，$f''(1)=3$ のとき，$g''(2)$ の値を求めよ。（防衛医科大）

チェック・チェック

146 $f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ をもつとき，$y=f^{-1}(x)$ とおくと $x=f(y)$ であり，両辺を x で微分すると

$$1=\frac{d}{dx}f(y)=\frac{d}{dy}f(y)\cdot\frac{dy}{dx}\quad\text{（合成関数の微分法）}$$
$$=\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

すなわち

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\quad\left(\text{ただし,}\ \frac{dx}{dy}\neq 0\right)$$

ですね。

147，**148** 逆関数の第 2 次導関数を求めます。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

ですね。

解答・解説

146 $y=g(x)$ とおくと，$\pi<y<2\pi$ であり　　$x=\cos y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\mathbf{1}}{\dfrac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dy}}}=\frac{1}{\dfrac{d}{dy}\cos y}=-\frac{1}{\sin y}$$

ここで，$\pi<y<2\pi$ より

$$\sin y=-\sqrt{1-\cos^2 y}=-\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore\quad g'(x)=\frac{dy}{dx}=\underline{\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}}$$

147 $y=f^{-1}(x)$ より　　$x=f(y)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{\dfrac{d}{dy}f(y)}=\frac{1}{f'(y)}$$ （逆関数の微分法の公式）

であるから

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{f'(y)}\right\}$$

$$=\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dy}}\left\{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f'(y)}}\right\}\cdot\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}$$ （合成関数の微分法）

$$=-\frac{f''(y)}{\{f'(y)\}^2}\cdot\frac{1}{f'(y)}=\underline{-\frac{\boldsymbol{f''(y)}}{\{\boldsymbol{f'(y)}\}^{\mathbf{3}}}}$$

148 $y=g(x)=f^{-1}(x)$ とおくと　　$x=f(y)$

$$g''(x)=-\frac{f''(y)}{\{f'(y)\}^3}$$ （∵ **147**）

$f(1)=2$ より $g(2)=1$ なので，$x=2$，$y=1$ として

$$g''(2)=-\frac{f''(1)}{\{f'(1)\}^3}=-\frac{3}{2^3}=\underline{-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}}$$

1.8 パラメータ表示された関数の微分

問題

149 $x = \sin t$, $y = \sin t + 2\cos t + 3\tan t$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を x を用いて表すと $\boxed{}$ である。ただし $0 \leqq t < \dfrac{\pi}{2}$ とする。（埼玉工業大）

150 $x = 2t - \sin t$, $y = 2 - \cos t$ $(0 < t < 2\pi)$ のとき，$\dfrac{dy}{dx} = 0$ となるのは，$(x,\ y) = \boxed{}$ のときである。（東北学院大）

151 $x = \dfrac{e^{2t} + e}{2}$, $y = t\log\dfrac{t^2e^t + e}{2}$ のとき，$t = 1$ における $\dfrac{dy}{dx}$ の値を求めよ。ただし，対数は自然対数である。また，e は自然対数の底である。（茨城大）

チェック・チェック

149, **150** x, y をパラメータ t の関数とみて

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

を利用します。

151 複雑な式になってきました。まずは $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ をそれぞれ求めましょう。

解答・解説

149 $\dfrac{dx}{dt}=\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=\cos t-2\sin t+\dfrac{3}{\cos^2 t}$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t-2\sin t+\frac{3}{\cos^2 t}}{\cos t}$$
$$=1-2\tan t+\frac{3}{\cos^3 t}$$

ここで，$x=\sin t$ で $0\leqq t<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-x^2}$$
$$\tan t=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\underline{\boldsymbol{1-\frac{2x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}}}$$

150 $\dfrac{dx}{dt}=2-\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=\sin t$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t}{2-\cos t}$$

$0<t<2\pi$ において，$\dfrac{dy}{dx}=0$ となるのは

$$\sin t=0\qquad\therefore\quad t=\pi$$

のときである。よって

$$\begin{cases}x=2\pi-\sin\pi=2\pi\\ y=2-\cos\pi=3\end{cases}$$
$$\therefore\quad (x,\ y)=\underline{\boldsymbol{(2\pi,\ 3)}}$$

151 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{e^{2t}(2t)'}{2}=e^{2t}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}&=(t)'\log\frac{t^2e^t+e}{2}+t\cdot\left(\log\frac{t^2e^t+e}{2}\right)'\\&=\log\frac{t^2e^t+e}{2}+t\cdot\frac{\left(\dfrac{t^2e^t+e}{2}\right)'}{\dfrac{t^2e^t+e}{2}}\\&=\log\frac{t^2e^t+e}{2}+t\cdot\frac{(t^2)'e^t+t^2(e^t)'}{t^2e^t+e}\\&=\log\frac{t^2e^t+e}{2}+\frac{t^2e^t(2+t)}{t^2e^t+e}\end{aligned}$$

よって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{1}{e^{2t}}\log\frac{t^2e^t+e}{2}+\frac{t^2(2+t)}{e^t(t^2e^t+e)}$$

であるから，$t=1$ のときの $\dfrac{dy}{dx}$ の値は

$$\frac{1}{e^2}\log\frac{e+e}{2}+\frac{2+1}{e(e+e)}=\frac{1}{e^2}+\frac{3}{2e^2}=\underline{\boldsymbol{\frac{5}{2e^2}}}$$

1.9　接線・法線の方程式

問題

152 関数 $y = \sqrt{5-x^2}$ のグラフの $x=1$ における接線の方程式を求めよ。　（東京都市大）

153 (1) 曲線 $y=3^x$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ 3^a)$ における接線の方程式は $y = \boxed{}$ であり，また，法線の方程式は $y = \boxed{}$ である。　（同志社大）

(2) 曲線 $y=\log x$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ \log a)$ $(a>0)$ における接線の方程式は $y = \boxed{}$ であり，P における法線の方程式は $y = \boxed{}$ である。　（同志社大）

154 曲線 $x = 3\cos t$，$y = 2\sin t$ $(0 \leqq t < 2\pi)$ 上の点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \sqrt{3}\right)$ における接線の方程式を求めよ。　（東京電機大）

チェック・チェック

152 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における**接線の方程式は**

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$$

です。これは，点 $(a,\ f(a))$ を通り，傾きが $f'(a)$ の直線ということですね。

153 法線は接線と直交する直線ですから，**法線の方程式は**

$f'(a) \neq 0$ **のときは**　$\boldsymbol{y = -\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)}$

$f'(a) = 0$ **のときは**　$\boldsymbol{x = a}$

となります。

154 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ とパラメータ表示された曲線の $t=a$ に対応する点における接線の方程式は，$\dfrac{dx}{dt} = f'(t)$，$\dfrac{dy}{dt} = g'(t)$ とすると

$$y = \frac{g'(a)}{f'(a)}(x - f(a)) + g(a)$$

です。

解答・解説

152 $f(x)=\sqrt{5-x^2}$ とおくと，$f(x)=(5-x^2)^{\frac{1}{2}}$ より

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot(5-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(5-x^2)'=\frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}$$

$x=1$ における接線の方程式は

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

$$y=-\frac{1}{2}(x-1)+2$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}}}$$

153 (1) $f(x)=3^x$ とおくと

$$f'(x)=3^x\log 3$$

点 P における接線の方程式は

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

$$\therefore\quad y=\underline{\boldsymbol{(3^a\log 3)x+3^a(1-a\log 3)}}$$

法線の方程式は，$f'(a)=3^a\log 3\neq 0$ より

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

$$\therefore\quad y=\underline{\boldsymbol{-\frac{1}{3^a\log 3}x+3^a+\frac{a}{3^a\log 3}}}$$

(2) $f(x)=\log x$ とおく。$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ より，曲線上の点 P$(a,\ \log a)$ における接線の方程式は

$$y=f'(a)(x-a)+\log a=\frac{1}{a}(x-a)+\log a$$

$$\therefore\quad y=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{a}x-1+\log a}}$$

であり，点 P における法線の方程式は，$f'(a)=\dfrac{1}{a}\neq 0$ より

$$y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+\log a=-a(x-a)+\log a$$

$$\therefore\quad y=\underline{\boldsymbol{-ax+a^2+\log a}}$$

154 $x = 3\cos t$，$y = 2\sin t$ より

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t,\quad \frac{dy}{dt} = 2\cos t$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{2\cos t}{-3\sin t} = -\frac{2}{3\tan t}$$

また，$(x,\ y) = \left(\dfrac{3}{2},\ \sqrt{3}\right)$ のとき

$$\begin{cases} 3\cos t = \dfrac{3}{2} \\ 2\sin t = \sqrt{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos t = \dfrac{1}{2} \\ \sin t = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad \therefore \quad \tan t = \sqrt{3}$$

したがって，求める接線の方程式は

$$y = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(x - \frac{3}{2}\right) + \sqrt{3}$$

$$= \underline{-\frac{2\sqrt{3}}{9}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

1.10 曲線外の点から引いた接線

問題

155 関数 $y=(3x-x^3)e^x$ が表す曲線を C とする。曲線 C の接線で，原点を通るものをすべて求めよ。 （名古屋工業大　改）

156 点 $(0,\ -2a)$ を通り，曲線 $y = x\log x$ に接する直線の方程式は $y=\boxed{}$ である。ただし，a は正の定数とする。 （埼玉工業大）

チェック・チェック

155，**156** 点 $(p,\ q)$ を通り，曲線 $y=f(x)$ に接する直線の方程式を求めるには，接点の座標を知ることが必要です。そのためには曲線上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

をつくり，これが点 $(p,\ q)$ を通るという条件から，接点の x 座標 t の値を求めます。

解答・解説

155 $f(x)=(3x-x^3)e^x$ として

$$f'(x)=(3-3x^2)e^x+(3x-x^3)e^x$$
$$=(3+3x-3x^2-x^3)e^x$$

よって，曲線上の点 $(t,\ f(t))$ における接線は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$
$$=(3+3t-3t^2-t^3)e^t(x-t)+(3t-t^3)e^t$$
$$=(3+3t-3t^2-t^3)e^tx+(t^4+2t^3-3t^2)e^t$$

これが原点を通るので

$$(t^4+2t^3-3t^2)e^t=0$$
$$t^2(t+3)(t-1)e^t=0$$
$$\therefore\quad t=0,\ 1,\ -3$$

したがって，求める接線の方程式はそれぞれ

$$\underline{\boldsymbol{y=3x}},\ \underline{\boldsymbol{y=2ex}},\ \underline{\boldsymbol{y=-6e^{-3}x}}$$

156 $f(x)=x\log x$ とおくと

$$f'(x)=\log x+1$$

曲線上の点 $(t,\ t\log t)$ における接線の方程式は

$$y=f'(t)(x-t)+t\log t$$
$$=(\log t+1)(x-t)+t\log t$$
$$=(\log t+1)x-t$$

これが点 $(0,\ -2a)$ を通ることから

$$-2a=-t\qquad\therefore\quad t=2a$$

したがって，求める接線の方程式は

$$y=\underline{\boldsymbol{(\log 2a+1)x-2a}}$$

1.11 共通接線

問題

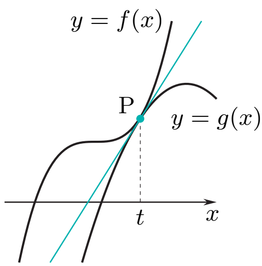
157 曲線 $C_1 : y = \dfrac{1}{x}$ と曲線 $C_2 : y = -\dfrac{x^2}{8}$ の共通の接線の方程式を求めよ。 (埼玉大)

158 $y = \log x$ と $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ のグラフが共有点をもち，この点で共通の接線をもつのは，$a = \boxed{}$ のときであり，その共通の接線の方程式は $y = \boxed{}$ である。 (東海大)

チェック・チェック

157, **158** 2 つの曲線が共通接線をもつ場合には，それぞれの曲線において接線の方程式をつくり，2 直線の一致条件を考えます。

とくに，2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ が共有点 P をもち，P におけるそれぞれの接線が一致するとき，2 曲線は接するといいます。



したがって，**2 曲線が接する条件は**

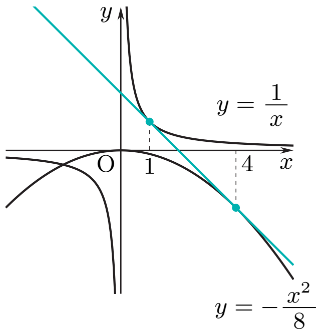
$$\begin{cases} f(t) = g(t) & \text{(共有点をもつ条件)} \\ f'(t) = g'(t) & \text{(接線の傾きが一致する条件)} \end{cases}$$

をみたす実数 t が存在することです。

解答・解説

157 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=-\dfrac{x^2}{8}$ とおくと

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2},\quad g'(x)=-\frac{x}{4}$$



曲線 C_1 上の点 $(t,\ f(t))$ $(t \neq 0)$ における接線の方程式は

$$y=-\frac{1}{t^2}(x-t)+\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}\quad\cdots\cdots ①$$

曲線 C_2 上の点 $(s,\ g(s))$ における接線の方程式は

$$y=-\frac{s}{4}(x-s)-\frac{s^2}{8}=-\frac{s}{4}x+\frac{s^2}{8}\quad\cdots\cdots ②$$

①，②が一致する条件は

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{t^2}=-\dfrac{s}{4} & \text{（接線の傾きが一致する条件）} \\ \dfrac{2}{t}=\dfrac{s^2}{8} & \text{（}y\text{ 切片が一致する条件）} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s=\dfrac{4}{t^2} \\ \dfrac{2}{t}=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{16}{t^4} \end{cases}\qquad \begin{cases} s=\dfrac{4}{t^2} \\ t^3=1 \end{cases}$$

$\therefore\quad t=1,\ s=4$

求める共通接線の方程式は

$$\underline{\boldsymbol{y=-x+2}}$$

別解 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ とおくと，$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ より，$\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ $(t \neq 0)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y&=-\frac{1}{t^2}(x-t)+\frac{1}{t} \\ &=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}\quad\cdots\cdots ① \end{aligned}$$

これが C_2 と接するための条件は，$y=-\dfrac{x^2}{8}$ と連立して

$$-\frac{1}{8}x^2=-\frac{x}{t^2}+\frac{2}{t}$$

$$t^2x^2-8x+16t=0$$

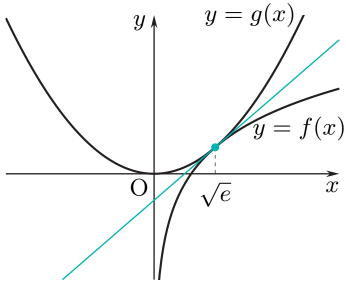
この x の 2 次方程式が重解をもてばよいので

$$\frac{D}{4}=16-16t^3=0\qquad \therefore\quad t=1$$

①より，共通接線の方程式は

$$y=-x+2$$

158 $f(x)=\log x$，$g(x)=ax^2\ (a \neq 0)$ とおくと



$$f'(x)=\frac{1}{x},\quad g'(x)=2ax$$

$x=t\ (>0)$ において共有点をもち，この点で共通の接線をもつ条件は

$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log t = at^2 \\ \dfrac{1}{t}=2at \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} \log t = at^2 & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{1}{2}=at^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②を①に代入すると

$$\log t=\frac{1}{2}\qquad \therefore\quad t=\sqrt{e}$$

②に代入すると

$$a=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2e}}}$$

したがって，求める共通接線の方程式は

$$y=f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e})+f(\sqrt{e})=\frac{1}{\sqrt{e}}(x-\sqrt{e})+\log\sqrt{e}$$

$$\therefore\quad y=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{e}}x-\frac{1}{2}}}$$

1.12 楕円の接線

問題

159 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

であることを証明せよ。ただし，$y_1 \fallingdotseq 0$ とする。 （信州大）

160 xy 平面の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ はだ円 C : $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上の動点で x 軸，y 軸上にはないとする。点 P におけるだ円 C の接線と x 軸，y 軸とで囲まれた三角形の面積の最小値は $\boxed{}$ である。 （東京医科大）

チェック・チェック

159 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1}$$

となります。一度は証明しておきましょう。

160 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点は

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$$

と媒介変数表示されます。

解答・解説

159 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}\quad (\text{ただし，} y\neq 0)$$

$y_1\neq 0$ より，$(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$y=-\boldsymbol{\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)+y_1}=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x+\frac{b^2{x_1}^2+a^2{y_1}^2}{a^2y_1}$$

$$\therefore\quad \frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=\frac{b^2{x_1}^2+a^2{y_1}^2}{a^2b^2}=\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}$$

ここで，$(x_1,\ y_1)$ はだ円上の点なので

$$\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}=1$$

よって，接線の方程式は

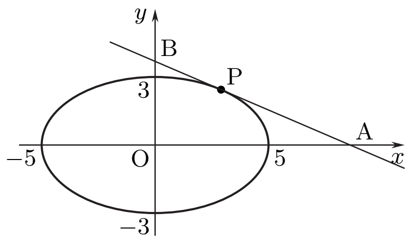
$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

（証終）

160 $C:\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は

$$\begin{cases} x=5\cos\theta \\ y=3\sin\theta \end{cases}$$

と表すことができる。x 軸，y 軸に関する対称性と P が x 軸，y 軸上の点でないことより $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ としてよい。



　$\mathrm{P}(5\cos\theta,\ 3\sin\theta)$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{\frac{\cos\theta}{5}x+\frac{\sin\theta}{3}y=1}$$

であり，これと x 軸，y 軸との交点をそれぞれ A，B とすると

$$\mathrm{A}\left(\frac{5}{\cos\theta},\ 0\right),\ \mathrm{B}\left(0,\ \frac{3}{\sin\theta}\right)$$

よって

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{\cos\theta}\cdot\frac{3}{\sin\theta}=\frac{15}{\sin 2\theta}\geqq 15\quad (\because\ 0<2\theta<\pi)$$

等号は，$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき成立するから，最小値は　**15**

1.13　双曲線の接線

問題

161 a は正の定数とする。点 $(1,\ a)$ を通り，双曲線 $x^2-4y^2=2$ に接する 2 本の直線が直交するとき，a の値を求めよ。（福島県立医科大）

162 双曲線 $x^2-y^2=1$ の焦点の 1 つを $\mathrm{F}(c,\ 0)$ $(c>0)$ とする。この双曲線上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ $(s>0,\ t>0)$ における双曲線の接線を l とし，F から l への垂線 m と l との交点を $\mathrm{Q}(u,\ v)$ とする。

(1) l と m の方程式を $s,\ t$ を用いて表せ。

(2) $u,\ v$ を $s,\ t$ を用いて表せ。

(3) $u,\ v$ は $u^2+v^2=1$ をみたすことを示せ。（山梨大）

チェック・チェック

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1}$$

です。

161 まず，直線 $y=m(x-1)+a$ と双曲線が接するための条件を求めましょう。次に，2 本の接線が直交する条件である

(傾きの積) $=-1$

を利用します。

162 (3)(2) より，$u,\ v$ は $s,\ t$ を用いて表されていますが，P は双曲線上の点ですから，$s^2-t^2=1$ という関係が成り立っています。

解答・解説

161 点 $(1,\ a)$ を通り，y 軸に平行な接線は存在しないので，接線の方程式を $y = m(x-1)+a$ とおく。これが $x^2-4y^2=2$ と接することから

$$x^2-4\cdot(mx-m+a)^2=2$$
$$(1-4m^2)x^2+8m(m-a)x-4(m-a)^2-2=0$$

は重解をもつ。したがって，判別式を D とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=16m^2(m-a)^2+(1-4m^2)\{4(m-a)^2+2\}\\&=4(m-a)^2+2(1-4m^2)\\&=-4m^2-8am+4a^2+2=0\ \cdots\cdots\ ①\end{aligned}$$

2 本の接線の傾きを m_1，m_2 とすると，m_1，m_2 は①の相異なる解であり，2 本の接線は直交するから

$$\boldsymbol{m_1m_2=-1}\quad \text{すなわち}\quad \frac{4a^2+2}{-4}=-1\ (\because\ ①での解と係数の関係)$$

$$4a^2+2=4\qquad \therefore\quad a=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}}\ (>0)$$

162 (1) 双曲線 $x^2-y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ における接線 l の方程式は

$$l:\underline{\boldsymbol{sx-ty=1}}\ \cdots\cdots\ ①$$

また，焦点 $\mathrm{F}(\sqrt{2},\ 0)$ を通り，l に直交する直線 m は

$$t(x-\sqrt{2})+sy=0\qquad \therefore\quad m:\underline{\boldsymbol{tx+sy=\sqrt{2}t}}\ \cdots\cdots\ ②$$

(2) $\mathrm{Q}(u,\ v)$ は①，②の交点であるから，①$\times s+$②$\times t$ より

$$(s^2+t^2)x=s+\sqrt{2}\,t^2\qquad \therefore\quad x=\frac{s+\sqrt{2}\,t^2}{s^2+t^2}$$

②$\times s-$①$\times t$ より

$$(s^2+t^2)y=(\sqrt{2}\,s-1)t\qquad \therefore\quad y=\frac{(\sqrt{2}\,s-1)t}{s^2+t^2}$$

$$\therefore\quad u=\underline{\boldsymbol{\frac{s+\sqrt{2}\,t^2}{s^2+t^2}}},\ v=\underline{\boldsymbol{\frac{(\sqrt{2}\,s-1)t}{s^2+t^2}}}$$

(3) (2) より

$$\begin{aligned}u^2+v^2&=\frac{(s+\sqrt{2}\,t^2)^2}{(s^2+t^2)^2}+\frac{(\sqrt{2}\,s-1)^2t^2}{(s^2+t^2)^2}=\frac{s^2+t^2+2t^2s^2+2t^4}{(s^2+t^2)^2}\\&=\frac{s^2+t^2+2t^2(s^2+t^2)}{(s^2+t^2)^2}=\frac{1+2t^2}{s^2+t^2}\end{aligned}$$

また，$\mathrm{P}(s,\ t)$ は $s^2-t^2=1$ をみたすから

$$u^2+v^2=\frac{1+2t^2}{(1+t^2)+t^2}=1$$

（証終）

1.14 平均値の定理

問題

163 e を自然対数の底とする。$e \leqq p < q$ のとき，不等式

$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q-p}{e}$$

が成り立つことを証明せよ。 (名古屋大)

164 関数 $f(x) = x + 2\sqrt{1-x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と $a=0$，$b=1$ に対して

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c),\ a < c < b$$

をみたす実数 c は $c = \boxed{}$ である。 (横浜市立大)

165 微分可能な関数 $f(x)$ については，実数 a と h に対して

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h),\ 0 < \theta < 1 \ \cdots\cdots ①$$

をみたす θ が存在することが知られている（平均値の定理）。

(1) 関数 $f(x) = x^3$ に対して，上の①をみたす θ を a，h の式で表せ。ただし，$a \geqq 0$，$h > 0$ とする。

(2) 上の θ について，$\displaystyle\lim_{h \to 0} \theta$ の値を求めよ。 (愛知教育大)

チェック・チェック

163，**164** 平均値の定理について確認しましょう。

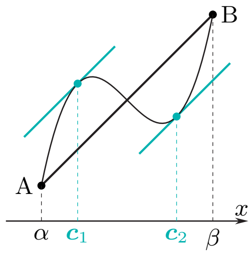
関数 $f(x)$ が閉区間 $[\alpha,\ \beta]$ で**連続**，開区間 $(\alpha,\ \beta)$ で**微分可能**ならば，次の条件をみたす c が存在する。

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(c),\ \alpha<c<\beta$$

平均値の定理

これは，微分係数の値が，α から β までの平均変化率に一致するような点の**存在**を主張しており，微分係数という局所的な性質を大域的なものに結びつける重要な定理です。

図形的には，曲線上の 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ の間で AB に平行な接線が必ず引けることを主張しています。



165 平均値の定理において，$\beta=\alpha+h\ (h>0)$ とおくと

$$\alpha<c<\beta \iff 0<c-\alpha<h \iff 0<\frac{c-\alpha}{h}<1$$

そこで，$\dfrac{c-\alpha}{h}=\theta$ とおくと，平均値の定理は次のようにも表すことができます。

$$f(\alpha+h)=f(\alpha)+hf'(\alpha+\theta h)\quad (0<\theta<1)$$

解答・解説

163 $f(x)=\log(\log x)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{\log x}\cdot(\log x)'=\frac{1}{x\log x}$$

$f(x)$ は $x>1$ で微分可能なので，**平均値の定理**より，$e\leqq p<q$ のとき

$$\frac{f(q)-f(p)}{q-p}=f'(c)=\frac{1}{c\log c}\ ,\ p<c<q$$

となる c が存在する。このとき，$e<c$ なので

$$e=e\log e<c\log c \qquad \therefore\quad \frac{1}{e}>\frac{1}{c\log c}$$

よって

$$\frac{f(q)-f(p)}{q-p}<\frac{1}{e}$$

$$f(q)-f(p)<\frac{q-p}{e}\qquad (\because\ p<q)$$

$$\therefore\quad \log(\log q)-\log(\log p)<\frac{q-p}{e}$$

（証終）

164 $f(x)=x+2\sqrt{1-x^2}=x+2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ より

$$f'(x)=1+2\cdot\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=1-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

また，$a=0$，$b=1$ に対して

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f(1)-f(0)=1-2=-1$$

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ をみたす c は

$$-1=1-\frac{2c}{\sqrt{1-c^2}} \qquad \frac{2c}{\sqrt{1-c^2}}=2$$

$$c=\sqrt{1-c^2} \qquad c^2=1-c^2 \qquad c^2=\frac{1}{2}$$

$0<c<1$ より

$$c=\frac{1}{\sqrt{2}}=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

165 (1) $f(x)=x^3$ より　　$f'(x)=3x^2$

$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$ より

$$(a+h)^3=a^3+h\cdot 3(a+\theta h)^2$$
$$a^3+3a^2h+3ah^2+h^3=a^3+3a^2h+6ah^2\theta+3h^3\theta^2$$
$$3ah^2+h^3=6ah^2\theta+3h^3\theta^2$$

$h\neq 0$ より，両辺を h^2 でわって整理すると

$$3h\theta^2+6a\theta-(3a+h)=0$$

$a\geqq 0$，$h>0$，$0<\theta<1$ より

$$\underline{\boldsymbol{\theta=\frac{-3a+\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}}{3h}}}$$

(2) θ を変形して

$$\theta=\frac{\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}-3a}{3h}\cdot\frac{\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}+3a}{\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}+3a}$$
$$=\frac{(9a^2+9ah+3h^2)-9a^2}{3h(\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}+3a)}=\frac{3a+h}{\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}+3a}$$

したがって，$a>0$ のとき

$$\lim_{h\to 0}\theta=\lim_{h\to 0}\frac{3a+h}{\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}+3a}=\frac{3a}{\sqrt{9a^2}+3a}=\frac{a}{a+a}=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}$$

$a=0$ のとき，$h>0$ より

$$\lim_{h\to 0}\theta=\lim_{h\to 0}\frac{h}{\sqrt{3h^2}}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{\sqrt{3}h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{3}}=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}}$$

2　微分法の応用

2.1　関数の増減

問題

166 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x-1}$ について次の問いに答えよ。ただし，$\log x$ は自然対数とする。
(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。
(2) $x>1$ の範囲で $f(x)$ は減少することを証明せよ。　（長岡技術科学大）

167 関数 $f(x)$ は微分可能とする。次の命題は正しいか。

「$f(0)=1$ とし，$x>0$ のとき常に $f'(x)<0$ であるとする。このとき，$f(a)<0$ となる正の数 a が存在する。」

もし正しければ証明し，正しくなければ反例をあげよ。　（津田塾大）

チェック・チェック

166, **167** まず,「増加関数」について確認しておきましょう。
　ある区間 I において
$$x_1,\ x_2\in I,\ x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$
であるならば，$f(x)$ は I で**増加関数**である，といいます。
　とくに，微分可能な関数 $f(x)$ がある区間 I において
$$\text{つねに } f'(x)>0 \Longrightarrow f(x) \text{ は } I \text{ で増加関数}$$
ですね。
　「減少関数」についても同じことがいえます。

解答・解説

166 (1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x-1}$ より

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot(x-1)-\log x\cdot 1}{(x-1)^2}=\underline{\boldsymbol{\frac{x-x\log x-1}{x(x-1)^2}}}$$

(2) $x>1$ において，**$f'(x)$ の分母は正**である。そこで

$$g(x)=x-x\log x-1$$

とおくと

$$g'(x)=1-\log x-x\cdot\frac{1}{x}=-\log x<0 \quad (\because\ x>1)$$

であり，$x>1$ において $g(x)$ は単調減少であるから

$$g(x)<g(1)=0 \quad (x>1)$$

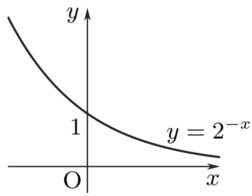
$$\therefore\quad f'(x)=\frac{g(x)}{x(x-1)^2}<0 \quad (x>1)$$

よって，$f(x)$ は $x>1$ において単調減少である。　（証終）

167 <u>正しくない</u>

（反例）$f(x)=2^{-x}$

【注意】$f(0)=1$ かつ $x>0$ において単調減少であり，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ となる微分可能な関数 $f(x)$ を選べばよいでしょう。



2.2　極値・変曲点

問題

168 関数 $f(x)$，$g(x)$，および $h(x)$ を

$$f(x) = e^{-x}x^3,\ g(x) = e^x f'(x) \text{ および } h(x) = e^{-x}(x^3 + k)$$

と定める。ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数であり，k は実数である。

(1) 関数 $g(x)$ の極値を求めよ。

(2) 関数 $h(x)$ が極小値をもつための k の条件を求めよ。　　（北里大）

169 関数 $f(x) = (x^2 + ax + 3)e^x$ が極値をもたないような定数 a の値の範囲は $\boxed{}$ である。また $y = f(x)$ のグラフが変曲点をもたないような定数 a の値の範囲は $\boxed{}$ である。　　（北海道工業大）

チェック・チェック

168，**169** 極大・極小の一般的な定義は『数学 II・B チェック＆リピート』201 ページ【極値】を参照して下さい。微分可能な関数 $f(x)$ においては，$f'(x)$ の符号が

　負から正に変わるところで**極小値**

　正から負に変わるところで**極大値**

をとります。また，極大・極小の判定法としては

$$f'(a) = 0,\ f''(a) < 0 \Longrightarrow f(a) \text{ は極大値}$$
$$f'(a) = 0,\ f''(a) > 0 \Longrightarrow f(a) \text{ は極小値}$$

も使えるようにしましょう。

ある区間 I で 2 回微分可能な関数 $y = f(x)$ は

$$I \text{ においてつねに } f''(x) > 0$$

ならば，曲線 $y = f(x)$ は I で**下に凸**といい，

$$I \text{ においてつねに } f''(x) < 0$$

ならば，曲線 $y = f(x)$ は I で**上に凸**といいます。

さらに，曲線の凹凸が入れ替わる点を**変曲点**といいます。つまり

$$f''(a) = 0 \text{ かつ } x = a \text{ の前後で } f''(x) \text{ の符号が変わる}$$

とき，点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y = f(x)$ の変曲点です。

解答・解説

168 (1) $f(x)=e^{-x}x^3$ より

$f'(x)=-e^{-x}\cdot x^3+e^{-x}\cdot 3x^2=(3x^2-x^3)e^{-x}$

$g(x)=e^x f'(x)=3x^2-x^3$

$g'(x)=6x-3x^2=-3x(x-2)$

したがって増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$

よって，**極大値 4（$x=2$ のとき），極小値 0（$x=0$ のとき）**

(2) $h(x)=e^{-x}(x^3+k)$ より

$h'(x)=-e^{-x}(x^3+k)+3e^{-x}x^2$

$=(3x^2-x^3-k)e^{-x}$

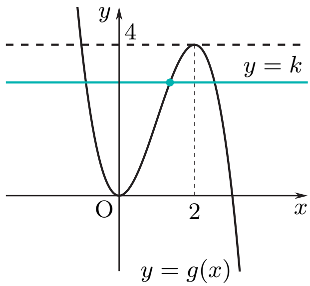
$e^{-x}>0$ より，$h(x)$ が極小値をもつための条件は

$3x^2-x^3-k$

の符号が負から正に変わる x が存在することである。

よって，(1) より $y=g(x)=3x^2-x^3$ と $y=k$ のグラフ（右図）を考えると，求める k の条件は

$\mathbf{0<k<4}$



169 $f(x)=(x^2+ax+3)e^x$ より

$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+3)e^x$

$=e^x\{x^2+(a+2)x+(a+3)\}$

$e^x>0$ より，極値をもたない条件は

「$x^2+(a+2)x+(a+3)$ に符号の変化がない」

ことであり，$y=x^2+(a+2)x+(a+3)$ のグラフは下に凸なので

「すべての x で $x^2+(a+2)x+(a+3)\geqq 0$」

である。そこで $x^2+(a+2)x+(a+3)=0$ の判別式を D とすると

$D=(a+2)^2-4(a+3)=a^2-8\leqq 0$

$\therefore$　$\mathbf{-2\sqrt{2}\leqq a\leqq 2\sqrt{2}}$

同様に

$f''(x)=e^x\{x^2+(a+2)x+(a+3)\}+e^x(2x+a+2)$

$=e^x\{x^2+(a+4)x+(2a+5)\}$

より，変曲点をもたない条件は

「$x^2+(a+4)x+(2a+5)$ に符号の変化がない」

ことであり，$x^2+(a+4)x+(2a+5)=0$ の判別式を考えると

$(a+4)^2-4(2a+5)\leqq 0$

$a^2-4\leqq 0$　$\therefore$　$\mathbf{-2\leqq a\leqq 2}$

2.3　グラフの概形

問題

170　$f(x) = \sin(\pi \sin x)$ とする。

(1)　$f(x+\pi) = -f(x)$ を示せ。

(2)　$0 \leqq x < \pi$ のとき，$f(x) = 0$ の解を求めよ。

(3)　$0 \leqq x < \pi$ のとき，$f'(x) = 0$ の解を求めよ。

(4)　(1)〜(3) の結果および，$f'(x)$ の正負を利用して，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。　（南山大）

171　$f(x) = x^2 e^{-x}$ とおく。

(1)　関数 $f(x)$ の極値を求め，曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べよ。

(2)　$y = f(x)$ のグラフをかけ。　（東京商船大）

172　関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ $(x > 0)$ について，$y = f(x)$ の極値と変曲点を調べてグラフの概形をかけ（増減表をかくにあたって，極値および変曲点に対応する x の値と整数値 1，2，3 との大小関係が明らかになるよう，増減表を工夫してほしい）。

　ただし，必要ならば，自然対数に関する事実 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ および，$2.7 < e < 2.8$ は適宜利用してよい。　（浜松医科大　改）

173　関数 $f(x) = \dfrac{4x^2+3}{2x-1}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の極値をすべて求めよ。

(2)　曲線 $y = f(x)$ の漸近線の方程式をすべて求めよ。

(3)　曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ。　（東京電機大）

チェック・チェック

グラフの概形を捉えるには，微分法が強力な武器になります。ポイントをまとめておきましょう。

(I) 定義域を確認する。

170，**172** は問題文中に書いてありますね。分数関数では (分母)$\neq 0$ であること，対数関数では真数条件と底条件に注意して下さい。

(II) 対称性や周期性をみる。

わかりにくいものが多いですが，気づくのが早ければ早いほど調べる量を減らせます。もちろん **170**(1) などは式から読み取れる周期性を見落とさないようにしましょう。

(III) 増減・極値を調べる。

$f'(x)$ の符号の変化はしっかり捉えて下さい。

(IV) グラフの凹凸・変曲点を調べる。

$f''(x)$ の計算は大変ですが，要求されている場合には，しっかり調べて下さい。

(V) グラフの端点，不連続点の付近での概形を捉える。

定義域が無限に広がっているときは，まず $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ を調べます。$\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x)-(mx+n)\}=0$ または $\lim\limits_{x\to-\infty}\{f(x)-(mx+n)\}=0$ となる m，n が得られるときは，直線 $y=mx+n$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線ですね。$x\neq a$ で定義された関数 $f(x)$ に対しては，$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ なども調べて下さい。

これらをすべて調べるのはなかなか大変です。問題の要求に応じて何を調べればよいかを見極めましょう。たとえば，**170** は (III) まで調べれば十分ですが，**173** は (V) も調べる必要がありますね。

解答・解説

170 $f(x) = \sin(\pi \sin x)$

(1) $f(x+\pi) = \sin(\pi \sin(x+\pi)) = \sin(-\pi \sin x)$

$= -\sin(\pi \sin x) = -f(x)$　　（証終）

(2) $0 \leqq x < \pi$ より

$0 \leqq \sin x \leqq 1$　　$\therefore$　$0 \leqq \pi \sin x \leqq \pi$

$f(x) = 0$ すなわち $\sin(\pi \sin x) = 0$ であるとき

$\pi \sin x = 0,\ \pi$

$\therefore$　$\sin x = 0,\ 1$

$0 \leqq x < \pi$ より　　$\underline{\boldsymbol{x = 0,\ \dfrac{\pi}{2}}}$

(3) $f'(x) = \cos(\pi \sin x) \cdot \pi \cos x = 0$ より

$\cos(\pi \sin x) = 0$ または $\cos x = 0$

$0 \leqq x < \pi$, $0 \leqq \pi \sin x \leqq \pi$ より

$\pi \sin x = \dfrac{\pi}{2}$ または $x = \dfrac{\pi}{2}$

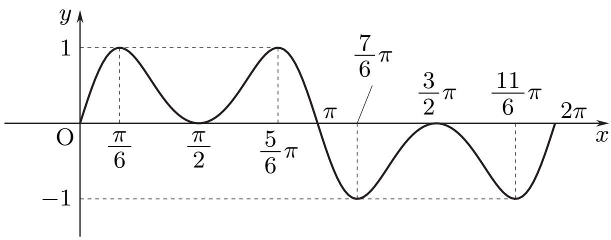
$\sin x = \dfrac{1}{2}$ となるのは　　$x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

以上より　　$\underline{\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi}}$

(4) $0 \leqq x < \pi$ における $y = f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

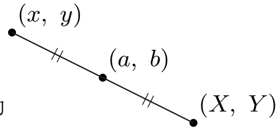
(1) より **$\pi \leqq x \leqq 2\pi$ における $y = f(x)$ のグラフは $0 \leqq x \leqq \pi$ における $y = f(x)$ のグラフを x 軸に関して対称移動したもの**と一致するから，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $y = f(x)$ のグラフは <u>下図</u> のようになる。



【参考】$y=f(x)$ のグラフが点 $(\pi,\ 0)$ に関して対称であることを示して概形をかいてもよい。

点 $(x,\ y)$ のグラフを点 $(a,\ b)$ に関して対称移動した点を $(X,\ Y)$ とすると

$$\begin{cases} \dfrac{x+X}{2}=a \\ \dfrac{y+Y}{2}=b \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} x=2a-X \\ y=2b-Y \end{cases}$$



であり，$y=f(x)$ のグラフを点 $(a,\ b)$ に関して対称移動すると

$$2b-y=f(2a-x)$$

となる。これは

$$2b-f(x)=f(2a-x) \quad \cdots\cdots \text{①}$$

ということである。

本問では $(a,\ b)=(\pi,\ 0)$ ととると，①は

$$f(x)=-f(2\pi-x)$$

である。ここで

$$\begin{aligned} -f(2\pi-x) &= -\sin(\pi\sin(2\pi-x)) = -\sin(-\pi\sin x) \\ &= \sin(\pi\sin x) = f(x) \end{aligned}$$

よって，$y=f(x)$ のグラフは点 $(\pi,\ 0)$ に関して対称である。

171 (1) $f(x)=x^2e^{-x}$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x}-x^2e^{-x}=e^{-x}(2x-x^2) \\ f''(x) &= -e^{-x}(2x-x^2)+e^{-x}(2-2x) \\ &= e^{-x}(x^2-4x+2) \end{aligned}$$

したがって

$f'(x)=0$ の解は　　$x=0,\ 2$

$f''(x)=0$ の解は　　$x=2\pm\sqrt{2}$

より，増減および凹凸は次のようになる。

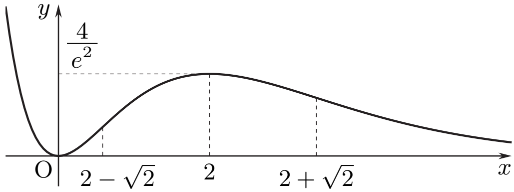
x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	変曲点	↗	極大	↘	変曲点	↘

よって　　**極大値 $\boldsymbol{\dfrac{4}{e^2}}$ ($\boldsymbol{x=2}$ のとき)，極小値 $\boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{x=0}$ のとき)**

であり，凹凸は

$$\begin{cases} \boldsymbol{x<2-\sqrt{2},\ x>2+\sqrt{2}} \text{ のとき} & \text{下に凸} \\ \boldsymbol{2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}} \text{ のとき} & \text{上に凸} \end{cases}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ と (1) よりグラフは **下図** となる。



【注意】 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ は覚えておくべき事実である。**183** の不等式より $x>0$ のとき $e^x>\dfrac{x^3}{3!}$ であり

$$(0\leqq)\ \frac{x^2}{e^x}<\frac{x^2}{\frac{x^3}{3!}}=\frac{6}{x}\longrightarrow 0\ (x\to\infty)$$

よって，ハサミウチの原理より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ である。

一般に，任意の自然数 n に対して

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0}$$

である。

172 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ $(x>0)$ より

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-(\log x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{1-2\log x}{x^3}$$

であり，$x>0$ において $f'(x)=0$ となるのは

$$\log x=\frac{1}{2}\qquad\therefore\quad x=e^{\frac{1}{2}}$$

また

$$f''(x)=\frac{-\frac{2}{x}\cdot x^3-(1-2\log x)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{-5+6\log x}{x^4}$$

であり，$x>0$ において $f''(x)=0$ となるのは

$$\log x=\frac{5}{6}\qquad\therefore\quad x=e^{\frac{5}{6}}$$

ここで，$2<e<3$ より

$$\boldsymbol{1}<\sqrt{2}<\boldsymbol{e^{\frac{1}{2}}}<\sqrt{3}<\boldsymbol{2}$$

また

$$\boldsymbol{e^{\frac{5}{6}}}<e<\boldsymbol{3}$$

さらに，$2.5<e$ より

$$e^5>(2.5)^5=\left(\frac{5}{2}\right)^5=\frac{3125}{2^5}>\frac{2048}{2^5}=\frac{2^{11}}{2^5}=2^6$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{e^{\frac{5}{6}}>2}$$

以上より，$1<e^{\frac{1}{2}}<2<e^{\frac{5}{6}}<3$ であり，増減表は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$e^{\frac{5}{6}}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↗		↗	極大	↘		↘		↘		↘

極大値は　$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2e}$

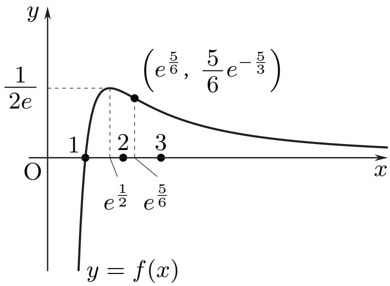
$f\left(e^{\frac{5}{6}}\right) = \dfrac{5}{6}e^{-\frac{5}{3}}$ より

変曲点 $\left(e^{\frac{5}{6}},\ \dfrac{5}{6}e^{-\frac{5}{3}}\right)$

$$\lim_{x\to+0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} \cdot \frac{1}{x} = 0$$

以上のことから，グラフは右図のようになる。



173 (1) $f(x) = \dfrac{4x^2+3}{2x-1} = 2x+1+\dfrac{4}{2x-1}$　$\left(x \neq \dfrac{1}{2}\right)$ より

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{(2x-1)^2} = \frac{2(2x-1)^2-8}{(2x-1)^2} = \frac{2(2x+1)(2x-3)}{(2x-1)^2}$$

したがって，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘		↘	極小	↗

よって，**極大値 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2$，極小値 $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 6$**

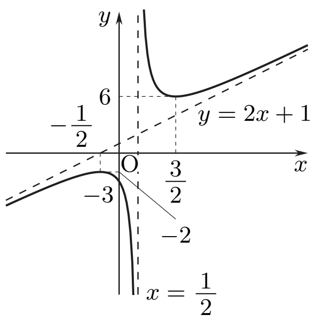
(2)
$$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-(2x+1)\} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{2x-1} = 0$$

より，直線 **$y = 2x+1$** は漸近線である。また

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}\pm0} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pm0}\left(2x+1+\frac{4}{2x-1}\right)$$
$$= \pm\infty \quad \text{（複号同順）}$$

より，直線 **$x = \dfrac{1}{2}$** も漸近線である。

(3) $y = f(x)$ の概形は右図のようになる。



2.4　最大・最小

問題

174 (1) 関数 $f(x)=e^{-x}+x-1$ の最小値を求めよ。（名古屋市立大）

(2) $x>0$ で定義された関数 $f(x)=x\log x^2$ の最小値を求めよ。ただし，対数は自然対数である。（茨城大）

175 関数 $f(x)=\dfrac{a\sin x}{\cos x+2}$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ の最大値が $\sqrt{3}$ となるように a の値を定めよ。（信州大）

176 $y=\dfrac{x^2+3x+6}{x+1}$，$x=t^3-3t+2$ とする。$-1 \leqq t \leqq 2$ における x の最大値は $\boxed{}$，y の最小値は $\boxed{}$ である。（芝浦工業大）

177 実数全体で定義された関数 $f(x)=\dfrac{x^4+3x^2+4}{x^2+1}$ の最小値を求めよ。（同志社大）

チェック・チェック

174 (1)，(2) ともに x で微分して，$f(x)$ の増減を調べましょう。

175 $f(x)=a\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x+2}=ag(x)$ として，まずは $g(x)$ について調べましょう。

176 $x=f(t)$，$y=g(x)$ の形です。x は t の関数，y は x の関数ですね。t の範囲が与えられているのですから，まずは $x=f(t)$ の増減を調べてみましょう。そうすれば，$x=f(t)$ の値域，つまり $y=g(x)$ の定義域がわかります。

177 $f(x)$ の増減を調べればよいのですが，分母，分子とも x^4，x^2，定数項のみの式ですから $x^2=t$ とおくと計算がラクになりますね。$x^2+1=u$ とおくのも効果的です。

解答・解説

174 (1) $f(x)=e^{-x}+x-1$

$$f'(x)=(-x)'e^{-x}+1=-e^{-x}+1$$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$f(0)=1+0-1=0$ より，$f(x)$ の最小値は

$\underline{\mathbf{0}}$ $(x=0)$

(2) $f(x)=x\log x^2$ $(x>0)$

$$f'(x)=(x)'\log x^2+x(\log x^2)'=\log x^2+x\cdot\frac{(x^2)'}{x^2}=\log x^2+2$$

$f'(x)=0$ を解くと

$$\log x^2=-2 \qquad x^2=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{e}\ (\because\ x>0)$$

よって，$x>0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}\log\left(\dfrac{1}{e}\right)^2=-\dfrac{2}{e}$ より，$f(x)$ の $x>0$ における最小値は

$\underline{\boldsymbol{-\frac{2}{e}}}$ $\left(x=\dfrac{1}{e}\right)$

175 $g(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x+2}$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ とおくと，$f(x)=ag(x)$ である。

$$g'(x)=\frac{\cos x(\cos x+2)+\sin^2 x}{(\cos x+2)^2}=\frac{2\cos x+1}{(\cos x+2)^2}$$

よって，増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

$$\therefore\quad 0\leqq g(x)\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(i) $a>0$ のとき，$0\leqq ag(x)\leqq\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

なので，$f(x)$ の最大値が $\sqrt{3}$ となるのは

$$\frac{a}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\qquad\therefore\quad a=3\quad(a>0\text{ をみたす})$$

(ii) $a=0$ のとき，$ag(x)=0$ より，不適。

(iii) $a<0$ のとき，$\dfrac{a}{\sqrt{3}}\leqq ag(x)\leqq 0$ より，不適。

以上より　$\underline{\boldsymbol{a=3}}$

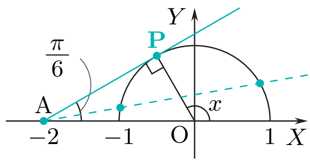
別解 A$(-2,\ 0)$，P$(\cos x,\ \sin x)$ とおくと

$$g(x)=\frac{\sin x-0}{\cos x-(-2)}=(\text{AP の傾き})$$

であり，$0\leqq x\leqq \pi$ より

$$0\leqq (\text{AP の傾き})\leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\quad 0\leqq g(x)\leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$$



176 $x=t^3-3t+2$ より $\dfrac{dx}{dt}=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$ だから，$f(t)=t^3-3t+2$ とおくと $x=f(t)$ の $-1\leqq t\leqq 2$ における増減表は右下のようになる。

したがって，$-1\leqq t\leqq 2$ のとき

$$0\leqq x\leqq 4$$

よって，x の最大値は

$$f(-1)=f(2)=\underline{\mathbf{4}}$$

t	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

次に，$y=\dfrac{x^2+3x+6}{x+1}$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x+6)}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

だから，$g(x)=\dfrac{x^2+3x+6}{x+1}$ とおくと，$y=g(x)$ の $0\leqq x\leqq 4$ における増減表は右のようになる。

したがって，y の最小値は

$$g(1)=\underline{\mathbf{5}}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

177 $\boldsymbol{x^2=t}$ とおくと，$t\geqq 0$ であり，$f(x)=\dfrac{t^2+3t+4}{t+1}=g(t)$ とおくと

$$g'(t)=\frac{(2t+3)(t+1)-(t^2+3t+4)}{(t+1)^2}=\frac{t^2+2t-1}{(t+1)^2}$$

したがって，増減表は右のようになる。$g(t)$ $(=f(x))$ の最小値は

$$g(-1+\sqrt{2})=\underline{\mathbf{2\sqrt{2}+1}}$$

t	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$		$\nearrow$

別解 $\boldsymbol{x^2+1=u}$ とおくと，$u\geqq 1$ であり

$$f(x)=\frac{(u-1)^2+3(u-1)+4}{u}=\frac{u^2+u+2}{u}=1+u+\frac{2}{u}$$

$$\geqq 1+2\sqrt{u\cdot\frac{2}{u}}=1+2\sqrt{2}\quad(\because\ \text{相加平均・相乗平均の不等式})$$

等号は

$$u=\frac{2}{u}\qquad\therefore\quad u=\sqrt{2}\ (\geqq 1)$$

のとき成立するから，$f(x)$ の最小値は $1+2\sqrt{2}$ である。

2.5　方程式への応用

問題

178 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において，方程式 $4\sin^3 x + 3\sqrt{3}\cos x + 2 = k$ の実数解の個数を求めよ。ただし，k は定数である。（千葉大　改）

179 (1) 曲線 $y = e^x$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における接線の方程式を求めよ。

(2) 方程式 $e^x = ax$ が実数解をもたない a の値の範囲を求めよ。

（西日本工業大）

180 $x \neq 0$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ について，$y = f(x)$ の表す曲線を C とする。点 $(1,\ t)$ を通る C の接線がちょうど 3 本あるような t の値の範囲を求めよ。（東京農工大　改）

チェック・チェック

178 方程式 $f(x) = k$ の実数解は，曲線 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = k$ との共有点の x 座標ですね。$y = f(x)$ のグラフをかいて，直線 $y = k$ を動かしてみましょう。

179 (2) は $f(x) = e^x$ と $g(x) = ax$ のグラフの共有点を調べればよいですね。(1) を無視して，$\dfrac{e^x}{x} = a\ (x \neq 0)$ と変形する（定数 a を分離する）解法もあります。

180 まずは曲線上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式をつくり，点 $(1,\ t)$ を通るための条件 $(*)$ を求めます。ここで，$f'(x) = -\dfrac{x+2}{x^3}$ より $f(x)$ は極値を 1 つしかもたないので，$y = f(x)$ のグラフに相異なる 2 点で接する直線は存在しません。したがって，接点の個数と接線の本数は一致するので，あとは，条件 $(*)$ をみたす a が 3 個存在するための t の値の範囲を求めましょう。

解答・解説

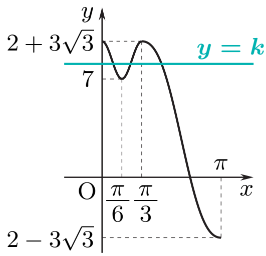
178 $f(x)=4\sin^3 x+3\sqrt{3}\cos x+2$ とおくと

$$f'(x)=12\sin^2 x\cos x-3\sqrt{3}\sin x=3\sin x(4\sin x\cos x-\sqrt{3})$$
$$=3\sin x(2\sin 2x-\sqrt{3})$$

$0\leqq x\leqq\pi$ において，$\sin x=0$ となるのは $x=0,\ \pi$，$\sin 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となるのは $x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{3}$ より，増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$2+3\sqrt{3}$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$2+3\sqrt{3}$	$\searrow$	$2-3\sqrt{3}$

これより，$y=f(x)$ のグラフは右下図のようになる。

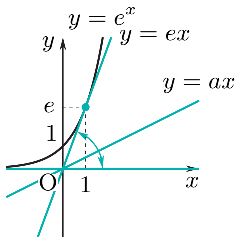


したがって，**曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ との共有点の個数**を調べることにより，$f(x)=k$ の実数解の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{k<2-3\sqrt{3},\ k>2+3\sqrt{3}} & \textbf{のとき 0 個} \\ \boldsymbol{2-3\sqrt{3}\leqq k<7} & \textbf{のとき 1 個} \\ \boldsymbol{k=7,\ 2+3\sqrt{3}} & \textbf{のとき 2 個} \\ \boldsymbol{7<k<2+3\sqrt{3}} & \textbf{のとき 3 個} \end{cases}$$

179 (1) $y=e^x$ より $y'=e^x$ なので，点 $(t,\ e^t)$ における接線の方程式は

$y=e^t(x-t)+e^t$　　$\therefore$　$\boldsymbol{y=e^tx-e^t(t-1)}$



(2) **曲線 $y=e^x$ と直線 $y=ax$ とが共有点をもたない**ような a の範囲を求める。(1) で求めた接線が原点 $(0,\ 0)$ を通るとき　$0=-e^t(t-1)$　　$\therefore$　$t=1$

よって，原点を通る接線の方程式は　$y=ex$

グラフより，共有点をもたない a の範囲は

$\boldsymbol{0 \leqq a < e}$

別解 $x=0$ は $e^x=ax$ の解とはならないから，$\dfrac{e^x}{x}=a$ と変形し，$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ とおいて，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a$ とが共有点をもたないような a の範囲を求める。

$$f'(x)=\frac{(e^x)'\cdot x-e^x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{xe^x-e^x}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

より，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

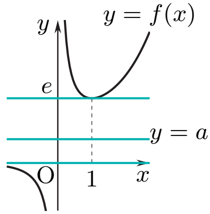
x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	e	$\nearrow$

$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$，

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ より

$y=f(x)$ のグラフは右図のようになるので，共有点をもたない a の範囲は

$0 \leqq a < e$



180 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ より

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}=-\frac{x+2}{x^3}$$

よって，C 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y=-\frac{a+2}{a^3}(x-a)+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}$$
$$=-\frac{a+2}{a^3}x+\frac{2}{a}+\frac{3}{a^2}$$

これが点 $(1,\ t)$ を通るための条件は

$$t=-\frac{a+2}{a^3}+\frac{2}{a}+\frac{3}{a^2}=\frac{2a^2+2a-2}{a^3}$$

である。点 $(1,\ t)$ を通る C の接線がちょうど 3 本あるような t の値の範囲を求めるには，$g(a)=\dfrac{2(a^2+a-1)}{a^3}$ として，**$y=g(a)$ と $y=t$ のグラフの共有点が 3 個**となるための t の条件を求めればよい。

$$g'(a)=2\cdot\frac{(2a+1)a^3-(a^2+a-1)\cdot 3a^2}{a^6}$$
$$=-\frac{2(a^2+2a-3)}{a^4}=-\frac{2(a+3)(a-1)}{a^4}$$

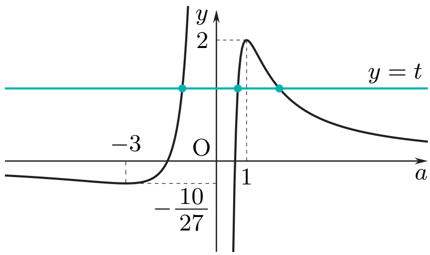
より，$g(a)$ の増減表は次のようになる。

a	$\cdots$	-3	$\cdots$	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(a)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$g(a)$	$\searrow$	$-\dfrac{10}{27}$	$\nearrow$		$\nearrow$	2	$\searrow$

さらに，$\displaystyle\lim_{a\to\pm\infty}g(a)=0,\ \lim_{a\to+0}g(a)=-\infty,\ \lim_{a\to-0}g(a)=\infty$ より，$y=g(a)$ のグラフは右下図のようになる。

したがって，曲線 $y=g(a)$ が直線 $y=t$ と共有点を 3 個もつための条件は

$$\boldsymbol{-\frac{10}{27}<t<0,\ 0<t<2}$$



2.6 不等式への応用

問題

181 $x>0$ のとき，$x>\sin x>x-\dfrac{1}{6}x^3$ であることを示せ。 （茨城大）

182 不等式 $x\cos x<\sin x<x\ (0<x<\pi)$ を示し，これを用いて，

$$f(x)=\frac{x-\sin x}{x^2}\ (0<x<\pi) \text{ のとき } \lim_{x\to+0}f(x)=0$$

を示せ。 （岐阜薬科大　改）

183 $x>0$ のとき，任意の自然数 n に対して次の不等式が成立することを数学的帰納法で証明せよ。

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^3}{3\,!}+\cdots+\frac{x^n}{n\,!}$$

（宇都宮大）

184 (1) $\log x$ を x の自然対数とする。このとき，関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}\ (x>0)$ の極値，および $y=f(x)$ のグラフと x 軸との交点を求め，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2) a を正の数とする。不等式 $a^x\geqq x^a$ が，$x\geqq a$ である任意の x に対して成り立つような，a の範囲を求めよ。 （東北大）

チェック・チェック

181 ある区間で不等式 $f(x) > g(x)$ が成立することを示すには，この区間で **$h(x) = f(x) - g(x)$** > 0 が成立することを示せばよいわけです。$h(x)$ が微分可能ならば

「$h'(x)$ から，$h(x)$ の増減を調べ，**$h(x)$ の最小値 > 0** を示す」

ことになります。$h'(x)$ の符号が不明な場合はさらに，$\{h'(x)\}' = h''(x)$ を用いて，$h'(x)$ の増減を調べて，$\cdots$ と微分を繰り返すことも少なくありません。

182 **ロピタルの定理**

> $h(x)$，$g(x)$ が $x = a$ で微分可能であり，$h(a) = g(a) = 0$ ならば
> $$\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{h'(x)}{g'(x)}$$
> ロピタルの定理

は，微分可能な限り，$\dfrac{0}{0}$ の不定形でなくなるまでこの操作を続けることができる非常に便利な公式です。これを利用すれば

$$\lim_{x\to+0}\frac{x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to+0}\frac{1 - \cos x}{2x} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{2} = 0$$

とただちに結論が出ます。ロピタルの定理を使うときは，必要な条件をみたすことを明記したうえで使うようにしましょう。ここでは，ロピタルの定理を用いずに，与えられた不等式を用いて，**ハサミウチの原理**にもち込みます。

183 $F_n(x) = e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2\,!} + \dfrac{x^3}{3\,!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n\,!}\right) > 0$ を示せばよいですね。数学的帰納法を用いるわけですが，${F_{k+1}}'(x)$ と $F_k(x)$ の関係に注意して下さい。

また，e^x については

$$\boldsymbol{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \cdots + \frac{x^n}{n\,!} + \cdots}$$

が成り立つことがわかっています（テーラー展開）。これは覚えておくべき等式です。

184 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$ は覚えておくべき事実です。

(2) $a^x \geqq x^a$ より $\log a^x \geqq \log x^a$ です。これをうまく変形すると，(1) のグラフが利用できます。

解答・解説

181 $f(x) = x - \sin x$ とおくと，$f'(x) = 1 - \cos x \geqq 0$ より，$f(x)$ は単調増加なので，$x > 0$ のとき　$f(x) > f(0) = 0$

よって，$x > 0$ のとき $x > \sin x$ である。

次に，$g(x) = \sin x - \left(x - \dfrac{1}{6}x^3\right) = \sin x - x + \dfrac{1}{6}x^3$ とおくと

$$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 \qquad g''(x) = -\sin x + x = f(x) > 0\ (x > 0)$$

よって，$g'(x)$ は単調増加であり，$g'(x) > g'(0) = 0$ から，$g(x)$ もまた単調増加である。よって，$x > 0$ のとき　$g(x) > g(0) = 0$

以上より，$x > 0$ のとき，$x > \sin x > x - \dfrac{1}{6}x^3$ が成り立つ。　（証終）

182 $g(x) = x - \sin x$ とおくと　$g'(x) = 1 - \cos x$

$0 < x < \pi$ のとき，$\cos x < 1$ より $g'(x) > 0$ であるから，$g(x)$ は単調増加なので

$$g(x) > g(0) = 0$$

よって，$0 < x < \pi$ において，$\sin x < x$ が成り立つ。

同様に，$h(x) = \sin x - x\cos x$ とおくと　$h'(x) = x\sin x$

$0 < x < \pi$ において $h'(x) > 0$ より $h(x)$ は単調増加であるから

$$h(x) > h(0) = 0 \qquad \therefore\quad x\cos x < \sin x \quad (0 < x < \pi)$$

したがって，$0 < x < \pi$ において，$x\cos x < \sin x < x$ が成り立つ。　（証終）

さらにこのとき

$$-x < -\sin x < -x\cos x \qquad 0 < x - \sin x < x - x\cos x$$

$$\therefore\quad 0 < \frac{x - \sin x}{x^2} < \frac{1 - \cos x}{x} \qquad (0 < x < \pi)$$

ここで

$$\lim_{x\to+0}\frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{1 - \cos x}{x}\cdot\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x\to+0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{x}{1 + \cos x} = 1^2\cdot\frac{0}{1 + 1} = 0$$

よって，ハサミウチの原理より　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}\frac{x - \sin x}{x^2} = 0$　（証終）

【参考】後半を，ロピタルの定理を用いて示すと次のようになる。

$f_1(x) = x - \sin x$，$f_2(x) = x^2$ とおくと，$f_1(x)$，$f_2(x)$ はともに微分可能であり，$f_1(0) = 0$，$f_2(0) = 0$ なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to+0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to+0}\frac{f_1{}'(x)}{f_2{}'(x)}$$

$f_1{}'(x) = 1 - \cos x$，$f_2{}'(x) = 2x$ はともに微分可能であり，$f_1{}'(0) = 0$，$f_2{}'(0) = 0$ なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to+0}\frac{f_1{}'(x)}{f_2{}'(x)} = \lim_{x\to+0}\frac{f_1{}''(x)}{f_2{}''(x)} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{2} = 0$$

以上より　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$

183 $F_n(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2\,!} - \dfrac{x^3}{3\,!} - \cdots - \dfrac{x^n}{n\,!}$ とおき，$x > 0$ において $F_n(x) > 0$ が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

(I) $n = 1$ のとき

$$F_1(x) = e^x - 1 - x \qquad \therefore \quad F_1{}'(x) = e^x - 1 > 0 \ (x > 0)$$

より $F_1(x)$ は単調増加であり，$x > 0$ のとき　$F_1(x) > F_1(0) = 0$

よって，$n = 1$ のときに成立する。

(II) $n = k$ のときに成り立つと仮定すると

$$F_{k+1}(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2\,!} - \frac{x^3}{3\,!} - \cdots - \frac{x^k}{k\,!} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$F_{k+1}{}'(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2\,!} - \cdots - \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{x^k}{k\,!} = F_k(x) > 0$$

$F_{k+1}(x)$ は単調増加であり　$F_{k+1}(x) > F_{k+1}(0) = 0$

よって，$n = k + 1$ のときも成り立つ。

(I)，(II) より，すべての自然数 n に対して $F_n(x) > 0$ が成り立つ。　（証終）

184 (1) $f(x) = \dfrac{\log x}{x} \ (x > 0)$

$f'(x) = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$ より，$f'(x) = 0$ を解くと　$x = e$

$f(x)$ の増減表は右のようになり

極大値 $\dfrac{1}{e}$ ($x = e$ のとき)

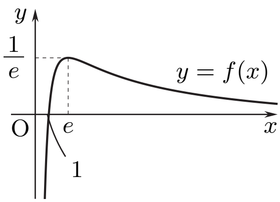
x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	極大	↘

また，$f(x) = \dfrac{\log x}{x} = 0$ を解いて　$x = 1$

したがって，x 軸との交点は **(1，0)** であり

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+0} f(x) = -\infty$$

より，グラフの概形は **右図** のようになる。



(2) $a > 0$，$x > 0$ より，$a^x \geqq x^a$ を変形すると

$$x \log a \geqq a \log x \qquad \frac{\log x}{x} \leqq \frac{\log a}{a} \qquad \therefore \quad f(x) \leqq f(a)$$

$x \geqq a$ となる任意の x で，$f(x) \leqq f(a)$ が成り立つのは，$x \geqq a$ における $y = f(x)$ の最大値が $f(a)$ となる場合である。$y = f(x)$ のグラフから，このような a の範囲は

$a \geqq e$

2.7　速度・加速度

問題

185 直線軌道を走る電車がブレーキをかけ始めてから止まるまでの間について，t 秒間に走る距離を x メートルとすると，

$$x = 16(t - 3at^2 + 4a^2t^3 - 2a^3t^4)$$

であるという。ここで，a は運転席にある調節レバーによって値を調節できる正の定数である。

(1) ブレーキをかけ始めてから t 秒後の電車の速度 $v = \dfrac{dx}{dt}$ を t と a で表せ。

(2) 駅まで 200 メートルの地点でブレーキをかけ始めたときにちょうど駅で電車が止まったとする。そのときの a の値を求めよ。

(3) 乗客の安全のため，電車の加速度 $\alpha = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ の大きさ $|\alpha|$ が 1 を越えない範囲にレバーを調節しておく規則になっている。このとき，ブレーキをかけ始めてから止まるまでの距離を最小にする a の値とそのときの距離を求めよ。（立教大）

186 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標を

$$x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t$$

とするとき，次の問に答えよ。

(1) 時刻 t における点 P の速度 $\overrightarrow{v}$ およびその大きさ $\left|\overrightarrow{v}\right|$ を求めよ。

(2) $t = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{v}$ が x 軸の正の向きとのなす角 α を求めよ。

(3) 原点を O とするとき，ベクトル $\overrightarrow{v}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角 θ は一定であることを示し，θ を求めよ。（香川大）

チェック・チェック

185 数直線上を運動する点 P の座標 x が，時刻 t の関数として

$$x = f(t)$$

と表されるとき，x の変化率 v，すなわち

$$\boldsymbol{v = \frac{dx}{dt} = f'(t)}$$

を時刻 t における点 P の**速度**といい，速度の絶対値 $|v|$ を**速さ**といいます。

さらに，速度 v の変化率 α，すなわち

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)}$$

を時刻 t における点 P の**加速度**といいます。

186 平面上を運動する点 P$(x,\ y)$ において，時刻 t の関数として

$$x = f(t),\ y = g(t)$$

と表されるとき，点 P の x 軸方向の速度 $\dfrac{dx}{dt}$，y 軸方向の速度 $\dfrac{dy}{dt}$ を成分とするベクトル $\overrightarrow{v}$，すなわち

$$\overrightarrow{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$

を時刻 t における点 P の**速度**といいます。$\overrightarrow{v}$ の向きは，点 P のえがく曲線の接線方向と一致します。

また，$\overrightarrow{v}$ の大きさ $\left|\overrightarrow{v}\right|$，すなわち

$$\left|\overrightarrow{v}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

を点 P の**速さ**といいます。

さらに点 P の x 軸方向の加速度 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$，y 軸方向の加速度 $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ を成分とするベクトル $\overrightarrow{\alpha}$，すなわち

$$\overrightarrow{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

を時刻 t における点 P の**加速度**といいます。

解答・解説

185 $x=16(t-3at^2+4a^2t^3-2a^3t^4)$

(1) $v=\dfrac{dx}{dt}=\underline{\boldsymbol{16(1-6at+12a^2t^2-8a^3t^3)}}$

(2) $v=0$ を解くと

$$16(1-6at+12a^2t^2-8a^3t^3)=0$$
$$(1-2at)^3=0$$
$$2at=1 \qquad \therefore \quad t=\frac{1}{2a}$$

となるので，ブレーキをかけ始めてから止まるまでの距離を x_0 とすると

$$x_0=16\left\{\frac{1}{2a}-3a\cdot\left(\frac{1}{2a}\right)^2+4a^2\cdot\left(\frac{1}{2a}\right)^3-2a^3\cdot\left(\frac{1}{2a}\right)^4\right\}$$
$$=16\left(\frac{1}{2a}-\frac{3}{4a}+\frac{1}{2a}-\frac{1}{8a}\right)$$
$$=16\cdot\frac{1}{8a}=\frac{2}{a}$$

よって，$x_0=200$ のとき

$$\frac{2}{a}=200 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{a=\frac{1}{100}}}$$

(3) $\alpha=\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{dv}{dt}=16(-6a+24a^2t-24a^3t^2)$

$$=16\cdot(-24a^3)\left(t^2-\frac{t}{a}+\frac{1}{4a^2}\right)$$
$$=-384a^3\left(t-\frac{1}{2a}\right)^2$$

$$\therefore \quad |\alpha|=384a^3\left(t-\frac{1}{2a}\right)^2$$

$0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2a}$ における $|\alpha|$ の最大値は

$96a\ (t=0)$

よって，$|\alpha|\leqq 1$ とするためには $96a\leqq 1$ であればよく，これと $a>0$ を合わせて

$$0<a\leqq\frac{1}{96}$$

この範囲において，x_0 が最小となるのは $\underline{\boldsymbol{a=\dfrac{1}{96}}}$ のときであり，そのときの距離は

$$\frac{2}{\frac{1}{96}}=\underline{\textbf{192（メートル）}}$$

186 (1) $x=e^t\cos t,\ \ y=e^t\sin t$

$$\frac{dx}{dt}=(e^t)'\cos t+e^t(\cos t)'=e^t\cos t-e^t\sin t$$
$$=e^t(\cos t-\sin t)$$
$$\frac{dy}{dt}=(e^t)'\sin t+e^t(\sin t)'=e^t\sin t+e^t\cos t$$
$$=e^t(\cos t+\sin t)$$

よって

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=\underline{\boldsymbol{(e^t(\cos t-\sin t),\ e^t(\cos t+\sin t))}}$$
$$|\vec{v}|=\sqrt{\{e^t(\cos t-\sin t)\}^2+\{e^t(\cos t+\sin t)\}^2}$$
$$=e^t\sqrt{(1-2\cos t\sin t)+(1+2\cos t\sin t)}$$
$$=\underline{\boldsymbol{\sqrt{2}e^t}}$$

(2) $t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\vec{v}=\left(e^{\frac{\pi}{2}}(0-1),\ e^{\frac{\pi}{2}}(0+1)\right)=e^{\frac{\pi}{2}}(-1,\ 1)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{3}{4}\pi,\ \sin\frac{3}{4}\pi\right)$$
$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{\alpha=\frac{3}{4}\pi}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(e^t\cos t,\ e^t\sin t)$ なので

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\sqrt{(e^t\cos t)^2+(e^t\sin t)^2}=e^t$$
$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=e^t(\cos t-\sin t)\cdot e^t\cos t+e^t(\cos t+\sin t)\cdot e^t\sin t=e^{2t}$$

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\vec{v}|\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|}=\frac{e^{2t}}{\sqrt{2}e^t\cdot e^t}=\frac{1}{\sqrt{2}}=(\text{一定})$$

となるので，θ は一定であり，$\underline{\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{4}}}$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=e^t(\cos t,\ \sin t)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と x 軸とのなす角は t である。

また

$$\vec{v}=\sqrt{2}e^t\left(\cos t\cos\frac{\pi}{4}-\sin t\sin\frac{\pi}{4},\ \sin t\cos\frac{\pi}{4}+\cos t\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{2}e^t\left(\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right),\ \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

より，$\vec{v}$ と x 軸とのなす角は $t+\dfrac{\pi}{4}$ である。以上より

$$\theta=\left|t-\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\pi}{4}=(\text{一定})$$

2.8　近似式

問題

187 関数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$ について，次の問に答えよ。

(1) 微分係数 $f'(1)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}$ を求めよ。

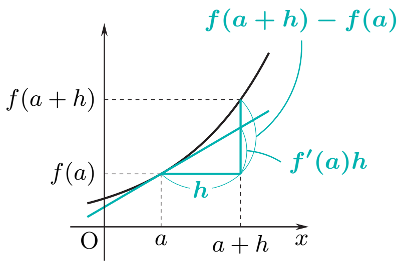
(3) x が 1 に十分近いときの近似式 $f'(x)\fallingdotseq a+b(x-1)$ の係数 $a,\ b$ を求めよ。

(4) (3) の結果を用いて，x が 1 に十分近いときの近似式
$$f(x)\fallingdotseq A+B(x-1)+C(x-1)^2$$
の係数 $A,\ B,\ C$ を求めよ。　（徳島大）

チェック・チェック

187 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，$x=a$ の近い値 $f(a+h)$ は h の 1 次式で近似することができます。

微分係数 $f'(a)$ は
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
なので，$|h|$ が十分小さいときは
$$f'(a)\fallingdotseq\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
すなわち
$$\boldsymbol{f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h}$$



です。これは $f(a+h)$ を接線で近似したもので 1 次近似とよばれます。さらに，2 次関数 $g(x)=px^2+qx+r$ によって $f(a+h)$ を近似し，$f(a+h)\fallingdotseq g(a+h)$ とみると，2 次近似
$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2$$
が得られます。

さらに，n 回まで微分可能ならば，n 次の導関数を $f^{(n)}(x)$ と書くと
$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$
が成り立ちます。

解答・解説

187 (1) $f(x) = (x^2 - 2x + 2)^{\frac{1}{2}}$ より

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 2x + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 - 2x + 2)'$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} \cdot (2x - 2)$$
$$= \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

よって

$$f'(1) = \frac{1 - 1}{\sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 + 2}} = \underline{\mathbf{0}}$$

(2)
$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x - 1} \cdot \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 + 2}}$$
$$= \underline{\mathbf{1}}$$

(3) x が 1 に十分近いとき

$$\frac{f'(x)}{x - 1} \fallingdotseq 1$$

としてよいので

$$f'(x) \fallingdotseq 0 + 1 \cdot (x - 1)$$

よって

$$\underline{\boldsymbol{a = 0,\ b = 1}}$$

別解 h が 0 に十分近いときの近似式

$$f'(\alpha + h) \fallingdotseq f'(\alpha) + f''(\alpha)h$$

に，$\alpha = 1$，$h = x - 1$ を代入すると

$$f'(x) \fallingdotseq f'(1) + f''(1)(x - 1)$$

よって，$a = f'(1)$，$b = f''(1)$ である。ここで

$$f''(x) = \frac{(x-1)'\sqrt{x^2 - 2x + 2} - (x - 1)(\sqrt{x^2 - 2x + 2})'}{(\sqrt{x^2 - 2x + 2})^2}$$
$$= \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2} - (x - 1) \cdot \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}}{x^2 - 2x + 2}$$
$$= \frac{x^2 - 2x + 2 - (x - 1)^2}{(x^2 - 2x + 2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{1}{(x^2 - 2x + 2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \quad f''(1) = \frac{1}{(1^2 - 2 \cdot 1 + 2)^{\frac{3}{2}}} = 1$$

より　$a = 0$，$b = 1$

(4) $f(x) \fallingdotseq A + B(x-1) + C(x-1)^2$ の両辺を x で微分すると

$$f'(x) \fallingdotseq B + 2C(x-1)$$

これと (3) の結果より

$$B = a,\ 2C = b$$

$$\therefore\quad B = 0,\ C = \frac{1}{2}$$

また，$x = 1$ のときは

$$f(1) = A$$

としてよいから

$$A = \sqrt{1^2 - 2\cdot 1 + 2} = 1$$

以上より

$$\underline{\boldsymbol{A = 1,\ B = 0,\ C = \frac{1}{2}}}$$