1　積分の計算

1.1　積分の計算

問題

188 (1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}(1+x)\,dx = \boxed{}$ （東北学院大）

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 (x+1-\sqrt{x})^2\,dx$ の値を求めよ。（岡山理科大）

189 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\,dx = \boxed{}$ である。また $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos x\,dx = \boxed{}$ である。

（北海道工業大）

190 (1) $\displaystyle\int_0^a \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}$ をみたす a で，$0 \leqq a \leqq \pi$ となるものは，$a = \boxed{}$ である。（北見工業大）

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$ を求めよ。（慶應大　改）

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \sin 3x \sin 5x\,dx$ を求めよ。（東京工科大）

191 (1) 方程式 $e^x = 2$ の解は $x = \boxed{}$，また $\displaystyle\int_0^1 |e^x - 2|\,dx = \boxed{}$ である。ただし，e は自然対数の底である。（愛知工業大）

(2) $\displaystyle\int 8^{2-x}\,dx$ を求めると $\boxed{}$ である。（静岡理工科大）

192 e が自然対数の底であるとき，$\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{dx}{x} = \boxed{}$ である。（神奈川大）

チェック・チェック

積分は，微分の逆演算として定義されます。つまり

$$F'(x) = f(x) \iff \int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

以下，C は積分定数を表すものとします。基本関数の不定積分は，導関数の公式から得られます。

188 $\displaystyle \int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \fallingdotseq -1)$

189 三角関数の積分については次の公式を使います。

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,\quad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

190 $\sin x \cos x$ の積分は $\sin$ の 2 倍角の公式を，$\sin^2 x$ および $\cos^2 x$ の積分は半角の公式を，また，$\sin\alpha\sin\beta$，$\cos\alpha\cos\beta$，$\sin\alpha\cos\beta$ の形の積分は積和の公式を用いることで，**次数を下げて** 1 次式の形に直してから積分します。

(1) 2 倍角の公式より　$\sin x \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

(2) 半角の公式より　$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

(3) 積和の公式より　$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$

191 (1) 積分区間 $0 \leqq x \leqq 1$ の中で場合分けして**絶対値をはずし**，積分を実行します。

(2) 指数関数の積分は

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\log a}a^x + C \quad (a > 0,\ a \fallingdotseq 1)$$

ですが，これについては

$$a^x = e^{\log a^x} = e^{x\log a}$$

と変形してから積分してもよいですね。もちろん

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

です。

192 $\displaystyle \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$

解答・解説

188 (1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}(1+x)\,dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right)dx$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \underline{\mathbf{\frac{16}{15}}}$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 (x+1-\sqrt{x})^2\,dx = \int_0^1 (x^2+1+x+2x-2\sqrt{x}-2x\sqrt{x})\,dx$

$$= \int_0^1 \left(x^2+3x+1-2x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 1 - \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \underline{\mathbf{\frac{7}{10}}}$$

189 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = \underline{\mathbf{1}}$

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{3}{2}\pi} = \sin\frac{3}{2}\pi - \sin 0 = \underline{\mathbf{-1}}$$

190 (1) sin の 2 倍角の公式より

$$\int_0^a \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^a$$

$$= -\frac{1}{4}(\cos 2a - 1)$$

したがって

$$-\frac{1}{4}(\cos 2a - 1) = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \cos 2a = -1$$

$0 \leqq a \leqq \pi$ より　$0 \leqq 2a \leqq 2\pi$

$$\therefore \quad 2a = \pi$$

$$a = \underline{\mathbf{\frac{\pi}{2}}}$$

(2) sin の半角の公式より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\mathbf{\frac{\pi}{4}}}$$

(3) 三角関数の積和の公式より

$$\begin{aligned}\sin 3x \sin 5x &= -\frac{1}{2}\{\cos(3x+5x)-\cos(3x-5x)\}\\ &= \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x)\end{aligned}$$

よって，求める不定積分は積分定数を C とすると

$$\begin{aligned}\int \sin 3x \sin 5x\,dx &= \frac{1}{2}\int(\cos 2x - \cos 8x)\,dx\\ &= \underline{\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C}\end{aligned}$$

191 (1) $e^x = 2$ の解は　$x = \underline{\log 2}$

よって，$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$|e^x - 2| = \begin{cases} -e^x + 2 & (0 \leqq x \leqq \log 2) \\ e^x - 2 & (\log 2 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_0^1 |e^x-2|\,dx &= \int_0^{\log 2}(-e^x+2)\,dx + \int_{\log 2}^1 (e^x-2)\,dx\\ &= \Big[-e^x+2x\Big]_0^{\log 2} + \Big[e^x - 2x\Big]_{\log 2}^1\\ &= (-2+2\log 2+1-0)+(e-2-2+2\log 2)\\ &= \underline{4\log 2 + e - 5}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int 8^{2-x}\,dx &= 8^2\int 8^{-x}\,dx = 8^2\int\left(-\frac{1}{\log 8}8^{-x}\right)'dx\\ &= \underline{-\frac{8^{2-x}}{\log 8}+C}\ (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

別解
$$\begin{aligned}\int 8^{2-x}\,dx &= 8^2\int e^{\log 8^{-x}}\,dx = 8^2\int e^{-x\cdot\log 8}\,dx\\ &= 8^2\int e^{(-\log 8)x}\,dx\\ &= 8^2\cdot\left(-\frac{1}{\log 8}\right)e^{(-\log 8)x}+C\\ &= -\frac{8^2}{\log 8}e^{\log 8^{-x}}+C = -\frac{8^2}{\log 8}8^{-x}+C\\ &= -\frac{8^{2-x}}{\log 8}+C\ (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

192 $$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{dx}{x} = \Big[\log|x|\Big]_{\frac{1}{e}}^{e} = \log e - \log\frac{1}{e} = 1-(-1) = \underline{2}$$

1.2　置換積分

問題

193 $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^n\,dx$ (n は自然数) を求めよ。　（広島市立大）

194 (1) $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{3}{3x+7}\,dx$　（神奈川工科大）

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,dx = \log \boxed{}$　（拓殖大）

195 (1) 不定積分 $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ を求めよ。　（東京都市大）

(2) 次の定積分を計算せよ。 $\displaystyle\int_1^e 5^{\log x}\,dx$　（横浜国立大）

チェック・チェック

193 積分変数 x を置き換えるタイプです。

$x=g(t)$ のもとで

$$\int f(x)\,dx=\int f(g(t))g'(t)\,dt=\int f(g(t))\frac{dx}{dt}\,dt$$

$x=g(t),\ a=g(\alpha),\ b=g(\beta)$ のもとで

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

置換積分

194 関数 $g(x)$ をひとかたまりとみるタイプです。

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du \quad ただし \quad g(x)=u$$

特殊な場合として，$f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \{f(x)\}^\alpha f'(x)\,dx=\frac{1}{\alpha+1}\{f(x)\}^{\alpha+1}+C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log|f(x)|+C$$

195 (1) $xe^{x^2}=e^{x^2}\cdot\dfrac{(x^2)'}{2}$ とみましょう。

(2) $\log x=t$ とおいてみましょう。

解答・解説

193 $1-x=t$ とおくと，$x=1-t$ であり，$\dfrac{dx}{dt}=-1$ より　　$dx=-dt$

さらに，$x:0\to1$ のとき，$t:1\to0$ だから

$$\int_0^1 x(1-x)^n\,dx=\int_1^0(1-t)t^n(-dt)=\int_0^1(t^n-t^{n+1})\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}-\frac{1}{n+2}t^{n+2}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}}$$

別解 部分積分を用いると

$$\int_0^1 x(1-x)^n\,dx=\int_0^1 x\left\{-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right\}'\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{n+1}x(1-x)^{n+1}\right]_0^1+\frac{1}{n+1}\int_0^1(1-x)^{n+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[-\frac{1}{n+2}(1-x)^{n+2}\right]_0^1=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

194 (1) $$\int_{-2}^1\frac{3}{3x+7}\,dx=\int_{-2}^1\frac{(3x+7)'}{3x+7}\,dx=\Big[\log|3x+7|\Big]_{-2}^1$$

$$=\log10-\log1=\underline{\boldsymbol{\log 10}}$$

(2) $$\int_0^1\frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,dx=\int_0^1\frac{(x^2+3x+2)'}{x^2+3x+2}\,dx$$

$$=\Big[\log|x^2+3x+2|\Big]_0^1=\log6-\log2=\log\underline{\boldsymbol{3}}$$

195 (1) $$\int xe^{x^2}\,dx=\int e^{x^2}\cdot\frac{(x^2)'}{2}\,dx=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}e^{x^2}+C}}$$ （C は積分定数）

(2) $\log x=t$ とおくと，$x=e^t$ であり，$\dfrac{dx}{dt}=e^t$ より　　$dx=e^t\,dt$

さらに，$x:1\to e$ のとき $t:0\to1$ だから

$$\int_1^e 5^{\log x}\,dx=\int_0^1 5^te^t\,dt=\int_0^1(5e)^t\,dt$$

$$=\left[\frac{(5e)^t}{\log(5e)}\right]_0^1=\frac{5e-1}{\log(5e)}=\underline{\boldsymbol{\frac{5e-1}{1+\log5}}}$$

別解 $5^{\log x}=(e^{\log5})^{\log x}=(e^{\log x})^{\log5}=x^{\log5}$ なので

$$\int_1^e 5^{\log x}\,dx=\int_1^e x^{\log5}\,dx=\left[\frac{1}{1+\log5}x^{1+\log5}\right]_1^e$$

$$=\frac{e^{1+\log5}-1}{1+\log5}=\frac{5e-1}{1+\log5}$$

1.3　部分積分

問題

196 部分積分の公式は $\int f(x)g'(x)\,dx = \boxed{}$ である。この公式を用いて不定積分 $\int \log x\,dx = \boxed{}$ となる。　（静岡理工科大）

197 次の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$　（北見工業大）

(2) $\displaystyle\int_0^1 x2^x\,dx$　（会津大）

198 (1) 次の定積分の値を求めよ。　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin 4x\,dx$

（神戸商船大）

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$ を求めよ。　（広島市立大）

チェック・チェック

196 ～ **198** 積の微分法の公式

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

を積分すると，次の公式が成り立ちます。

積分する　　そのまま

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

そのまま　　微分する

部分積分

この方法は，とくに

$x^n \times$ (指数関数)，$x^n \times$ (三角関数)，$x^n \times$ (対数関数)

のときに有効です。この場合，指数関数・三角関数は $f'(x)$ とみて積分，対数関数は $g(x)$ とみて微分してみましょう。

解答・解説

196 部分積分の公式は

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \underline{\boldsymbol{f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}}$$

である。この公式を用いると

$$\int \log x\,dx = \int (x)'\log x\,dx = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \underline{\boldsymbol{x\log x - x + C}}$$ （C は積分定数）

197 (1) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx = \int_0^1 x(e^x)'\,dx = \Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - \Big[e^x\Big]_0^1 = \underline{\mathbf{1}}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x2^x\,dx = \int_0^1 x\left(\frac{2^x}{\log 2}\right)'\,dx = \left[\frac{x2^x}{\log 2}\right]_0^1 - \frac{1}{\log 2}\int 2^x\,dx$

$$= \frac{2}{\log 2} - \frac{1}{\log 2}\left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_0^1 = \frac{2}{\log 2} - \frac{1}{\log 2}\cdot\frac{2-1}{\log 2}$$

$$= \frac{2}{\log 2} - \frac{1}{(\log 2)^2} = \underline{\boldsymbol{\frac{2\log 2 - 1}{(\log 2)^2}}}$$

198 (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin 4x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right)'\,dx$

$$= \left[-\frac{1}{4}(2x+1)\cos 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 4x\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\{(\pi+1)\cos 2\pi - \cos 0\} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\boldsymbol{-\frac{\pi}{4}}}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan x)'\,dx = \Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = \Big[-\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\log\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| + \log|\cos 0| = -\log\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\log 2$$

$$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 = \underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2}}$$

1.4 有理関数の積分（$x = a\tan\theta$）

問題

199 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \boxed{}$ （会津大）

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2+1}$ （広島市立大）

チェック・チェック

$\dfrac{\text{多項式}}{\text{多項式}}$ の形の分数関数を**有理関数**といいます。

199 **分母に $x^2 + a\ (a > 0)$** を含む積分は

$$x = \sqrt{a}\tan\theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \text{ で置換}$$

するとうまくいく場合が多いです。

解答・解説

199 (1) $\boldsymbol{x = \tan\theta}$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dx = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ であり，

$x : \dfrac{1}{\sqrt{3}} \to \sqrt{3}$ のとき，$\theta : \dfrac{\pi}{6} \to \dfrac{\pi}{3}$

$$\therefore \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}}$$

(2) $\boldsymbol{x = \frac{1}{3}\tan\theta}$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dx = \dfrac{d\theta}{3\cos^2\theta}$ であり，

$x : 0 \to \dfrac{1}{3}$ のとき，$\theta : 0 \to \dfrac{\pi}{4}$

$$\therefore \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{d\theta}{3\cos^2\theta} = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{12}}}$$

1.5　有理関数の積分（部分分数分解）

問題

200 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+1)}$ （広島市立大）

201 分数関数 $f(x)=\dfrac{x^2+8x-6}{(x^2+2)(x+2)}$ を $f(x)=\dfrac{Ax+B}{x^2+2}+\dfrac{C}{x+2}$ のように部分分数に分解すると定数 A，B，C の値は

$$A=\boxed{},\ B=\boxed{},\ C=\boxed{}$$

したがって，$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=\log\boxed{}$。ただし，対数は自然対数とする。

（東洋大）

202 $\dfrac{1}{(1-t^2)^2}$ を部分分数に分解すると

$$\frac{1}{(1-t^2)^2}=\frac{\boxed{}}{(1-t)^2}+\frac{\boxed{}}{1-t}+\frac{\boxed{}}{(1+t)^2}+\frac{\boxed{}}{1+t}$$

となる。

また，積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^3 x}$ の値は $\boxed{}+\dfrac{1}{2}\log\left(\boxed{}\right)$ である。

チェック・チェック

200 $\sqrt{x}=t$ とおき，部分分数分解します。

201，**202** $f(x)$，$g(x)$ を多項式として，$\displaystyle\int\frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ について，もし，分子の次数が，分母の次数より高いか，または等しいときには，$f(x)$ を $g(x)$ でわって，商 $Q(x)$，余り $R(x)$ を求めることによって

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g(x)Q(x)+R(x)}{g(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{g(x)}\quad (R(x)\text{ の次数}<g(x)\text{ の次数})$$

と変形してから積分を行うのが定石です。有理関数の積分は最終的に

$$\frac{f(x)}{g(x)}\quad (f(x)\text{ の次数})<(g(x)\text{ の次数})$$

の積分になりますが，分母が実数の範囲で因数分解できるときには，**部分分数分解**を行います。未定係数法に慣れましょう。

解答・解説

200 $\sqrt{x}=t$ とおくと，$x=t^2$ であり，$\dfrac{dx}{dt}=2t$ より $dx=2t\,dt$ なので

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+1)}=\int \frac{2t}{t^2(t+1)}\,dt$$
$$=2\int \frac{1}{t(t+1)}\,dt=2\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=2(\log|t|-\log|t+1|)+C$$
$$=2\log\left|\frac{t}{t+1}\right|+C=2\log\left|\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right|+C$$
$$=\underline{\boldsymbol{2\log\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}+C\left(=\log\frac{x}{x+2\sqrt{x}+1}+C\right)}}\quad (C\text{ は積分定数})$$

201 $\dfrac{Ax+B}{x^2+2}+\dfrac{C}{x+2}=\dfrac{(Ax+B)(x+2)+C(x^2+2)}{(x^2+2)(x+2)}$

より次の恒等式が成り立つ。

$$(Ax+B)(x+2)+C(x^2+2)=x^2+8x-6\quad\cdots\cdots(*)$$

$x=-2$ とおくと　$6C=-18$　$\therefore$ $\underline{\boldsymbol{C=-3}}$

$x=0$ とおくと　$2B+2C=-6$　$\therefore$ $\underline{\boldsymbol{B=0}}$

2 次の係数を比較して　$A+C=1$　$\therefore$ $\underline{\boldsymbol{A=4}}$

逆に，$A=4$，$B=0$，$C=-3$ のとき $(*)$ は恒等式となる。したがって

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\left(\frac{4x}{x^2+2}-\frac{3}{x+2}\right)dx$$
$$=2\int_0^2\frac{(x^2+2)'}{x^2+2}\,dx-3\int_0^2\frac{(x+2)'}{x+2}\,dx$$
$$=2\Big[\log(x^2+2)\Big]_0^2-3\Big[\log(x+2)\Big]_0^2=\underline{\log\boldsymbol{\frac{9}{8}}}$$

202 $\dfrac{1}{(1-t^2)^2}=\dfrac{a}{(1-t)^2}+\dfrac{b}{1-t}+\dfrac{c}{(1+t)^2}+\dfrac{d}{1+t}$ ……(∗) として通分すると

$$(\text{右辺})=\frac{a(1+t)^2+b(1-t)(1+t)^2+c(1-t)^2+d(1+t)(1-t)^2}{(1+t)^2(1-t)^2}$$

分子を比較して，次の恒等式を得る。

$$a(1+t)^2+b(1-t)(1+t)^2+c(1-t)^2+d(1+t)(1-t)^2=1$$

$t=1$ として $4a=1$，$t=-1$ として $4c=1$ を得るので　$a=c=\dfrac{1}{4}$

$t=0$ として　$a+b+c+d=1$　$\therefore$　$b+d=\dfrac{1}{2}$ …… ①

3 次の係数を比較して　$-b+d=0$ …… ②

①，②より　$b=d=\dfrac{1}{4}$

逆に，このとき (∗) は恒等式となるので

$$\frac{1}{(1-t^2)^2}=\underline{\frac{\frac{1}{4}}{(1-t)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{1-t}+\frac{\frac{1}{4}}{(1+t)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{1+t}}$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1+t}\right\}$$

また，$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^3 x}$ とおくと　$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\cos^4 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^2}\,dx$

ここで，$\sin x=t$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくと

$\cos x dx=dt$，$x:0\to\dfrac{\pi}{4}$ のとき $t:0\to\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore\quad I=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dt}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left\{\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1+t}\right\}dt$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-t}-\log|1-t|-\frac{1}{1+t}+\log|1+t|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{2t}{1-t^2}+\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1}{2}\log(\underline{\sqrt{2}+1})$$

1.6　三角関数の積分

問題

203 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x|\cos x|\,dx$　（広島市立大）

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x|\,dx$　（東洋大）

204 (1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x\,dx = \boxed{}$　（東京工科大）

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx$ を求めよ。　（山形大）

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin^4 x + \cos^4 x)\,dx$ の値を求めよ。　（日本女子大）

205 m と n は正の整数とする。m と n が等しい場合と異なる場合に分けて次の定積分を行え。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\,dx$

ただし，x は実数変数である。　（信州大）

206 (1) 次の不定積分を求めよ。

(i) $\displaystyle I = \int \tan x\,dx$

(ii) $\displaystyle J = \int \tan^2 x\,dx$　（宮城教育大）

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$ を求めよ。　（札幌医科大）

207 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sin\theta + \cos\theta}\,d\theta$$

（横浜国立大）

チェック・チェック

203 絶対値記号を含む定積分は，まず**絶対値をはずし**ます。必要であれば，グラフなどを利用して絶対値の中身の符号を調べましょう。
(2) は合成してもよいですね。

204 2 倍角，半角，3 倍角などの公式を利用して**次数を下げ**ます。
(1) は置換積分を利用することもできます。

(2) 半角の公式を 2 回用います。

(3) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を利用しましょう。

205 積を和に直す公式を利用して次数下げします。$\cos(m+n)x$，$\cos(m-n)x$ の積分において，$m>0$，$n>0$ より $m+n \neq 0$ ですが，$m-n$ についてはm $m=n$，$m \neq n$ の場合分けが必要となります。

206 (1) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{(-\cos x)'}{\cos x}$ ですね。

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\,d\theta$ なので，$\sin\theta = t$ と置換してみましょう。

207 誘導なしの出題はつらいですね。

$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,d\theta$ と $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,d\theta$ の**セット**で考えましょう。

解答・解説

203 (1) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，$\boldsymbol{\cos x \geqq 0}$，$\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\boldsymbol{\cos x \leqq 0}$ より

$$\int_0^{\pi} x|\cos x|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x|\cos x|\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x|\cos x|\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos x\,dx$$

ここで

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$
$$= x\sin x + \cos x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

なので

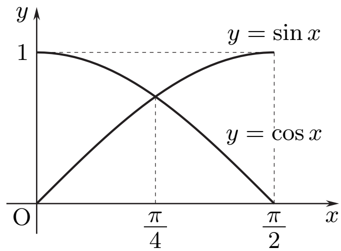
$$\int_0^{\pi} x|\cos x|\,dx = \Big[x\sin x + \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \Big[x\sin x + \cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$= \boldsymbol{2} \times \left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - \cos 0 - (\pi\sin\pi + \cos\pi)$$
$$= \underline{\boldsymbol{\pi}}$$

(2) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ のとき

$\sin x \leqq \cos x$

$\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき

$\sin x \geqq \cos x$



したがって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x|\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)\,dx$$
$$= \Big[\sin x + \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \Big[\sin x + \cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \cos 0 - \sin\frac{\pi}{2}$$
$$= \underline{\boldsymbol{2\sqrt{2} - 2}}$$

別解 合成の公式を利用して変数をまとめる解法もあります。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x|\,dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|\,dx$$
$$= \sqrt{2}\left\{-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\,dx\right\}$$
$$= \sqrt{2}\left\{\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$$
$$= \sqrt{2}\left\{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right\} = 2\sqrt{2} - 2$$

204 (1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x\,dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x \cdot \sin x\,dx = \int_0^{\pi} (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$

$$= \int_0^{\pi} \{\sin x + \cos^2 x(\cos x)'\}\,dx$$

$$= \left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\pi}$$

$$= -(-1) + \frac{1}{3}(-1) + 1 - \frac{1}{3} = \underline{\boldsymbol{\frac{4}{3}}}$$

別解 sin の **3 倍角の公式**より

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} (3\sin x - \sin 3x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[-3\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}$$

(2) **半角の公式**より $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ なので

$$\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x)$$

$$\therefore \int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx = \frac{1}{8}\int_0^{\pi} (3 - 4\cos 2x + \cos 4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[3x - 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\pi} = \underline{\boldsymbol{\frac{3}{8}\pi}}$$

(3) $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin^4 x + \cos^4 x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (3 + \cos 4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[3x + \frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$= \underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{3}}{32}}}$$

205 (1) $m=n$ のとき，**半角の公式**より

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 mx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2mx)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_0^{2\pi}=\underline{\boldsymbol{\pi}}$$

$m\neq n$ のとき，**積和の公式**より

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x+\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_0^{2\pi}$$
$$=\underline{\boldsymbol{0}}$$

(2) $m=n$ のとき，sin の **2 倍角の公式**より

$$\int_0^{2\pi}\sin mx\cos mx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2mx\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2m}\cos 2mx\right]_0^{2\pi}=-\frac{1}{4m}(\cos 4m\pi-\cos 0)=\underline{\boldsymbol{0}}$$

$m\neq n$ のとき，**積和の公式**より

$$\int_0^{2\pi}\sin mx\cos nx\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{m+n}\cos(m+n)x-\frac{1}{m-n}\cos(m-n)x\right]_0^{2\pi}$$
$$=-\frac{1}{2(m+n)}\{\cos 2(m+n)\pi-\cos 0\}-\frac{1}{2(m-n)}\{\cos 2(m-n)\pi-\cos 0\}$$
$$=\underline{\boldsymbol{0}}$$

206 (1) (i) $I=\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx=-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx=\underline{\boldsymbol{-\log|\cos x|+C}}$

(C は積分定数)

(ii) $\boldsymbol{1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}}$ より

$$J=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\underline{\boldsymbol{\tan x-x+C}}\quad (C\text{ は積分定数})$$

(2) $\sin\theta=t$ とおくと $\cos\theta\,d\theta=dt$ であり $\theta:0\to\dfrac{\pi}{4}$ のとき $t:0\to\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ なので

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\,d\theta\\
&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dt}{1-t^2}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dt}{(1+t)(1-t)}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt\\
&=\frac{1}{2}\Big[\log|1+t|-\log|1-t|\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\\
&=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{2}\log\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\\
&=\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2=\underline{\boldsymbol{\log(\sqrt{2}+1)}}
\end{aligned}$$

207 $\boldsymbol{I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,d\theta,\ J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,d\theta}$ とおく。

$\theta=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと，$\theta:0\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$t:\dfrac{\pi}{2}\to 0$ であり，$d\theta=-dt$ なので

$$\begin{aligned}
I&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}(-dt)\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,dt=J
\end{aligned}$$

また

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{2}$$

よって

$$2I=\frac{\pi}{2}\qquad \therefore\quad I=\underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}}$$

別解 上の I，J に対して

$$\begin{aligned}
I+J&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{2}\\
I-J&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,d\theta=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin\theta+\cos\theta)'}{\sin\theta+\cos\theta}\,d\theta\\
&=\Big[-\log|\sin\theta+\cos\theta|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=0
\end{aligned}$$

これらを連立して $I=\dfrac{\pi}{4}$ としてもよい。

1.7　指数関数の積分

問題

208 (1) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{\log 2} e^{|x|}e^x\,dx$ を求めよ。（茨城大）

(2) 次の定積分を計算せよ。

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+e^{-x}}$ （横浜国立大）

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+e^x} = \boxed{}$ （会津大）

(3) (i) $\displaystyle\int_0^1 (x^2-3x+1)e^{-x}\,dx$ を求めよ。（大阪女子大）

(ii) 不定積分 $3\displaystyle\int (x^2+2x)e^x\,dx$ を求めよ。（日本工業大）

(4) (i) 定積分 $\displaystyle\int_1^8 e^{-\sqrt{x}}\,dx$ を求めよ。（浜松医科大）

(ii) 定積分 $\displaystyle\int_0^4 3^{\sqrt{x}}\,dx$ を求めよ。（広島市立大）

209 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}x\sin x\,dx$ （信州大）

チェック・チェック

208 (1) 絶対値をはずすための場合分けをします。

(2) (i) $\dfrac{1}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ の積分です。

(ii) は (i) の積分をまねる。あるいは

$$\frac{1}{1+e^x}=\frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{1+e^x}$$

と変形して積分することもできます。

(3) はいずれも $x^n\times$ (指数関数) の積分です。部分積分を実行すればよいですね。

別解 で扱う公式

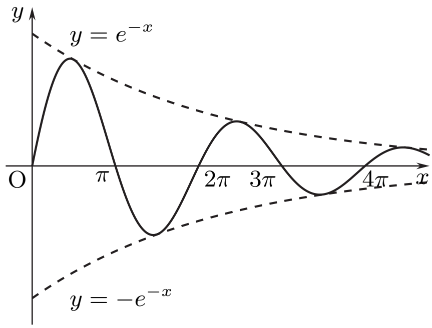
$$\int f(x)e^{-x}\,dx=-\{f(x)+f'(x)+f''(x)+\cdots\}e^{-x}+C$$

$$\int f(x)e^{x}\,dx=\{f(x)-f'(x)+f''(x)-\cdots\}e^{x}+C$$

も使えるようにしましょう。

(4) $\sqrt{x}=t$ と置換しましょう。

209 (1) $y=e^{-x}\sin x$ のグラフは下のような減衰曲線とよばれる曲線です。積分については，$I=\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx$ と $J=\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx$ のセットを考えてもよいし，別解 の不定積分をダイレクトに導く方法や，部分積分を 2 回行って求める方法を用いてもよいです。



(2) $\displaystyle\int e^{-x}x\sin x\,dx=\int x(e^{-x}\sin x)\,dx$ とみて (1) の利用を考えます。

解答・解説

208 (1) $\displaystyle\int_{-1}^{\log 2} e^{|x|}e^{x}\,dx = \int_{-1}^{0} e^{-x}e^{x}\,dx + \int_{0}^{\log 2} e^{x}e^{x}\,dx$

$\displaystyle= \int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{\log 2} e^{2x}\,dx = \Big[x\Big]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{0}^{\log 2}$

$\displaystyle= 0-(-1)+\frac{1}{2}(e^{2\log 2}-1) = 1+\frac{3}{2}\quad (\because\ e^{2\log 2}=e^{\log 4}=4)$

$\displaystyle= \underline{\mathbf{\frac{5}{2}}}$

(2) (i) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+e^{-x}} = \int_{0}^{1}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx = \int_{0}^{1}\frac{(1+e^{x})'}{1+e^{x}}\,dx$

$\displaystyle= \Big[\log|1+e^{x}|\Big]_{0}^{1} = \log(1+e)-\log 2 = \underline{\mathbf{\log\frac{1+e}{2}}}$

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+e^{x}} = \int_{-1}^{1}\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx = -\int_{-1}^{1}\frac{(e^{-x}+1)'}{e^{-x}+1}\,dx$

$\displaystyle= -\Big[\log(e^{-x}+1)\Big]_{-1}^{1} = -\left\{\log\left(\frac{1}{e}+1\right)-\log(e+1)\right\}$

$\displaystyle= -\left\{\log\frac{1+e}{e}-\log(e+1)\right\} = \log e = \underline{\mathbf{1}}$

別解 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+e^{x}} = \int_{-1}^{1}\frac{(1+e^{x})-e^{x}}{1+e^{x}}\,dx = \int_{-1}^{1}\left(1-\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\right)dx$

$\displaystyle= \int_{-1}^{1}\left\{1-\frac{(1+e^{x})'}{1+e^{x}}\right\}dx = \Big[x-\log|1+e^{x}|\Big]_{-1}^{1}$

$\displaystyle= 1-(-1)-\log(1+e)+\log(1+e^{-1})$

$\displaystyle= 2-\log(1+e)+\log\frac{e+1}{e} = 1$

(3) (i) $\displaystyle\int_0^1 (x^2-3x+1)e^{-x}\,dx = \int_0^1 (x^2-3x+1)(-e^{-x})'\,dx$

$$= \Big[-(x^2-3x+1)e^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 (2x-3)e^{-x}dx$$

$$= \frac{1}{e}+1+\int_0^1 (2x-3)(-e^{-x})'dx$$

$$= \frac{1}{e}+1+\Big[-(2x-3)e^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x}dx$$

$$= \frac{1}{e}+1+\frac{1}{e}-3+2\Big[-e^{-x}\Big]_0^1 = \underline{\mathbf{0}}$$

別解 $\displaystyle\int f(x)e^{-x}\,dx$ を一般化すると

$$\boldsymbol{\int f(x)e^{-x}\,dx} = -f(x)e^{-x} + \int f'(x)e^{-x}\,dx$$

$$= -f(x)e^{-x} - f'(x)e^{-x} + \int f''(x)e^{-x}\,dx$$

$$= \cdots$$

$$= \boldsymbol{-\{f(x)+f'(x)+f''(x)+\cdots\}e^{-x}+C}$$

（C は積分定数）

であるから

$$\int_0^1 (x^2-3x+1)e^{-x}\,dx = -\Big[\{(x^2-3x+1)+(2x-3)+2\}e^{-x}\Big]_0^1$$

$$= -\Big[(x^2-x)e^{-x}\Big]_0^1 = 0$$

(ii) $\displaystyle 3\int (x^2+2x)e^x\,dx = 3\int (x^2+2x)(e^x)'\,dx$

$$= 3(x^2+2x)e^x - 3\int (2x+2)e^x\,dx$$

$$= 3(x^2+2x)e^x - 6\int (x+1)(e^x)'\,dx$$

$$= 3(x^2+2x)e^x - 6(x+1)e^x + 6\int e^x\,dx = \underline{\boldsymbol{3x^2e^x+C}}$$ （C は積分定数）

別解 $\displaystyle\int f(x)e^{x}\,dx$ を一般化すると

$$\boldsymbol{\int f(x)e^{x}\,dx} = f(x)e^x - \int f'(x)e^x\,dx$$

$$= f(x)e^x - f'(x)e^x + \int f''(x)e^x\,dx = \cdots$$

$$= \boldsymbol{\{f(x)-f'(x)+f''(x)-\cdots+(-1)^k f^{(k)}(x)+\cdots\}e^x} + C$$

（C は積分定数）

であるから

$$3\int (x^2+2x)e^x\,dx = 3\{(x^2+2x)-(2x+2)+2\}e^x + C$$

$$= 3x^2e^x + C$$

(4) (i) $\sqrt{x}=t$ **とおく**と，$x:1\to 8$ のとき，$t:1\to 2\sqrt{2}$ であり，$x=t^2$ より
$dx=2t\,dt$ なので

$$\int_1^8 e^{-\sqrt{x}}\,dx=\int_1^{2\sqrt{2}} e^{-t}\cdot 2t\,dt=-\Big[(2t+2)e^{-t}\Big]_1^{2\sqrt{2}}\quad(\because (3)\ (\text{i})\ \text{の別解})$$
$$=\underline{\boldsymbol{-2(2\sqrt{2}+1)e^{-2\sqrt{2}}+4e^{-1}}}$$

(ii) $\sqrt{x}=t$ **とおく**と，$x=t^2$ より $\qquad dx=2t\,dt$
また，$x:0\to 4$ のとき $t:0\to 2$

$$\therefore\quad \int_0^4 3^{\sqrt{x}}\,dx=\int_0^2 3^t\cdot 2t\,dt=2\int_0^2 t\cdot 3^t\,dt$$
$$=2\int_0^2 t\left(\frac{3^t}{\log 3}\right)'dt=\frac{2}{\log 3}\left\{\Big[t\cdot 3^t\Big]_0^2-\int_0^2 3^t\,dt\right\}$$
$$=\frac{2}{\log 3}\left\{2\cdot 3^2-\left[\frac{3^t}{\log 3}\right]_0^2\right\}$$
$$=\frac{2}{\log 3}\left(18-\frac{9-1}{\log 3}\right)=\underline{\boldsymbol{\frac{4(9\log 3-4)}{(\log 3)^2}}}$$

別解 $\quad 3^{\sqrt{x}}=e^{\log 3^{\sqrt{x}}}=e^{\sqrt{x}\log 3}$

$\sqrt{x}\log 3=t$ とおくと，$x=\left(\dfrac{t}{\log 3}\right)^2$ より

$$dx=2\cdot\frac{t}{\log 3}\cdot\frac{1}{\log 3}\,dt=\frac{2}{(\log 3)^2}t\,dt$$

また，$x:0\to 4$ のとき $t:0\to 2\log 3$

$$\therefore\quad \int_0^4 3^{\sqrt{x}}\,dx=\int_0^{2\log 3} e^t\cdot\frac{2}{(\log 3)^2}t\,dt=\frac{2}{(\log 3)^2}\Big[(t-1)e^t\Big]_0^{2\log 3}$$
$$=\frac{2}{(\log 3)^2}\{(2\log 3-1)e^{\log 9}+1\}$$
$$=\frac{2}{(\log 3)^2}\{(2\log 3-1)\cdot 9+1\}=\frac{4(9\log 3-4)}{(\log 3)^2}$$

209 (1) $\boldsymbol{I = \int e^{-x} \sin x \, dx}$, $\boldsymbol{J = \int e^{-x} \cos x \, dx}$ とおくと

$$I = \int (-e^{-x})' \sin x \, dx = -e^{-x} \sin x + J$$

$$\therefore \quad I - J = -e^{-x} \sin x + C_1 \ (C_1 \text{は積分定数}) \ \cdots\cdots ①$$

$$J = \int (-e^{-x})' \cos x \, dx = -e^{-x} \cos x - I$$

$$\therefore \quad I + J = -e^{-x} \cos x + C_2 \ (C_2 \text{は積分定数}) \ \cdots\cdots ②$$

① + ② より

$$2I = -e^{-x}(\sin x + \cos x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$\therefore \quad I = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + \frac{C}{2} \quad \cdots\cdots ③$$

したがって

$$\int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)\right]_0^{\pi} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1)}}$$

別解 $e^{-x}\sin x$，$e^{-x}\cos x$ を x で微分すると

$$\boldsymbol{(e^{-x} \sin x)'} = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x \ \cdots\cdots ④$$

$$\boldsymbol{(e^{-x} \cos x)'} = -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x \ \cdots\cdots ⑤$$

④ + ⑤ より

$$(e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x)' = -2e^{-x} \sin x$$

$$\therefore \quad \int e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C \ (C \text{ は積分定数})$$

以下同じ

別解 部分積分を 2 回行って求めることもできる。

$$\begin{aligned} I &= \int e^{-x} \sin x \, dx = \int (-e^{-x})' \sin x \, dx \\ &= -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x \, dx = -e^{-x} \sin x + \int (-e^{-x})' \cos x \, dx \\ &= -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - I \end{aligned}$$

であるから

$$2I = -e^{-x}(\sin x + \cos x) + D \ (D \text{ は積分定数})$$

$$\therefore \quad \int e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C \ (C \text{ は積分定数})$$

以下同じ

(2) $\displaystyle\int e^{-x} x \sin x\, dx = \int x e^{-x} \sin x\, dx$

$$= \int x \left\{ -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \right\}' dx \quad (\because ③)$$

$$= -\frac{1}{2} x e^{-x} (\sin x + \cos x) + \frac{1}{2} \int e^{-x} (\sin x + \cos x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{2} x e^{-x} (\sin x + \cos x) + \frac{1}{2} (I + J)$$

$$= -\frac{1}{2} x e^{-x} (\sin x + \cos x) - \frac{1}{2} e^{-x} \cos x + \frac{C_2}{2} \quad (\because ②)$$

$$\therefore \int_0^{\pi} e^{-x} x \sin x\, dx = -\frac{1}{2} \Big[x e^{-x} (\sin x + \cos x) + e^{-x} \cos x \Big]_0^{\pi}$$

$$= \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2} (\pi e^{-\pi} + e^{-\pi} + 1)}}$$

1.8　対数関数の積分

問題

210 次の定積分，不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} |\log x|\,dx$ （立教大）

(2) $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$ （信州大）

(3) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$ （会津大）

(4) $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\log x}\,dx$ （京都産業大）

(5) $\displaystyle\int x\log x\,dx$ （会津大）

(6) $\displaystyle\int x(\log x)^2\,dx$ （小樽商科大）

(7) $\displaystyle\int_{0}^{1} \log(1+x^2)\,dx$ （福島県立医科大）

チェック・チェック

210 (1) 絶対値をはずしてから積分します。

$$\int \log x\,dx = \int (x)'\log x\,dx$$
$$= x\log x - \int \quad dx = x\log x - x + C$$

これは公式として覚えておくとよいでしょう。

(2) $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx = \int (x)'(\log x)^2\,dx$ として，(1) と同じく部分積分します。

(3) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx = \int \log x \cdot (\log x)'\,dx$ とみて，置換積分です。

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \int \frac{1}{\log x}(\log x)'\,dx$ とみて，置換積分です。

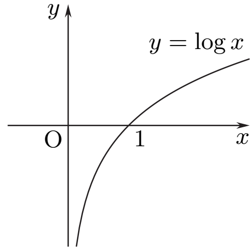
(5) **$\log x$ を微分する方向に向かって部分積分**します。

(6) これは (5) と同じタイプ。

(7) $\displaystyle\int \log(1+x^2)\,dx = \int (x)'\log(1+x^2)\,dx$ から出発します。力試しとして挑んでみて下さい。

解答・解説

210 (1) 右のグラフをみて，絶対値をはずすと



$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} |\log x|\,dx = -\int_{\frac{1}{2}}^{1} \log x\,dx + \int_{1}^{2} \log x\,dx$$
$$= \Big[x\log x - x\Big]_{1}^{\frac{1}{2}} + \Big[x\log x - x\Big]_{1}^{2}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + 1 + (2\log 2 - 2) + 1$$
$$= \underline{\boldsymbol{\frac{3}{2}\log 2 - \frac{1}{2}}}$$

(2) $$\int (\log x)^2\,dx = \int (x)'(\log x)^2\,dx$$
$$= x(\log x)^2 - \int x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$= x(\log x)^2 - 2\int \log x\,dx$$
$$= \underline{\boldsymbol{x(\log x)^2 - 2(x\log x - x) + C}}$$ (C は積分定数)

(3) $$\int \frac{\log x}{x}\,dx = \int \log x\cdot(\log x)'\,dx$$
$$= \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}(\log x)^2 + C}}$$ (C は積分定数)

(4) $$\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\log x}\,dx = \int_{e}^{e^2} \frac{1}{\log x}(\log x)'\,dx$$
$$= \Big[\log|\log x|\Big]_{e}^{e^2}$$
$$= \log 2 - \log 1$$
$$= \underline{\boldsymbol{\log 2}}$$

(5) $$\int x\log x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$
$$= \underline{\boldsymbol{\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C}}$$ (C は積分定数)

(6) $$\int x(\log x)^2\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)'(\log x)^2\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int \frac{x^2}{2}\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int x\log x\,dx$$

第 2 項は (5) を用いると

$$\int x(\log x)^2\,dx = \underline{\boldsymbol{\frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4} + C}} \quad (C\text{ は積分定数})$$

(7) $$\int_0^1 \log(1+x^2)\,dx = \int_0^1 (x)'\log(1+x^2)\,dx$$
$$= \Big[x\log(1+x^2)\Big]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$
$$= \log 2 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$
$$= \log 2 - 2\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$
$$= \log 2 - 2\Big[x\Big]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

ここで，$x=\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dx = \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$ であり，$x:0\to 1$ のとき，$\theta: 0\to\frac{\pi}{4}$ なので

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\quad \int_0^1 \log(1+x^2)\,dx = \underline{\boldsymbol{\log 2 - 2 + \frac{\pi}{2}}}$$

1.9 無理関数の積分

問題

211 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x}\,dx$ （広島市立大）

(2) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{3-\sqrt{x}}}$ （横浜国立大）

212 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ （信州大）

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{7x^2+1}}\,dx$ （小樽商科大）

213 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ を求めよ。 （広島市立大）

214 a の値が正の実数のとき，$\displaystyle\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \boxed{}$ （会津大）

215 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を $x+\sqrt{x^2+1}=y$ と置換することにより求めよ。

（信州大　改）

チェック・チェック

211 (1) $1-2x=t$ と置換してもよいですし，$\sqrt{1-2x}=t$ としてもよいでしょう。でも，慣れてきたらこの程度の積分は一発で処理したいですね。
(2) $3-\sqrt{x}=t$ とおきます。

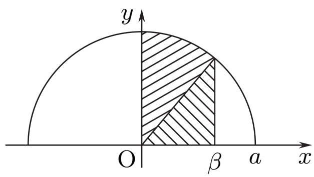
212 (1) $\sqrt{x+1}=t$ とおきます。
(2) $\sqrt{7x^2+1}=t$ としてもよいですが，一発で処理してみましょう。

213 **$\sqrt{a^2-x^2}$ を含む積分は，$x=a\sin\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と置換**すると，うまくいく場合が多いです。

214 これも $x=a\sin\theta$ と置換する方法でよいのですが，とくに $\displaystyle\int_\alpha^\beta\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ の計算では，**図を利用** した方が有効な場合が多いです。

$$y=\sqrt{a^2-x^2}\Longrightarrow x^2+y^2=a^2$$

ですから，たとえば，$\alpha=0$，$\beta>0$ のときは $\displaystyle\int_0^\beta\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は右図の斜線部の面積になり，扇形と三角形の面積を計算すればよいことになりますね。



215 $x+\sqrt{x^2+1}=y$ の置き換えは大学の数学で学びます。ここでは指示通りに置き換えを実行してみましょう。

解答・解説

211 (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-2x}\,dx=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{(1-2x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-2x)'}\,dx$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1-2x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{3}}}$$

別解 $1-2x=t$ とおくと，$dx=-\dfrac{1}{2}dt$，$x:0\to\dfrac{1}{2}$ のとき，$t:1\to 0$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-2x}\,dx=\int_1^0\sqrt{t}\left(-\frac{1}{2}\,dt\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

別解 $\sqrt{1-2x}=t$ とおくと $x=\dfrac{1-t^2}{2}$，$dx=-t\,dt$，$x:0\to\dfrac{1}{2}$ のとき，$t:1\to 0$

$$\therefore\quad\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-2x}\,dx=\int_1^0 t(-t\,dt)=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

(2) $\boldsymbol{3-\sqrt{x}=t}$ とおくと，$\sqrt{x}=3-t$ より $x=(3-t)^2$ であり

$dx=-2(3-t)\,dt$

また，$x:1\to 4$ のとき，$t:2\to 1$

$$\therefore\quad\int_1^4\frac{dx}{\sqrt{3-\sqrt{x}}}=\int_2^1\frac{-2(3-t)}{\sqrt{t}}\,dt=2\int_1^2(3t^{-\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}})\,dt$$

$$=2\left[6t^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=4\left(3\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}-3+\frac{1}{3}\right)=\underline{\boldsymbol{\frac{4}{3}(7\sqrt{2}-8)}}$$

212 (1) $\boldsymbol{\sqrt{x+1}=t}$ とおくと，$x=t^2-1$，$dx=2t\,dt$ より

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}=\int\frac{2t\,dt}{(t^2-1)t}=\int\frac{2}{t^2-1}\,dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\log|t-1|-\log|t+1|+C=\underline{\boldsymbol{\log\frac{|\sqrt{x+1}-1|}{\sqrt{x+1}+1}+C}}\quad(C\text{ は積分定数})$$

(2) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{7x^2+1}}\,dx=\int x(7x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$$=\int\boldsymbol{\frac{1}{14}(7x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(7x^2+1)'}\,dx$$

$$=\frac{1}{14}\cdot 2(7x^2+1)^{\frac{1}{2}}+C=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{7}(7x^2+1)^{\frac{1}{2}}+C}}\quad(C\text{ は積分定数})$$

別解 $\sqrt{7x^2+1}=t$ とおくと，$7x^2+1=t^2$ より　$xdx=\dfrac{1}{7}tdt$

$$\int\frac{x}{\sqrt{7x^2+1}}\,dx=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{7}t\,dt=\frac{1}{7}t+C=\frac{1}{7}(7x^2+1)^{\frac{1}{2}}+C$$

（C は積分定数）

213 $x=2\sin\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dx=2\cos\theta d\theta$ であり，$x:0\to 1$ のとき，$\theta:0\to\frac{\pi}{6}$ なので

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\cdot 2\cos\theta d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}}$$

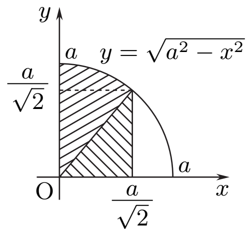
214 $x=a\sin\theta$ とおくと $dx=a\cos\theta\,d\theta$ であり，$x:0\to\frac{a}{\sqrt{2}}$ のとき

$\theta:0\to\frac{\pi}{4}$ なので

$$\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\,a\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos^2\theta\,d\theta=a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$=\frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\underline{\boldsymbol{\frac{(\pi+2)a^2}{8}}}$$

別解 $y=\sqrt{a^2-x^2}\Longrightarrow x^2+y^2=a^2$

したがって，求める積分は右図の**斜線部分の面積**に一致する。



$$\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$
$=\frac{1}{8}$ (半径 a の円の面積)

$\quad+\left(2\text{ 辺の長さが }\frac{a}{\sqrt{2}}\text{ の直角二等辺三角形の面積}\right)$

$$=\frac{\pi a^2}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{(\pi+2)a^2}{8}$$

215 $x+\sqrt{x^2+1}=y$ とおくと

$$\frac{dy}{dx}=1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\therefore\ \frac{dy}{y}=\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\therefore\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{dy}{y}=\log|y|+C$$
$$=\underline{\boldsymbol{\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C}}\quad(C\text{ は積分定数})$$

1.10　定積分で表された関数

問題

216 関数 $f(x)$ が式 $f(x) = e^x - \int_0^1 tf(t)x\,dt$ をみたすとき

$$f(x) = e^x - \boxed{}\,x$$

である。　　（東京医科大）

217 次の関係をみたす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x + \int_0^{\pi} f(t)\sin(x+t)\,dt$$

（武蔵工業大）

218 次の条件をみたす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f'(x) = \cos x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt,\quad f(0) = 0$$

（筑波大）

219 $-1 < x < 1$ に対して定義された関数 $f(x)$ が次の式をみたすとき，$f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x^2 + \int_0^x t^2 f'(t)\,dt$$

220 次の等式 $f(x) = (2x-k)e^x + e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt$ が成り立つような連続関数 $f(x)$ がある。ただし，k は定数である。このとき，$f(x)$ を求めよ。

（島根医科大　改）

チェック・チェック

積分区間と被積分関数に着目します。

216 $\displaystyle\int_0^1 tf(t)\,dt$ の値は**定数**ですね。a とおきましょう。

このように，積分の上端，下端が定数であり，被積分関数が積分変数以外の文字を含まないときには，積分の結果は定数です。文字定数とおいてしまいましょう。

217 $\sin(x+t)$ を加法定理で展開し，$\sin x$，$\cos x$ を**積分の外**に移動します。

218 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt$ は**定数**なので，これを a とおくと，与式は $f'(x)=\cos x+a$ であり，積分すると $f(x)$ は a と積分定数 C を含んだ式となります。ここで，$f(0)=0$ が登場します。

219，**220** 今度は積分の上端に変数 x があるので，積分しても x が残っています。つまり，x の関数となっています。

このような場合には，微分と積分は逆演算であるという関係を使います。

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)\quad(a\text{ は定数})$$

微分と積分の関係

なお，$f(t)$ は変数 x を含んではならないことに注意して下さい。

$\displaystyle F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ は

$$F'(x)=f(x)\ \text{かつ}\ F(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0$$

をみたす関数として一意的に決まります。

解答・解説

216 $f(x)=e^x-x\displaystyle\int_0^1 tf(t)\,dt$ であり，$\displaystyle\int_0^1 tf(t)\,dt=a$（定数）とおくと

$$a=\int_0^1 tf(t)\,dt=\int_0^1 (te^t-at^2)\,dt \quad (\because\ f(x)=e^x-ax)$$

$$=\Big[te^t\Big]_0^1-\int_0^1 e^t\,dt-\Big[\frac{a}{3}t^3\Big]_0^1=e-\Big[e^t\Big]_0^1-\frac{a}{3}=1-\frac{a}{3}$$

$$\therefore\quad a+\frac{a}{3}=1 \qquad a=\frac{3}{4} \qquad \therefore\quad f(x)=e^x-\underline{\frac{3}{4}}x$$

217 三角関数の加法定理より

$$f(x)=x+\int_0^\pi f(t)\sin(x+t)\,dt=x+\int_0^\pi f(t)(\sin x\cos t+\cos x\sin t)\,dt$$

$$=x+\sin x\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt+\cos x\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt$$

ここで，$a=\displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt$，$b=\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt$ とおくと

$$f(x)=x+a\sin x+b\cos x$$

$$a=\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt=\int_0^\pi (t+a\sin t+b\cos t)\cos t\,dt$$

$$=\int_0^\pi \left\{t(\sin t)'+\frac{a}{2}\sin 2t+\frac{b}{2}(1+\cos 2t)\right\}dt$$

$$=\left[t\sin t-\frac{a}{4}\cos 2t+\frac{b}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right]_0^\pi-\int_0^\pi \sin t\,dt$$

$$=\frac{b}{2}\pi+\Big[\cos t\Big]_0^\pi=\frac{b}{2}\pi-2 \quad \cdots\cdots ①$$

同じように計算すると　$b=\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt=\cdots=\pi+\frac{a}{2}\pi \quad \cdots\cdots ②$

①，②より

$$\begin{cases} a=\dfrac{b}{2}\pi-2 \\ b=\pi+\dfrac{a}{2}\pi \end{cases} \qquad a=-2,\ b=0 \qquad \therefore\quad \underline{\boldsymbol{f(x)=x-2\sin x}}$$

218 $a=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt \cdots\cdots$ ① とおくと，与式は

$$f'(x)=\cos x+a$$

$$\therefore\quad f(x)=\int(\cos x+a)\,dx=\sin x+ax+C\quad (C\text{ は積分定数})$$

$f(0)=0$ より　$C=0$　$\therefore$　$f(x)=\sin x+ax \cdots\cdots$ ②

すると，①から

$$a=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+at)\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt+a\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt+a\int_0^{\frac{\pi}{2}}t(\sin t)'\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+a\Big[t\sin t+\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a$$

$$\left\{1-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right\}a=\frac{1}{2}\qquad\therefore\quad a=\frac{1}{4-\pi}$$

したがって，②より　$\underline{\boldsymbol{f(x)=\sin x+\dfrac{1}{4-\pi}x}}$

219 $f(x)=x^2+\displaystyle\int_0^x t^2f'(t)\,dt \cdots\cdots$ ①

①の両辺を x で微分すると

$$f'(x)=2x+x^2f'(x)\qquad\therefore\quad f'(x)=\frac{2x}{1-x^2}$$

したがって

$$f(x)=\int\frac{2x}{1-x^2}\,dx=-\int\frac{(1-x^2)'}{1-x^2}\,dx$$

$$=-\log(1-x^2)+C\quad(\because\ -1<x<1,\ C\text{ は積分定数})$$

①から，$f(0)=0$ より　$C=0$　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{f(x)=-\log(1-x^2)}}$

220 $f(x) = (2x-k)e^x + e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt$ ……①の両辺を x で微分すると

$$f'(x) = 2e^x + (2x-k)e^x - e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt + e^{-x}f(x)e^x$$
$$= (2x-k+2)e^x + f(x) - e^{-x}\int_0^x f(t)e^t\,dt \quad \cdots\cdots ②$$

①より $f(x) - e^{-x}\int_0^x f(t)e^t\,dt = (2x-k)e^x$ なので，②へ代入して

$$f'(x) = (2x-k+2)e^x + (2x-k)e^x = 2(2x-k+1)e^x$$

したがって

$$f(x) = 2\int (2x-k+1)e^x\,dx$$
$$= 2(2x-k-1)e^x + C \text{（}C\text{ は積分定数）} \cdots\cdots ③$$

①において $x=0$ とすると　$f(0) = -k$

③において $x=0$ とすると　$f(0) = -2k-2+C$

よって，$-2k-2+C = -k$ より　$C = k+2$

したがって，③より　$\underline{\boldsymbol{f(x) = 2(2x-k-1)e^x + k + 2}}$

1.11　定積分と漸化式

問題

221 p，q を 0 または正の整数とし $I_{p,\,q}=\displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt$ とおく。

(1) $I_{p,\,0}$ の値を計算せよ。

(2) $q \geqq 1$ のとき，次の漸化式が成り立つことを証明せよ。

$$I_{p,\,q}=\frac{q}{p+1}I_{p+1,\,q-1}$$

(3) 次の等式を証明せよ。

$$I_{p,\,q}=\frac{p\,!\,q\,!}{(p+q+1)!}$$

（上智大　改）

222 $S_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。

(1) S_0，S_1 を求めよ。

(2) 漸化式 $S_n=\dfrac{n-1}{n}S_{n-2}$ $(n \geqq 2)$ を示せ。

(3) $a_n=nS_nS_{n-1}$ $(n \geqq 1)$ とおいて，数列 $\{a_n\}$ についての漸化式を導き，a_n の値を求めよ。（神戸商船大）

223 $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ とする。

(1) I_1 を求めよ。

(2) I_n+I_{n+2} を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n=0$ を示せ。（大阪工業大）

224 $I_n=\dfrac{1}{n\,!}\displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定義する。

ただし，$n\,!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ とする。

$n \geqq 2$ のとき，I_n と I_{n-1} の間に成り立つ漸化式を用いて I_n を求めよ。

（東京電機大　改）

225 $I_n=\displaystyle\int_1^x(\log t)^n\,dt$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。

(1) I_1 を求めよ。

(2) $I_{n+1}=x(\log x)^{n+1}-(n+1)I_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ を示せ。

(3) (1)，(2) を用いて I_3 を求めよ。（大阪工業大）

チェック・チェック

定積分による数列から漸化式をつくる問題では，おおむね部分積分を用いればうまくいきます。

221 (2) $I_{p,\ q}$ と $I_{p+1,\ q-1}$ の関係です。

$\displaystyle\int t^p(1-t)^q\,dt$ から $\displaystyle\int t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,dt$ を導けばよいのですから

$$\int t^p(1-t)^q\,dt = \int\left(\frac{1}{p+1}t^{p+1}\right)'(1-t)^q\,dt$$

として部分積分を実行します。

222 $\sin x$，$\cos x$ の積分は **次数下げ** が原則ですね。

$$\int \sin^n x\,dx = \int \sin^{n-1}x\cdot\sin x\,dx = \int \sin^{n-1}x\cdot(-\cos x)'\,dx$$

として部分積分を行うと，$\displaystyle\int \sin^n x\,dx$ と $\displaystyle\int \sin^{n-2}x\,dx$ の関係を得ることができます。なお，(1) の結果と (2) の漸化式より

$$\begin{cases} S_{2m} = \dfrac{2m-1}{2m}\cdot\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}\ (m \geqq 1) \\[2ex] S_{2m-1} = \dfrac{2m-2}{2m-1}\cdot\dfrac{2m-4}{2m-3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1\ (m \geqq 2) \end{cases}$$

となります。

223 $I_n + I_{n+2}$ を求めるには

$$\begin{aligned}\tan^n x + \tan^{n+2} x &= \tan^n x(1+\tan^2 x) = \tan^n x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \tan^n x\cdot(\tan x)'\end{aligned}$$

と変形して置換積分します。

224 $x^n \times$ (指数関数) の積分ですね。**指数関数を積分**する方向で部分積分を実行します。

225 (2) $I_{n+1} = \displaystyle\int_1^x (\log t)^{n+1}\,dt = \int_1^x (t)'(\log t)^{n+1}\,dt$ とみて**対数関数を微分**する方向で部分積分を実行します。

解答・解説

221 (1) $I_{p,\,0}=\displaystyle\int_0^1 t^p\,dt=\left[\frac{1}{p+1}t^{p+1}\right]_0^1=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{p+1}}}$

(2) $I_{p+1,\,q-1}$ が現れるように，部分積分する。

$$
\begin{aligned}
I_{p,\,q}&=\int_0^1 \boldsymbol{t^p}(1-t)^q\,dt\\
&=\int_0^1\left(\boldsymbol{\frac{1}{p+1}t^{p+1}}\right)'(1-t)^q\,dt\\
&=\left[\frac{1}{p+1}t^{p+1}(1-t)^q\right]_0^1-\frac{1}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}q(1-t)^{q-1}\cdot(-1)\,dt\\
&=\frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,dt\\
&=\frac{q}{p+1}I_{p+1,\,q-1}
\end{aligned}
$$

（証終）

(3) (2) の結果を**繰り返し**用いて

$$
\begin{aligned}
I_{p,\,q}&=\frac{q}{p+1}I_{p+1,\,q-1}\\
&=\frac{q}{p+1}\cdot\frac{q-1}{p+2}I_{p+2,\,q-2}\\
&=\cdots\cdots\\
&=\frac{q}{p+1}\cdot\frac{q-1}{p+2}\cdot\frac{q-2}{p+3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{p+q}I_{p+q,\,0}
\end{aligned}
$$

したがって，(1) より

$$
\begin{aligned}
I_{p,\,q}&=\frac{q}{p+1}\cdot\frac{q-1}{p+2}\cdot\frac{q-2}{p+3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{p+q}\cdot\frac{1}{p+q+1}\\
&=\frac{q\,!}{\dfrac{(p+q+1)!}{p\,!}}=\frac{p\,!\,q\,!}{(p+q+1)!}
\end{aligned}
$$

（証終）

222 (1) $S_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}}$

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\underline{\mathbf{1}}$$

(2) $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}S_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\cdot\boldsymbol{\sin x}\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\cdot\boldsymbol{(-\cos x)'}\,dx\\&=\Big[\sin^{n-1}x\cdot(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2}x\cdot\cos^2 x\,dx\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,(1-\sin^2 x)\,dx\\&=(n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\right)\\&=(n-1)(S_{n-2}-S_n)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad nS_n=(n-1)S_{n-2}$$

すなわち

$$S_n=\frac{n-1}{n}S_{n-2}\ (n\geqq 2)$$ （証終）

(3) $nS_n=(n-1)S_{n-2}$ の両辺に $\boldsymbol{S_{n-1}}$ **をかけて**

$$nS_nS_{n-1}=(n-1)S_{n-2}S_{n-1}$$

$a_n=nS_nS_{n-1}\ (n\geqq 1)$ とおくと

$$a_n=a_{n-1}\ (n\geqq 2)$$

つまり $n\geqq 1$ において

$$\underline{\boldsymbol{a_{n+1}=a_n}}$$

よって

$$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=1\cdot S_1\cdot S_0=\underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}}$$

223 (1) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x)'}{\cos x} \, dx$

$$= \Big[-\log|\cos x| \Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\log \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}}$$

(2) $$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x + \tan^{n+2} x) \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, (1 + \tan^2 x) \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, (\tan x)' \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{n+1} \tan^{n+1} x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{n+1}}}$$

(3) $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ において，$0 < \tan x < 1$ なので

$$0 < \tan^n x < 1$$

したがって，$I_n > 0$ であり，また

$$\tan^n x - \tan^{n+2} x = \tan^n x \, (1 - \tan^2 x) > 0$$

より

$$\tan^n x > \tan^{n+2} x \qquad \therefore \quad I_n > I_{n+2}$$

よって，すべての n に対して $I_n > 0$ であり，$I_n > I_{n+2}$ なので，(2) を用いると

$$\frac{1}{n+1} = I_n + I_{n+2} > 2I_{n+2} > 0$$

$$\therefore \quad 0 < I_{n+2} < \frac{1}{2(n+1)} \to 0 \ (n \to \infty)$$

ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \to \infty} I_n = 0$$

（証終）

224 $I_1=\int_0^1 xe^{-x}\,dx=\int_0^1 x(-e^{-x})'\,dx=\Big[-xe^{-x}\Big]_0^1+\int_0^1 e^{-x}\,dx$

$$=-\frac{1}{e}+\Big[-e^{-x}\Big]_0^1=-\frac{2}{e}+1$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
I_n&=\frac{1}{n\,!}\int_0^1 x^n(-e^{-x})'\,dx\\
&=\frac{1}{n\,!}\Big[-x^ne^{-x}\Big]_0^1+\frac{n}{n\,!}\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}\,dx\\
&=-\frac{1}{e\cdot n\,!}+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}\,dx\\
&=-\frac{1}{e\cdot n\,!}+I_{n-1}
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad I_n=-\frac{1}{e\cdot n\,!}+I_{n-1}\ (n\geqq 2)$$

したがって

$$\begin{aligned}
I_n&=-\frac{1}{e\cdot n\,!}+I_{n-1}\\
&=-\frac{1}{e\cdot n\,!}-\frac{1}{e(n-1)!}+I_{n-2}\\
&=-\frac{1}{e\cdot n\,!}-\frac{1}{e(n-1)!}-\frac{1}{e(n-2)!}-\cdots-\frac{1}{e\cdot 2\,!}+I_1\\
&=-\frac{1}{e}\left(\frac{1}{n\,!}+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}+\cdots+\frac{1}{2\,!}\right)-\frac{2}{e}+1\\
&=\underline{\boldsymbol{1-\frac{2}{e}-\frac{1}{e}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\,!}\ \ (n\geqq 2)}}
\end{aligned}$$

225 (1) $I_1=\int_1^x \log t\,dt=\int_1^x (t)'\log t\,dt$

$$\begin{aligned}
&=\Big[t\log t\Big]_1^x-\int_1^x t\cdot\frac{1}{t}\,dt=x\log x-\int_1^x dt\\
&=\underline{\boldsymbol{x\log x-x+1}}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
I_{n+1}&=\int_1^x(\log t)^{n+1}\,dt\\
&=\int_1^x (t)'(\log t)^{n+1}\,dt\\
&=\Big[t(\log t)^{n+1}\Big]_1^x-\int_1^x t\cdot(n+1)(\log t)^n\cdot\frac{1}{t}\,dt\\
&=x(\log x)^{n+1}-(n+1)\int_1^x(\log t)^n\,dt\\
&=x(\log x)^{n+1}-(n+1)I_n
\end{aligned}$$

（証終）

(3)

$$\begin{aligned}
I_3&=x(\log x)^3-3I_2\\
&=x(\log x)^3-3\{x(\log x)^2-2I_1\}\\
&=x(\log x)^3-3x(\log x)^2+6I_1\\
&=x(\log x)^3-3x(\log x)^2+6(x\log x-x+1)\\
&=\underline{\boldsymbol{x(\log x)^3-3x(\log x)^2+6x\log x-6x+6}}
\end{aligned}$$

1.12 区分求積

問題

226 次の値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{4n^2-k^2}=\boxed{}$$ （小樽商科大）

227 $$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2+3+\cdots+n)^5}{(1+2^4+3^4+\cdots+n^4)^2}=\boxed{}$$ （上智大）

228 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\int_0^1\frac{1}{\boxed{}}\,dx=\boxed{}$$ （芝浦工業大）

229 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{{}_{2n}\mathrm{P}_n}{n^n}=\log\boxed{}-\boxed{}$$。

ただし，${}_n\mathrm{P}_r$ は n 個のものから r 個とって並べる順列の数，log は自然対数とする。 （日本大）

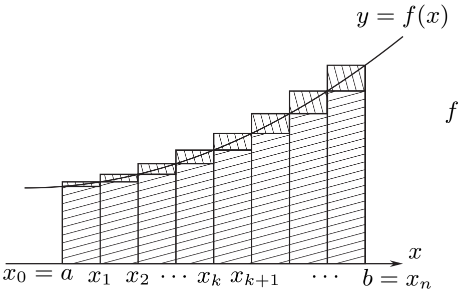
チェック・チェック

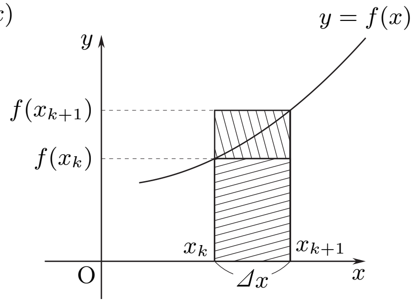
226 ～ **229** 曲線で囲まれた図形の面積を長方形の面積の和で近似します。「分けて積もる」のは積分の出発点となった考え方であり，大学以降の数学では，定積分の定義となります。

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot\varDelta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\varDelta x$$

ここで，$\varDelta x = \dfrac{b-a}{n}$，$x_k = a + k\cdot\varDelta x$

区分求積法





数列の和の極限を積分に置きかえる（区分求積する）には，次のような順序で考えます。

（i）変数 x を定める。

（ii）x の区間を調べる。

（iii）区間の分割幅 $\varDelta x$ を求める。

解答・解説

226 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{4n^2-k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{4-\frac{k^2}{n^2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$

$\boldsymbol{x=\frac{k}{n}}$ とおくと，$k:1\to n$ のとき，$x:\frac{1}{n}\to\frac{n}{n}(=1)$ であり，$n\to\infty$ のときの x の変域は $0\leqq x\leqq 1$, 項数 n より $\varDelta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{dx}{4-x^2}$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}\Big[\log|x+2|-\log|x-2|\Big]_0^1=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{4}\log 3}}$$

227 $\frac{(1+2+3+\cdots+n)^5}{(1+2^4+3^4+\cdots+n^4)^2}$

$$=\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^5}{\left(\sum_{k=1}^{n}k^4\right)^2}=\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot n\right)^5}{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^4}\cdot n^4\right)^2}=\frac{n^5\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)^5}{n^8\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\right\}^2}$$

$\boldsymbol{x=\frac{k}{n}}$ とおくと，$k:1\to n$ のとき，$x:\frac{1}{n}\to\frac{n}{n}(=1)$ であり，$n\to\infty$ のときの x の変域は $0\leqq x\leqq 1$，項数 n より $\varDelta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2+3+\cdots+n)^5}{(1+2^4+3^4+\cdots+n^4)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{10}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)^5}{n^{10}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\right\}^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)^5}{\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}\right\}^2}=\frac{\left(\int_0^1 x\,dx\right)^5}{\left(\int_0^1 x^4\,dx\right)^2}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\underline{\boldsymbol{\frac{25}{32}}}$$

228 $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$

$\boldsymbol{x=\frac{k}{n}}$ とおくと，$k:n+1\to 2n$ のとき，$x:1+\dfrac{1}{n}\to\dfrac{2n}{n}(=2)$ であり，$n\to\infty$ のときの x の変域は $1\leqq x\leqq 2$ である。項数 $2n-(n+1)+1=n$ より，区間 $1\leqq x\leqq 2$ を n 等分すると $\varDelta x=\dfrac{2-1}{n}=\dfrac{1}{n}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\boldsymbol{\int_1^2\frac{dx}{x}}$$

ここで，$\boldsymbol{x-1=t}$ とおくと，$x:1\to 2$ のとき，$t:0\to 1$ であり，$dx=dt$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\int_0^1\frac{1}{t+1}\,dt=\int_0^1\frac{1}{\underline{\boldsymbol{x+1}}}\,dx$$

$$=\Big[\log|x+1|\Big]_0^1=\underline{\boldsymbol{\log 2}}$$

別解 $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$

より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx$$

である。また，解答欄にあわせて積分区間を $0\leqq x\leqq 1$ としたが，値を求めるだけであれば

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\int_1^2\frac{dx}{x}=\Big[\log|x|\Big]_1^2=\log 2$$

としてもよい。

229 $\log \dfrac{{}_{2n}\mathrm{P}_n}{n^n} = \log \dfrac{2n(2n-1)\cdot\cdots\cdot(n+1)}{n^n}$

$= \log \dfrac{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+n)}{n^n}$ （小さい方から並べ直した）

$= \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\dfrac{n}{n}\right)$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$\boldsymbol{x = \dfrac{k}{n}}$ とおくと，$k:1 \to n$ のとき $x:\dfrac{1}{n} \to \dfrac{n}{n}(=1)$ であり，$n \to \infty$ のときの x の変域は $0 \leqq x \leqq 1$ である。項数 n より，区間 $0 \leqq x \leqq 1$ を n 等分すると $\varDelta x = \dfrac{1-0}{n} = \dfrac{1}{n}$ であるから

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{{}_{2n}\mathrm{P}_n}{n^n} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} \\
&= \int_0^1 \log(1+x)\,dx \\
&= \int_0^1 (1+x)' \log(1+x)\,dx \\
&= \Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 (1+x)\cdot\frac{1}{1+x}\,dx \\
&= 2\log 2 - \int_0^1 dx \\
&= \log \underline{\mathbf{4}} - \underline{\mathbf{1}}
\end{aligned}$$

1.13　区分求積の応用

問題

230 n を自然数とする。$n+1$ 項の等差数列 x_0，x_1，$\cdots$，x_n と等比数列 y_0，y_1，$\cdots$，y_n が

$$1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 2$$
$$1 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = 2$$

を満たすとし，$P(n)$，$Q(n)$，$R(n)$，$S(n)$ を次で定める。

$$P(n) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},\quad Q(n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$
$$R(n) = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n},\quad S(n) = \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n}$$

このとき極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P(n)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(n)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} R(n)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n)$ をそれぞれ求めよ。（東北大）

231 n を正の整数とする。$k = 1, 2, 3, \cdots, n$ に対して $\triangle \mathrm{AOB}_k$ を $\angle \mathrm{AOB}_k = \dfrac{k}{2n}\pi$，$\mathrm{OA} = 1$，$\mathrm{OB}_k = k$ であるような三角形とし，その面積を S_k とする。

(1) S_k を k と n を用いて表せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} S_k$ を求めよ。（青山学院大）

チェック・チェック

230 $x_0 = 1$，$x_n = 2$ より等差数列 $\{x_n\}$ の一般項が求まり，$y_0 = 1$，$y_n = 2$ より等比数列 $\{y_n\}$ の一般項が求まります。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(n)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n)$ については $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log Q(n)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log S(n)$ を考えましょう。

231 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} S_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2}\sin\frac{k}{2n}\pi$ において，x は $x = \dfrac{k}{n}$，$x = \dfrac{k}{2n}$，$x = \dfrac{k}{2n}\pi$ といった候補が考えられます。

解答・解説

230 等差数列 $\{x_k\}$ の公差を d，等比数列 $\{y_k\}$ の公比を r とおくと

$$x_k = 1 + dk,\ y_k = r^k$$

$x_n = y_n = 2$ より

$$1 + dn = 2,\ r^n = 2 \qquad \therefore \quad d = \frac{1}{n},\ r = 2^{\frac{1}{n}}$$

よって，$x_k = 1 + \dfrac{k}{n}$，$y_k = 2^{\frac{k}{n}}$ となる。

$P(n)$ について

$$P(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

$x = \dfrac{k}{n}$ とおくと，

$$(*) \begin{cases} k : 1 \to n \text{ のとき } x : \dfrac{1}{n} \to \dfrac{n}{n}(=1) \text{ であり，} \\ n \to \infty \text{ のときの } x \text{ の変域は } 0 \leqq x \leqq 1, \\ \text{項数 } n \text{ より，区間 } 0 \leqq x \leqq 1 \text{ を } n \text{ 等分すると} \varDelta x = \dfrac{1-0}{n} = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 (1+x)\,dx = \left[x + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \underline{\boldsymbol{\frac{3}{2}}}$$

$Q(n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ については，両辺の自然対数をとると

$$\log Q(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

$x = \dfrac{k}{n}$ とおくと $(*)$ が成り立つので

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\log Q(n) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1 + \frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 \log(1+x)\,dx \\
&= \int_0^1 (1+x)'\log(1+x)\,dx \\
&= \Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 (1+x)\cdot\frac{1}{1+x}\,dx \\
&= 2\log 2 - \int_0^1 dx = \log 4 - 1 = \log\frac{4}{e}
\end{aligned}$$

対数関数の連続性より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(n) = \underline{\boldsymbol{\frac{4}{e}}}$

$R(n)$ について

$$R(n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}$$

$x=\dfrac{k}{n}$ とおくと $(*)$ が成り立つので

$$\lim_{n\to\infty}R(n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 2^x\,dx=\left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_0^1=\frac{2-1}{\log 2}=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{\log 2}}}$$

$S(n)=\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}$ については，両辺の自然対数をとると

$$\log S(n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log y_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log 2$$

$x=\dfrac{k}{n}$ とおくと $(*)$ が成り立つので

$$\lim_{n\to\infty}\log S(n)=\log 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\log 2\int_0^1 x\,dx$$

$$=\log 2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}\log 2=\log\sqrt{2}$$

対数関数の連続性より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S(n)=\underline{\boldsymbol{\sqrt{2}}}$

231 (1) $S_k=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}_k\cdot\sin\angle\mathrm{AOB}_k=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot k\cdot\sin\dfrac{k}{2n}\pi$

$$=\underline{\boldsymbol{\frac{k}{2}\sin\frac{k}{2n}\pi}}$$

(2) $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n}\sin\frac{k}{2n}\pi$

$x=\dfrac{k}{2n}$ とおくと，$k:1\to n$ のとき $x:\dfrac{1}{2n}\to\dfrac{n}{2n}\left(=\dfrac{1}{2}\right)$ であり，$n\to\infty$ のときの x の変域は $0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$，項数 n より，区間 $0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ を n 等分すると

$\varDelta x=\dfrac{\frac{1}{2}-0}{n}=\dfrac{1}{2n}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}S_k=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n}\sin\frac{k}{2n}\pi\cdot\frac{1}{2n}=2\int_0^{\frac{1}{2}}x\sin\pi x\,dx$$

$$=2\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\right)\int_0^{\frac{1}{2}}x(\cos\pi x)'\,dx$$

$$=-\frac{2}{\pi}\left[x\cos\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\pi x\,dx$$

$$=-\frac{2}{\pi}(0-0)+\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\pi^2}(1-0)=\underline{\boldsymbol{\frac{2}{\pi^2}}}$$

1.14 定積分と不等式

問題

232 n を正の整数，log を自然対数とする。

(1) 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}$$

(2) $n \geqq 2$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$$

（滋賀医科大　改）

233 n を 2 以上の自然数とするとき，不等式

$$n\log n - n + 1 < \sum_{k=1}^{n} \log k < (n+1)\log n - n + 1$$

が成り立つことを示せ。（大阪大　改）

234 (1) 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

(2) n を 2 以上の自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^n}}\,dx \leqq \frac{\pi}{4}$$

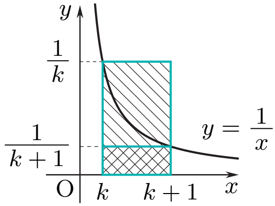
（大阪市立大）

チェック・チェック

数列の和や定積分に関する不等式の証明問題を集めてみました。このような問題では，数列の和の近似や計算できない定積分の値の近似を得るために，計算の容易な関数で評価することを考えます。具体的には，数列を**図形化して面積として比較**したり，**複雑な関数をより簡単な関数で評価**したりしていきます。

232 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ を n の簡単な式で表すことはできません。そこで，$\dfrac{1}{k}$ の和を $y=\dfrac{1}{x}$ で評価します。

$y=f(x)=\dfrac{1}{x}$ は $x>0$ で単調減少なので，下図の長方形の面積と，$\dfrac{1}{x}$ を積分して得られる面積とを比較します。



すると， より

$$\frac{1}{k+1}<\int_{k}^{k+1}\frac{dx}{x}<\frac{1}{k}$$

という評価が得られますね。

233 単調増加関数 $y=\log x$ と x 軸とで挟まれた部分の面積を**長方形の面積で評価**します。

234 $n\geqq 2$ のとき，$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ をみたす x に対しては

$$x^n\leqq x^2 \qquad \therefore\quad 1-x^n\geqq 1-x^2(>0)$$

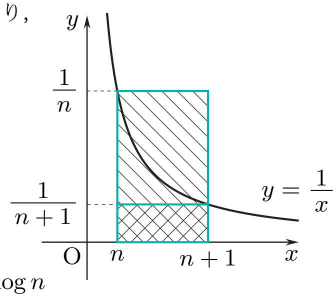
であるから

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}\leqq\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

が成り立ちます。これで (2) は (1) とつながります。

解答・解説

232 (1) $y=\dfrac{1}{x}$ は $x>0$ において単調減少であり，自然数 n に対し



$$n<x<n+1 \iff \frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}<\frac{1}{n}$$

x について，n から $n+1$ まで積分して

$$\frac{1}{n+1}<\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx<\frac{1}{n}$$

ここで，$n>0$ より

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx=\Big[\log|x|\Big]_n^{n+1}=\log(n+1)-\log n$$

したがって，正の整数 n に対して

$$\frac{1}{n+1}<\log(n+1)-\log n<\frac{1}{n}$$

が成り立つ。　　（証終）

(2) (1) よりすべての自然数 n に対して

$$\begin{cases}\dfrac{1}{n+1}<\log(n+1)-\log n & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{1}{n}>\log(n+1)-\log n & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

①より，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}&<\sum_{k=1}^{n-1}\{\log(k+1)-\log k\}\\&=(\cancel{\log 2}-\log 1)+(\cancel{\log 3}-\cancel{\log 2})+(\cancel{\log 4}-\cancel{\log 3})+\cdots\\&\qquad\cdots+\{\log n-\cancel{\log(n-1)}\}\\&=\log n\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<1+\log n$$

同様に②より

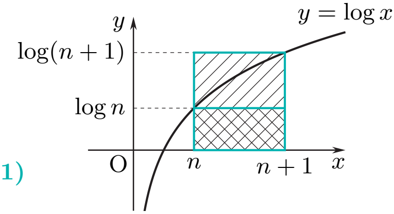
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\sum_{k=1}^{n}\{\log(k+1)-\log k\}=\log(n+1)$$

以上より，$n\geqq 2$ のとき

$$\log(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$$

が成り立つ。　　（証終）

233 $y=\log x$ は $x>0$ で定義された単調増加な連続関数なので，自然数 n に対して



$$n<x<n+1$$
$$\iff \log n<\log x<\log(n+1)$$

x について，n から $n+1$ まで積分して

$$\log n<\int_n^{n+1}\log x\,dx<\log(n+1)$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n-1}\log k<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\log x\,dx<\sum_{k=1}^{n-1}\log(k+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\log k-\log n<\int_1^n\log x\,dx<\sum_{k=1}^{n}\log k$$

ここで

$$\int_1^n\log x\,dx=\int_1^n(x)'\log x\,dx=\Big[x\log x\Big]_1^n-\int_1^n dx=n\log n-n+1$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\log k-\log n<n\log n-n+1<\sum_{k=1}^{n}\log k$$

$$\therefore\ n\log n-n+1<\sum_{k=1}^{n}\log k<(n+1)\log n-n+1$$ （証終）

234 (1) $x=\sin\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dx=\cos\theta\,d\theta$ であり，

$x:0\to\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$\theta:0\to\dfrac{\pi}{4}$ なので

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}}$$

(2) $n\geqq 2$ のとき，$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ に対して，$x^n\leqq x^2$ であるから

$$1\geqq\sqrt{1-x^n}\geqq\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore\ 1\leqq\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}\leqq\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad\left(0\leqq x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

よって

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dx\leqq\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}\,dx\leqq\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

(1) より

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}\,dx\leqq\frac{\pi}{4}$$ （証終）

2　積分法の応用

2.1　面積

問題

235 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と x 軸，y 軸とで囲まれる部分の面積は $\boxed{}$ である。（摂南大）

236 関数 $f(x)=x\sqrt{8-x^2}$ について，曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。（広島大）

237 $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，2 曲線 $y=\sin x$，$y=\sin 3x$ によって囲まれる図形の面積を求めなさい。（城西大）

238 関数 $f(x)=e^{-x}\sin x$ について，以下の空欄をうめよ。

(1) $\displaystyle\int f(x)\,dx=\boxed{}$ である。ただし，積分定数は省略してよい。

(2) n を自然数とする。$(2n-2)\pi \leqq x \leqq (2n-1)\pi$ の範囲において，曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を S_n とする。S_n を計算すると，$S_n=\boxed{}$ である。

(3) (2) で定めた S_n に対し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\boxed{}$ である。（会津大）

239 2 曲線 $y=x^2$，$y=2\sqrt{2x}$ で囲まれた図形を D とする。図形 D が直線 $y=2$ によって二つの図形に分けられるとき，それぞれの図形の面積 S_1，S_2 を求めよ。ただし，$S_1>S_2$ とする。（岩手大　改）

240 $a>0$ とし，$y=x^2$ のグラフが $y=a\log x$ のグラフに接しているとする。

(1) a の値を求めよ。

(2) 2 つの曲線 $y=x^2$，$y=a\log x$ と x 軸で囲まれる領域の面積を求めよ。

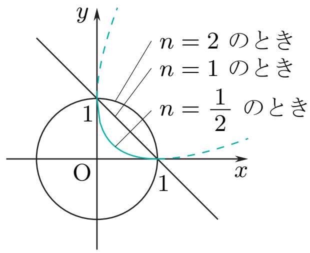
（北見工業大）

チェック・チェック

235 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ は $0 \leqq x\ (\leqq 1)$，$0 \leqq y\ (\leqq 1)$ の範囲で定義される曲線です。

$$x^n + y^n = 1$$

とすると，$n=1$ のときは直線，$n=2$ のときは円であり，本問の $n=\dfrac{1}{2}$ のときは，右図のようになります。
（実は，放物線の一部です）



236 グラフをかいて，曲線と x 軸とで囲まれた部分を調べます。
曲線が x 軸より上側にあるのか下側にあるのか，対称性があるかないかを調べるわけです。
$f(x)=x\sqrt{8-x^2}$ の**定義域**は $-2\sqrt{2} \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$ です。また，$f(-x)=-f(x)$ なので，グラフは**原点に関して対称**です。

237 2 曲線の交点の x 座標を求め，そのグラフをかきます。このとき，グラフの**対称性**にも気づくはずです。

$$f(2a-x)=f(x)$$

が成立すれば，$y=f(x)$ のグラフは直線 $\boldsymbol{x=a}$ **に関して対称**です。

238 (1) 頻出の積分計算です。（**209** 参照）
(2) $f(x)$ の正負を配慮し，(偶数)$\pi \leqq x \leqq$ (奇数)π でのグラフを考えましょう。
(3) 数列 $\{S_n\}$ は等比数列であり，$|$公比$| < 1$ であれば，無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は収束します。

239 図形の形状から，y 軸に沿って積分し，二つの図形の面積を求めましょう。

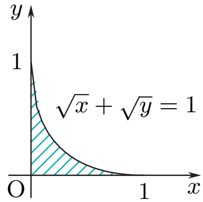
240 (1) 2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が $x=t$ で接するということは，$x=t$ における 2 曲線の接線が一致するということであり，式で表すと

$$\begin{cases} f(t)=g(t) & \text{（共有点がある）} \\ f'(t)=g'(t) & \text{（接線の傾きが一致）} \end{cases}$$

ということです。（**158** 参照）
(2) 面積は $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^t \{f(x)-g(x)\}\,dx$ ですが，これは $\displaystyle\int_0^t f(x)\,dx-\int_1^t g(x)\,dx$ と変形できます。

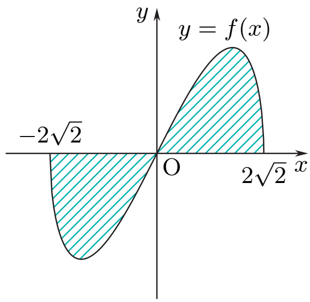
解答・解説

235 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ を図示すると右下図となる。$y=(1-\sqrt{x})^2$ より，求める面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (1-\sqrt{x})^2\,dx = \int_0^1 (1-2\sqrt{x}+x)\,dx \\ &= \left[x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= 1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{6}}} \end{aligned}$$

236 $f(x)=x\sqrt{8-x^2}$ の定義域は $-2\sqrt{2} \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$ であり，$f(x)=0$ となるのは $x=0,\ \pm 2\sqrt{2}$ である。また，$f(-x)=-f(x)$ であるから $y=f(x)$ は原点に関して対称である。$0 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$ において $f(x) \geqq 0$ であることに注意すると，求める面積 S は



$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^{2\sqrt{2}} f(x)\,dx \\ &= 2\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}\cdot\frac{(8-x^2)'}{-2}\,dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}(8-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\cdot 8^{\frac{3}{2}}}{3} \\ &= \underline{\boldsymbol{\frac{32\sqrt{2}}{3}}} \end{aligned}$$

237 2 曲線の交点の x 座標は $\sin x = \sin 3x$ より

$$\sin x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$
$$2\sin x\,(2\sin^2 x - 1) = 0$$

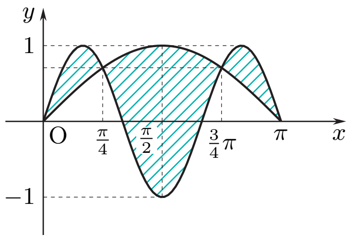
$0 \leqq x \leqq \pi$ より

$$x = 0,\ \pi,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$$

また

$$\sin 3(\pi - x) = \sin(\pi - 3x) = \sin 3x$$

より，2 曲線ともに，**直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ に関して対称**であり，2 曲線で囲まれる図形は右図のようになる。



面積 S は

$$S = \int_0^{\pi} |\sin 3x - \sin x|\,dx$$
$$= 2\left\{\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 3x - \sin x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 3x - \sin x)\,dx\right\}$$
$$= 2\left\{\left[-\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[-\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$$
$$= 2\left\{2\left(-\frac{1}{3}\cos\frac{3}{4}\pi + \cos\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{1}{3}\cos 0 + \cos 0\right) - \left(-\frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}\pi + \cos\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$= 2\left\{2\left(\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1\right) - 0\right\} = 2\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}\right)$$
$$= \underline{\boldsymbol{\frac{4(2\sqrt{2} - 1)}{3}}}$$

238 (1)　$(e^{-x}\sin x)' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$ ⋯⋯ ①

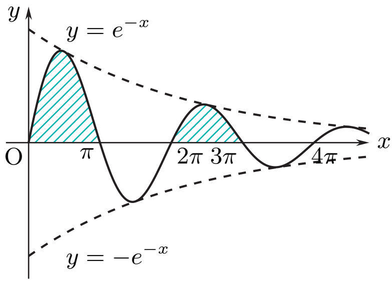
$(e^{-x}\cos x)' = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x$ ⋯⋯ ②

① + ② より

$$(e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x)' = -2e^{-x}\sin x = -2f(x)$$

$$\therefore \quad \int f(x)\,dx = \underline{\boldsymbol{-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)}}$$ （積分定数は省略）

別解 **209**(1) のように部分積分をしてもよい。



(2)　$(2n-2)\pi \leqq x \leqq (2n-1)\pi$ において，$e^{-x} > 0$，$\sin x \geqq 0$ なので，(1) より

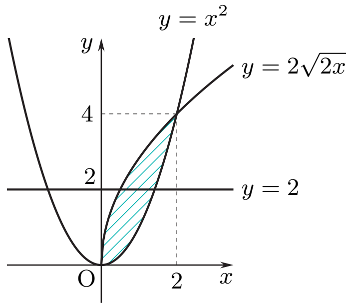
$$\begin{aligned}
S_n &= \int_{(2n-2)\pi}^{(2n-1)\pi} |f(x)|\,dx \\
&= \int_{(2n-2)\pi}^{(2n-1)\pi} f(x)\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)\right]_{(2n-2)\pi}^{(2n-1)\pi} \\
&= -\frac{1}{2}\left[e^{(1-2n)\pi}\{\sin(2n-1)\pi + \cos(2n-1)\pi\}\right. \\
&\qquad \left. - e^{(2-2n)\pi}\{\sin(2n-2)\pi + \cos(2n-2)\pi\}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\{-e^{(1-2n)\pi} - e^{(2-2n)\pi}\} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}e^{(1-2n)\pi}(1+e^{\pi})}}
\end{aligned}$$

(3)　(2) より，$\{S_n\}$ は公比 $e^{-2\pi}$ の等比数列であり，$0 < e^{-2\pi} < 1$ なので

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \frac{S_1}{1-e^{-2\pi}} = \frac{1}{1-e^{-2\pi}}\cdot\frac{1}{2}e^{-\pi}(1+e^{\pi}) \\
&= \frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi}-1}\cdot\frac{1}{2}e^{-\pi}(1+e^{\pi}) \\
&= \frac{e^{\pi}(1+e^{\pi})}{2(e^{2\pi}-1)} = \underline{\boldsymbol{\frac{e^{\pi}}{2(e^{\pi}-1)}}}
\end{aligned}$$

239 2 曲線の交点の x 座標は $x^2 = 2\sqrt{2x}$ より

$$x^4 = 8x \qquad x = 0,\ 2$$



よって，交点は $(0,\ 0)$，$(2,\ 4)$ より，図形 D は右図の斜線部のようになる。

$y = x^2\ (x > 0)$ を x について解くと

$$x = \sqrt{y}$$

$y = 2\sqrt{2x}$ を x について解くと

$$x = \frac{1}{8}y^2\ (y > 0)$$

よって，図形 D のうち，$0 \leqq y \leqq 2$ をみたす部分の面積を S_a，$2 \leqq y \leqq 4$ をみたす部分の面積を S_b とおくと

$$\begin{aligned} S_a &= \int_0^2 \left(\sqrt{y} - \frac{1}{8}y^2\right) dy \\ &= \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{24}y^3\right]_0^2 \\ &= \frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} - \frac{1}{24}\cdot 8 \\ &= \frac{4\sqrt{2}-1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_b &= \int_2^4 \left(\sqrt{y} - \frac{1}{8}y^2\right) dy \\ &= \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{24}y^3\right]_2^4 \\ &= \frac{2}{3}\cdot 8 - \frac{1}{24}\cdot 64 - \frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} + \frac{1}{24}\cdot 8 \\ &= \frac{9-4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} S_a - S_b &= \frac{4\sqrt{2}-1}{3} - \frac{9-4\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{8\sqrt{2}-10}{3} = \frac{\sqrt{128}-\sqrt{100}}{3} > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore\quad S_a > S_b$$

すなわち $S_1 = S_a$，$S_2 = S_b$ なので

$$\underline{\boldsymbol{S_1 = \frac{4\sqrt{2}-1}{3},\ S_2 = \frac{9-4\sqrt{2}}{3}}}$$

240 (1) $f(x)=x^2$, $g(x)=a\log x$ とする。$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=t\ (>0)$ で接するとき

$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} t^2=a\log t & \cdots\cdots ① \\ 2t=\dfrac{a}{t} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

である。②より，$a=2t^2$ であり，①へ代入して

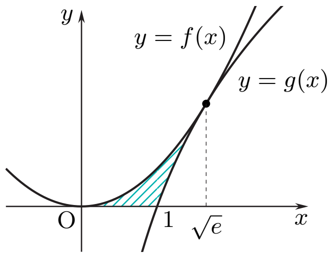
$$t^2=2t^2\log t$$
$$\therefore \quad t^2(2\log t-1)=0$$

$t>0$ より，$\log t=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore \quad t=\sqrt{e}$$

よって　$\underline{\boldsymbol{a=2e}}$

(2) 2 曲線と x 軸で囲まれる領域は右図の斜線部となり，面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{e}} f(x)\,dx-\int_1^{\sqrt{e}} g(x)\,dx \\ &= \int_0^{\sqrt{e}} x^2\,dx-2e\int_1^{\sqrt{e}} \log x\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{e}}-2e\Big[x\log x-x\Big]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{1}{3}e\sqrt{e}-2e\left(\frac{1}{2}\sqrt{e}-\sqrt{e}+1\right) \\ &= \underline{\boldsymbol{\frac{4}{3}e\sqrt{e}-2e}} \end{aligned}$$

2.2　接線・法線と曲線とで囲まれた部分の面積

問題

241 xy 平面において，x 軸上の点 $(-1,\ 0)$ から曲線 $y=\sqrt{x}$ にひいた接線の方程式は $y=\boxed{}$ で，この接線と曲線および x 軸とで囲まれた部分の面積は $\boxed{}$ である。　　（愛知工業大）

242 $0 \leqq x \leqq \pi$ とするとき，$y=\sin^2 x$ について

(1) このグラフの接線で傾きが 1 であるものを求めよ。

(2) このグラフと (1) で求めた接線および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。　　（福岡工業大）

243 座標平面上に曲線 $C: y=xe^{2x}$ と点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$ がある。P を通る C の 2 本の接線を求め，この 2 接線と C で囲まれる領域の面積を求めなさい。

（城西大　改）

244 関数 $f(x)$ を $f(x)=(x+2)e^{-x}$ とする。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(0,\ 2)$ における $y=f(x)$ の法線 l の方程式を求めよ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と法線 l によって囲まれた図形の面積を求めよ。

（北海学園大）

245 関数 $f(x)=\log(x+\sqrt{x^2-1})$ $(x \geqq 1)$ およびその逆関数 $g(x)$ $(x \geqq 0)$ のグラフをそれぞれ C_1，C_2 とする。

(1) C_1 上の点 $(a,\ f(a))$ における C_1 の法線 l_1 と C_2 上の点 $(f(b),\ b)$ における C_2 の法線 l_2 とが平行であるとき，a を用いて b を表せ。

(2) 点 $(g(1),\ 1)$ における C_1 の法線 l と曲線 C_1 および x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ。　　（東京医科歯科大　改）

チェック・チェック

241 まずはグラフをかいて，どの部分の面積を求めるのかを明示しましょう。曲線外の点から引いた接線については，**155**，**156** を見直して下さい。

242 (1) $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の傾きが 1 である条件は，$f'(t)=1$ であることです。

(2) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$ は $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ と次数下げしてから積分します。

243 曲線外の点 P から曲線 C に 2 本の接線を引くには，曲線上の点 $(t,\ te^{2t})$ における接線を求め，この接線が点 P を通ることから，接点の x 座標 t の値を決めます。接点の x 座標が決まれば，接線の方程式が決まります。

244 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における法線の方程式は，$f'(t) \fallingdotseq 0$ ならば

$$y-f(t)=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)$$

です。

245 逆関数と法線を絡めた問題です。計算量やや多めです。$g(x)$ が $f(x)$ の逆関数なので，$y=f(x)$ とすると $x=f^{-1}(y)=g(y)$ であり

$$g'(y)=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'(x)}$$

また

$$f(g(1))=f(f^{-1}(1))=1$$

であり，$g(1)$ は

$f(x)=1$ となる x，すなわち $\log(x+\sqrt{x^2-1})=1$ の解

です。

解答・解説

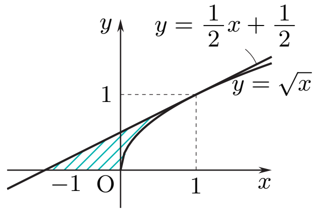
241 $f(x)=\sqrt{x}$ とおく。$f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ より，点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)+\sqrt{t}$$

である。これが点 $(-1,\ 0)$ を通るための条件は

$$0=\frac{1}{2\sqrt{t}}(-1-t)+\sqrt{t}$$

$$1+t=2t \qquad \therefore\quad t=1$$



よって，求める接線の方程式は

$$y=\frac{1}{2}(x-1)+1=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}}$$

求める面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot2\cdot1-\int_0^1\sqrt{x}\,dx=1-\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{3}}}$$

別解 $y=\sqrt{x}$，$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ を，それぞれ x について解くと

$$x=y^2\ (y>0),\ x=2y-1$$

$$\therefore\quad S=\int_0^1\{y^2-(2y-1)\}\,dy=\int_0^1(y-1)^2\,dy=\left[\frac{1}{3}(y-1)^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

242 (1) $f(x)=\sin^2x$ とおくと

$$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$$

$0\leqq x\leqq\pi$ において，接線の傾きが 1 となるのは

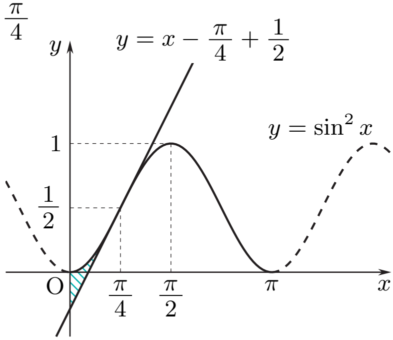
$$\sin 2x=1 \qquad 2x=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore\quad x=\frac{\pi}{4}$$

このとき　$y=\sin^2\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}$

求める接線の方程式は

$$y=1\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{y=x-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}}$$

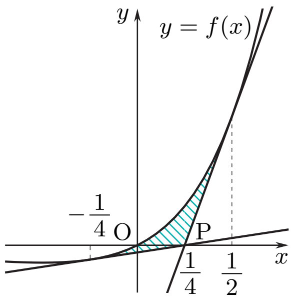


(2) 曲線 $y=\sin^2x$ のグラフと点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線は右図のようになる。したがって，求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\sin^2 x-\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\right\}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{1-\cos 2x}{2}-\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\right\}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{-\frac{1}{2}\cos 2x-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=\underline{\boldsymbol{\frac{\pi^2-8}{32}}}$$

243 $f(x)=xe^{2x}$ とおく。

$$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}=(1+2x)e^{2x}$$



点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$
$$=(1+2t)e^{2t}(x-t)+te^{2t}$$
$$=(1+2t)e^{2t}x-2t^2e^{2t}\quad\cdots\cdots\ ①$$

点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$ を通るための条件は

$$0=\frac{1}{4}(1+2t)e^{2t}-2t^2e^{2t}$$
$$e^{2t}(8t^2-2t-1)=0\qquad e^{2t}(4t+1)(2t-1)=0\qquad\therefore\quad t=-\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}$$

①へ代入すると

$t=-\frac{1}{4}$ のとき　$\underline{\boldsymbol{y=\frac{1}{2\sqrt{e}}x-\frac{1}{8\sqrt{e}}}}$

$t=\frac{1}{2}$ のとき　$\underline{\boldsymbol{y=2ex-\frac{1}{2}e}}$

この 2 接線と C で囲まれる領域は右上図の斜線部分であり，求める面積 S は

$$S=\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}}\left\{xe^{2x}-\left(\frac{1}{2\sqrt{e}}x-\frac{1}{8\sqrt{e}}\right)\right\}dx+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\left\{xe^{2x}-\left(2ex-\frac{1}{2}e\right)\right\}dx$$

ここで

$$\int xe^{2x}\,dx=\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'x\,dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

また，$\frac{1}{2\sqrt{e}}x$ は奇関数であるから

$$S=\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}xe^{2x}\,dx+\frac{1}{4\sqrt{e}}\int_0^{\frac{1}{4}}dx-e\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\left(2x-\frac{1}{2}\right)dx$$
$$=\left[\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)e^{2x}\right]_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4\sqrt{e}}\Big[x\Big]_0^{\frac{1}{4}}-e\left[x^2-\frac{1}{2}x\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{3}{8\sqrt{e}}+\frac{1}{16\sqrt{e}}-\frac{e}{16}=\underline{\boldsymbol{\frac{7}{16\sqrt{e}}-\frac{e}{16}}}$$

244 (1) $f(x)=(x+2)e^{-x}$ より　$f'(x)=e^{-x}-(x+2)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘

$f(-1)=(-1+2)e^1=e$ より，求める最大値は

$\underline{\boldsymbol{e}}$ $(x=-1)$

(2) 法線 l の傾きは $-\dfrac{1}{f'(0)}=1$ なので

$y-2=1\cdot(x-0)$　　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{y=x+2}}$

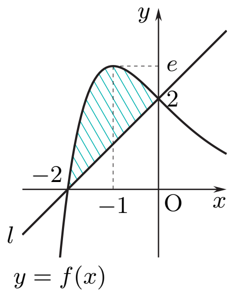
(3) 曲線 $y=f(x)$ と直線 l の交点の x 座標は

$(x+2)e^{-x}=x+2$

$(x+2)(e^{-x}-1)=0$

$\therefore$　$x=0,\ -2$

よって，曲線 $y=f(x)$ と直線 l によって囲まれる図形は右図の斜線部のようになるので，求める面積 S は



$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-2}^{0}(x+2)e^{-x}\,dx-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\\
&= -\int_{-2}^{0}(x+2)(e^{-x})'\,dx-2\\
&= -\Big[(x+2)e^{-x}\Big]_{-2}^{0}+\int_{-2}^{0}e^{-x}\,dx-2\\
&= -2+\Big[-e^{-x}\Big]_{-2}^{0}-2\\
&= -2+(-1+e^2)-2\\
&= \underline{\boldsymbol{e^2-5}}
\end{aligned}
$$

245 (1) $f'(x)=\dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})'}{x+\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1+\dfrac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

$$=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}(x+\sqrt{x^2-1})}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}=\sqrt{x^2-1}$$

法線 l_1 の傾きは

$$-\frac{1}{f'(a)}=-\sqrt{a^2-1}$$

また，法線 l_2 の傾きは

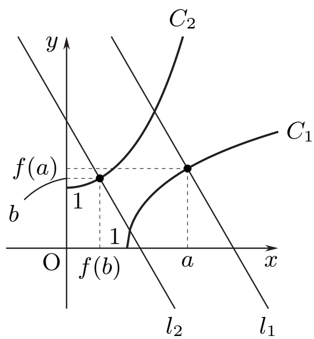
$$-\frac{1}{g'(f(b))}=-\frac{1}{\sqrt{b^2-1}}$$

$l_1 /\!/ l_2$ より，傾きが等しいので

$$-\sqrt{a^2-1}=-\frac{1}{\sqrt{b^2-1}}$$

$$b^2-1=\frac{1}{a^2-1} \qquad \therefore \quad b^2=\frac{a^2}{a^2-1}$$

$a,\ b \geqq 1$ より $\qquad \underline{\boldsymbol{b=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}}}$



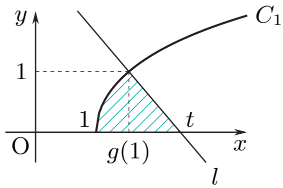
(2) l の方程式は

$$y-1=-\frac{1}{f'(g(1))}\{x-g(1)\}$$

ここで，l と x 軸の交点を $(t,\ 0)$ とおくと

$$-1=-\frac{1}{f'(g(1))}\{t-g(1)\} \qquad \therefore \quad t-g(1)=f'(g(1))$$

となるので，求める面積 S は



$$S=\int_1^{g(1)} f(x)\,dx+\frac{1}{2}\cdot\{t-g(1)\}\cdot 1$$

$$=\int_1^{g(1)} (x)'f(x)\,dx+\frac{1}{2}\cdot f'(g(1))\cdot 1$$

$$=\Big[xf(x)\Big]_1^{g(1)}-\int_1^{g(1)} xf'(x)\,dx+\frac{1}{2}f'(g(1))$$

$$=g(1)\cdot f(g(1))-1\cdot f(1)-\int_1^{g(1)}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx+\frac{1}{2}f'(g(1))$$

$$=g(1)-\frac{1}{2}\int_1^{g(1)}\frac{(x^2-1)'}{\sqrt{x^2-1}}\,dx+\frac{1}{2}f'(g(1)) \quad (\because \quad f(g(1))=1,\ f(1)=0)$$

$$=g(1)-\frac{1}{2}\Big[2\sqrt{x^2-1}\Big]_1^{g(1)}+\frac{1}{2}f'(g(1))$$

$$=g(1)-\sqrt{(g(1))^2-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(g(1))^2-1}}$$

ここで，$f(g(1))=1$ より，$g(1)$ は $f(x)=1$ の解であり，$f(x)=1$ を解くと

$$\log(x+\sqrt{x^2-1})=1 \qquad x+\sqrt{x^2-1}=e$$

$$\sqrt{x^2-1}=e-x \qquad x^2-1=e^2-2ex+x^2 \qquad x=\frac{e^2+1}{2e}$$

$$\therefore \quad g(1)=\frac{e^2+1}{2e}$$

また $\qquad (g(1))^2-1=\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)^2-1=\frac{e^4-2e^2+1}{4e^2}=\left(\frac{e^2-1}{2e}\right)^2$

$\dfrac{e^2-1}{2e}>0$ より

$$S=\frac{e^2+1}{2e}-\frac{e^2-1}{2e}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2e}{e^2-1}=\frac{1}{e}+\frac{e}{e^2-1}=\underline{\boldsymbol{\frac{2e^2-1}{e(e^2-1)}}}$$

2.3 パラメータ表示された曲線と面積

問題

246 曲線 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ と x 軸および直線 $x = \pi$ とで囲まれる部分の面積 S を求めよ。 （筑波大）

247 xy 平面において，媒介変数 t を用いて

$$x = \sin^3 t,\ y = \cos^3 t \ \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

で表される曲線を C とする。

(1) $\cos^4 t \sin^2 t$ を $\cos 2t$ を用いて表せ。

(2) $0 < \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ をみたす α に対して C 上の点 $\mathrm{P}(\sin^3 \alpha,\ \cos^3 \alpha)$ を考える。曲線 C と y 軸, および原点と P を結ぶ線分で囲まれた部分の面積 S を α を用いて表せ。 （京都工芸繊維大）

248 次の問いに答えよ。

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_0^{\pi} e^{-2t} \sin 2t\, dt = \int_0^{\pi} e^{-2t} \cos 2t\, dt$$

(2) 媒介変数 t で表された次の曲線と，x 軸とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$$x = e^{-t} \cos t,\ y = e^{-t} \sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

（姫路工業大）

249 xy 平面上において，θ を媒介変数として $x = \cos\theta,\ y = \sin 3\theta$ で表される曲線を考える。

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ に対応する曲線上の点の座標は $\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ である。

(2) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ に対応する曲線上の点の座標は $\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ である。

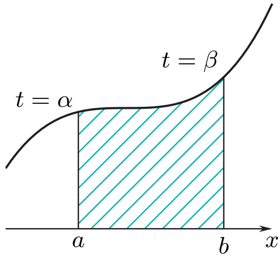
(3) xy 平面上において，直線 $y = 0$ と，この曲線の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ に対応する部分によって囲まれる図形の面積は $\boxed{}$ である。 （日本大）

チェック・チェック

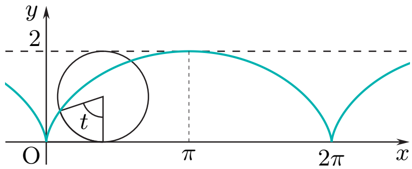
曲線 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ と x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた図形の面積 S は，$a \leqq x \leqq b$ と $\alpha \leqq t \leqq \beta$ が対応するとき

$$\int_a^b |y|\,dx = \int_\alpha^\beta |y|\frac{dx}{dt}\,dt$$

である。



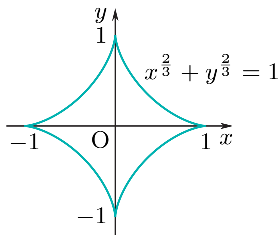
246 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ は**サイクロイド**とよばれる曲線であり，直線上をすべらずに回転する円の周上の 1 点がえがく軌跡の方程式です。



247 $\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$ は**アステロイド**（星芒形）とよばれる曲線です。この曲線は

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

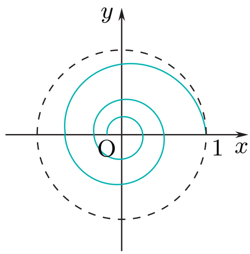
と表すこともできます。



248 $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

は右の**螺線**（らせん）をえがきます。



249 $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin 3\theta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) \\ y = \sin 3\theta \end{cases}$

この曲線の概形は**解答・解説**に示しておきます。

一般に，$\begin{cases} x = \sin m\theta \\ y = \sin n\theta \end{cases}$ で表される曲線を**リサージュ曲線**とよんでいます。

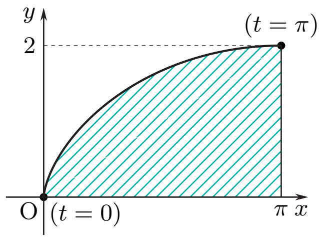
解答・解説

246 $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t\ (0 \leqq t \leqq \pi)$ より

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t \geqq 0,\quad \frac{dy}{dt} = \sin t \geqq 0$$

$x,\ y$ は t についての増加関数である。

$t = 0$ のとき $(x,\ y) = (0,\ 0)$，$t = \pi$ のとき $(x,\ y) = (\pi,\ 2)$ なので，曲線と x 軸および直線 $x = \pi$ とで囲まれる部分は右図の斜線部分となる。



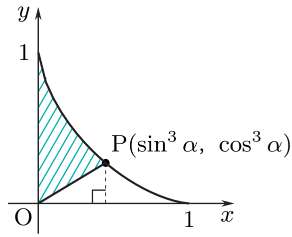
$$\begin{aligned}\therefore\quad S &= \int_0^{\pi} y\,dx = \int_0^{\pi} y\frac{dx}{dt}\,dt\\ &= \int_0^{\pi}(1-\cos t)(1-\cos t)\,dt\\ &= \int_0^{\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt\\ &= \int_0^{\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt\\ &= \left[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi} = \underline{\boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}}\end{aligned}$$

247 (1) $\cos^4 t\sin^2 t=\left(\dfrac{1+\cos 2t}{2}\right)^2\cdot\dfrac{1-\cos 2t}{2}$

$$=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{8}(1+\cos 2t)^2(1-\cos 2t)}}$$

(2) $x=\sin^3 t,\ y=\cos^3 t,\ 0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\frac{dx}{dt}=3\sin^2 t\cos t\geqq 0,$$
$$\frac{dy}{dt}=3\cos^2 t\,(-\sin t)=-3\sin t\cos^2 t\leqq 0$$



$t=0$ のとき $(x,\ y)=(0,\ 1)$，$t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $(x,\ y)=(1,\ 0)$ なので，曲線 C と y 軸および線分 OP で囲まれた部分は右図の斜線部分となる。

$$\therefore\quad S=\int_0^{\sin^3\alpha} y\,dx-\frac{1}{2}\cdot\sin^3\alpha\cdot\cos^3\alpha$$

ここで

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sin^3\alpha} y\,dx&=\int_0^{\alpha} y\frac{dx}{dt}\,dt=\int_0^{\alpha}\cos^3 t\,(3\sin^2 t\cos t)\,dt\\
&=3\int_0^{\alpha}\cos^4 t\sin^2 t\,dt\\
&=\frac{3}{8}\int_0^{\alpha}(1+\cos 2t)^2(1-\cos 2t)\,dt\quad(\because\ (1))\\
&=\frac{3}{8}\int_0^{\alpha}(1+\cos 2t)(1-\cos^2 2t)\,dt\\
&=\frac{3}{8}\int_0^{\alpha}(1+\cos 2t)\sin^2 2t\,dt\\
&=\frac{3}{8}\int_0^{\alpha}(\sin^2 2t+\sin^2 2t\cos 2t)\,dt\\
&=\frac{3}{8}\int_0^{\alpha}\left\{\frac{1-\cos 4t}{2}+\frac{1}{2}(\sin 2t)^2\cdot(\sin 2t)'\right\}dt\\
&=\frac{3}{8}\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\sin 4t+\frac{1}{6}(\sin 2t)^3\right]_0^{\alpha}\\
&=\frac{3}{16}\alpha-\frac{3}{64}\sin 4\alpha+\frac{1}{16}\sin^3 2\alpha
\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}
S&=\frac{3}{16}\alpha-\frac{3}{64}\sin 4\alpha+\frac{1}{16}\sin^3 2\alpha-\frac{1}{2}\sin^3\alpha\cos^3\alpha\\
&=\frac{3}{16}\alpha-\frac{3}{64}\sin 4\alpha+\frac{1}{16}\sin^3 2\alpha-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)^3\\
&=\underline{\boldsymbol{\frac{3}{16}\alpha-\frac{3}{64}\sin 4\alpha}}
\end{aligned}$$

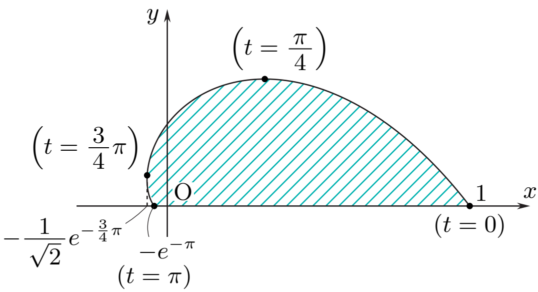
248 (1) $$\int_0^{\pi} e^{-2t}\sin 2t\,dt = \int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)'\sin 2t\,dt$$
$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{-2t}(2\cos 2t)\,dt$$
$$= \int_0^{\pi} e^{-2t}\cos 2t\,dt$$

（証終）

(2) $x = e^{-t}\cos t,\ \ y = e^{-t}\sin t\ (0 \leqq t \leqq \pi)$ より
$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$$
$$= -\sqrt{2}\,e^{-t}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\frac{dy}{dt} = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t = -e^{-t}(\sin t - \cos t)$$
$$= -\sqrt{2}\,e^{-t}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

よって，増減表および概形は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
x	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{4}\pi}$	$\nearrow$	$-e^{-\pi}$
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{4}\pi}$	$\searrow$	0



よって

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{4}\pi}}^{1} y\,dx - \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{4}\pi}}^{-e^{-\pi}} y\,dx \\
&= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{0} y\frac{dx}{dt}\,dt - \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} y\frac{dx}{dt}\,dt = -\left\{\int_{0}^{\frac{3}{4}\pi} y\frac{dx}{dt}\,dt + \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} y\frac{dx}{dt}\,dt\right\} \\
&= -\int_{0}^{\pi} y\frac{dx}{dt}\,dt \\
&= \int_{0}^{\pi} e^{-t}\sin t \cdot e^{-t}(\cos t + \sin t)\,dt \\
&= \int_{0}^{\pi} e^{-2t}(\sin t\ \cos t + \sin^2 t)\,dt \\
&= \int_{0}^{\pi} e^{-2t}\left(\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1-\cos 2t}{2}\right)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left\{\int_{0}^{\pi} e^{-2t}\sin 2t\,dt - \int_{0}^{\pi} e^{-2t}\cos 2t\,dt\right\} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} e^{-2t}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} e^{-2t}\,dt \quad (\because\ (1)\ \text{より}) \\
&= \left[-\frac{1}{4}e^{-2t}\right]_{0}^{\pi} = \underline{\boldsymbol{\frac{1-e^{-2\pi}}{4}}}
\end{aligned}
$$

249 (1) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき

$x=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\qquad y=\sin\left(3\cdot\dfrac{\pi}{3}\right)=0\qquad\therefore\ \underline{\left(\boldsymbol{\frac{1}{2},\ 0}\right)}$

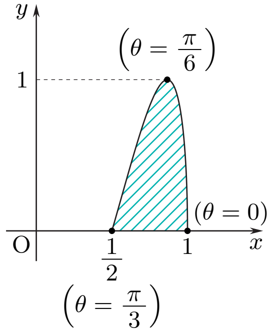
(2) $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$x=\cos\dfrac{\pi}{2}=0\quad y=\sin\left(3\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)=-1\qquad\therefore\ \underline{\boldsymbol{(0,\ -1)}}$

(3) $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ において

$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\leqq 0,\ \dfrac{dy}{d\theta}=3\cos 3\theta$

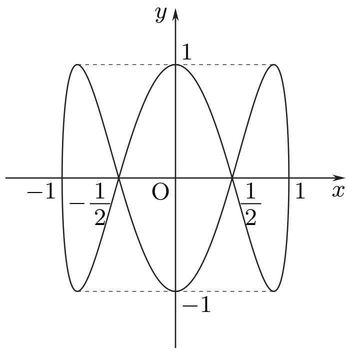
θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	
x	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$\frac{1}{2}$
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
y	0	↗	1	↘	0



以上より，求める面積 S は

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{1}y\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}y\frac{dx}{d\theta}d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\sin 3\theta\cdot(-\sin\theta)d\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin 3\theta\sin\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\cos 2\theta-\cos 4\theta)d\theta=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\underline{\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{16}}}$$

【参考】この曲線をコンピュータで図示させると右図のようになります。



2.4　体積（回転体）

問題

250 $y = \sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積は $\boxed{}$ である。　（埼玉工業大）

251 半径 r の半球形の容器に水がみたされている。この容器を静かに 30° だけ傾けると，どれだけの水が流れ出るか求めよ。　（信州大）

252 xy 平面上において曲線 $y = e^x$ および 3 つの直線 $x = 0$，$x = 1$，$y = 0$ により囲まれる図形を K とする。図形 K を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積は $\boxed{}$ であり，図形 K を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積は $\boxed{}$ である。　（慶応義塾大）

253 曲線 $y = \log x$ と x 軸と，直線 $x = e$ で囲まれた図形を F とする。F を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_1，F を直線 $x = e$ のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とする。このとき次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底，$\log x$ は自然対数とする。

(1) V_1 と V_2 を求めよ。

(2) V_1 と V_2 の大小を比べよ。　（千葉大）

チェック・チェック

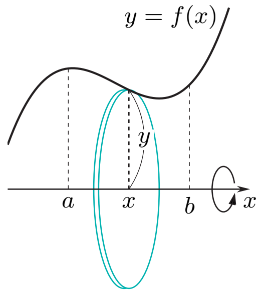
250 回転体の体積は，微小な厚さの円板の体積の寄せ集めです。右図の微小な厚さの円板の体積 $\varDelta V$ は

$$\varDelta V = \pi y^2 \cdot \varDelta x$$

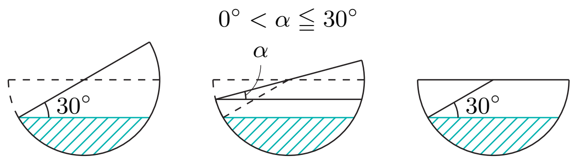
ですから，曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = a$，$x = b$ および x 軸とで囲まれた部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V は

$$V = \int_a^b \pi y^2\, dx$$

です。



251 容器を 30° 傾けたときの残っている水の量は，右図のどの場合も同じです。



252 y 軸まわりの回転体は，**251** と同じく

$$V = \int_\alpha^\beta \pi x^2\, dy$$

として計算すればよいですね。

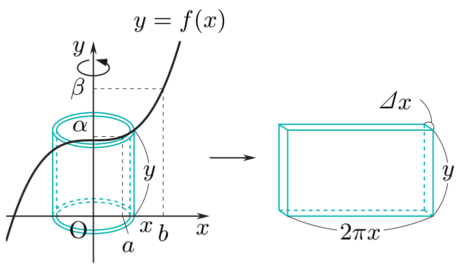
また，薄い円筒の体積 $\varDelta V$ は

$$\varDelta V = 2\pi x \cdot y \cdot \varDelta x$$

なので，曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = a$，$x = b$ および，x 軸とで囲まれた部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V は

$$V = \int_a^b 2\pi xy\, dx$$

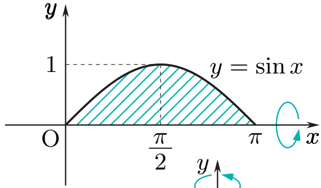
として計算することもできます。



253 直線 $x = e$ のまわりに 1 回転してできる回転体は，x 軸正方向に $-e$ だけ平行移動すると，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体とみなすことができます。あるいは直接，直線 $x = e$ と曲線上との距離 $e - x$ を半径とする微小円盤を考えてもよいですね。

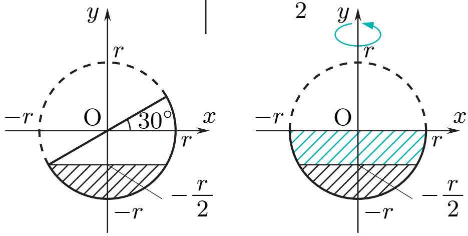
解答・解説

250 回転体の体積を V とすると



$$V=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\underline{\boldsymbol{\frac{\pi^2}{2}}}$$

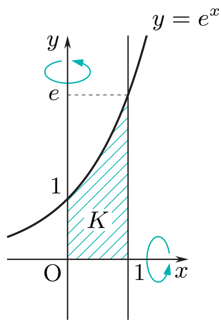
251 30° だけ傾けると，水の高さは中心から $r\sin 30^\circ=\dfrac{r}{2}$ だけ減るので，流れ出る水の量は，円：$x^2+y^2\leqq r^2$ の $-\dfrac{r}{2}\leqq y\leqq 0$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積に等しい。



よって，求める体積 V は

$$V=\int_{-\frac{r}{2}}^{0}\pi x^2\,dy=\pi\int_{-\frac{r}{2}}^{0}(r^2-y^2)\,dy=\pi\left[r^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-\frac{r}{2}}^{0}=\underline{\boldsymbol{\frac{11}{24}\pi r^3}}$$

252 K を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V_1 は



$$V_1=\pi\int_0^1(e^x)^2\,dx$$
$$=\pi\int_0^1 e^{2x}\,dx=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$
$$=\underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{2}(e^2-1)}}$$

$y=e^x$ を x について解くと

$$x=\log y$$

より，K を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V_2 は

$$V_2=\pi\cdot 1^2\cdot e-\pi\int_1^e(\log y)^2\,dy$$
$$=\pi e-\pi\int_1^e y'(\log y)^2\,dy$$
$$=\pi e-\pi\Big[y(\log y)^2\Big]_1^e+\pi\int_1^e y\cdot 2\log y\cdot\frac{1}{y}\,dy$$
$$=\pi e-\pi e+2\pi\int_1^e y'\cdot\log y\,dy$$
$$=2\pi\Big[y\log y\Big]_1^e-2\pi\int_1^e y\cdot\frac{1}{y}\,dy$$
$$=2\pi e-2\pi\int_1^e dy$$
$$=2\pi e-2\pi(e-1)$$
$$=\underline{\boldsymbol{2\pi}}$$

別解　$V_2 = \pi \cdot 1^2 \cdot e - 2\pi \int_0^1 x(e - e^x)\, dx$

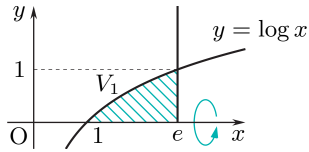
$= \pi e - 2\pi \left[e \cdot \frac{x^2}{2} - (x-1)e^x \right]_0^1 = 2\pi$

253 (1) $V_1 = \int_1^e \pi(\log x)^2\, dx = \pi \int_1^e (x)'(\log x)^2\, dx$

$= \pi \left\{ \left[x(\log x)^2 \right]_1^e - \int_1^e x \cdot 2(\log x) \cdot \frac{1}{x}\, dx \right\}$

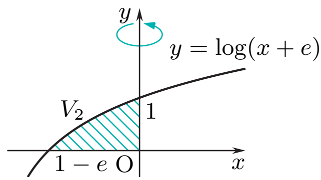
$= \pi e - 2\pi \int_1^e (x)' \log x\, dx = \pi e - 2\pi \left[x \log x - x \right]_1^e$

$= \underline{\boldsymbol{(e-2)\pi}}$



次に，F を x 軸正方向に $-e$ だけ平行移動すると，右下図のように $y = \log(x+e)$ と x 軸と y 軸で囲まれた図形となるので，V_2 はこれを y 軸のまわりに回転させればよい。

$$V_2 = \int_0^1 \pi x^2\, dy$$



ここで，$y = \log(x+e)$ を x について解くと

$$x + e = e^y \qquad \therefore \quad x = e^y - e$$

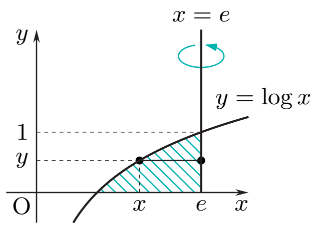
であるから

$$V_2 = \pi \int_0^1 (e^y - e)^2\, dy$$

$$= \pi \int_0^1 (e^{2y} - 2e^{y+1} + e^2)\, dy$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2}e^{2y} - 2e^{y+1} + e^2 y \right]_0^1 = \underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{2}(e^2 - 4e + 1)}}$$

別解　$V_2 = \int_0^1 \pi(e - x)^2\, dy = \pi \int_0^1 (e - e^y)^2\, dy$ とし直線 $x = e$ のまわりに回転させてもよい。



(2) $V_2 - V_1 = \frac{\pi}{2}\{(e^2 - 4e + 1) + 2(e - 2)\}$

$= \frac{\pi}{2}(e^2 - 2e - 3)$

$= \frac{\pi}{2}(e - 3)(e + 1)$

$2 < e < 3$ より，$e - 3 < 0$，$e + 1 > 0$ なので

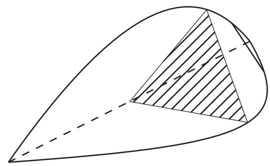
$$V_2 - V_1 > 0 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{V_1 < V_2}}$$

2.5　体積（非回転体）

問題

254 底面の半径が a，高さも a である直円柱がある。底面の 1 つの直径を含み，底面と 45° の傾きをなす平面で，直円柱を 2 つの部分に分けるとき，各部分の体積を求めよ。（学習院大）

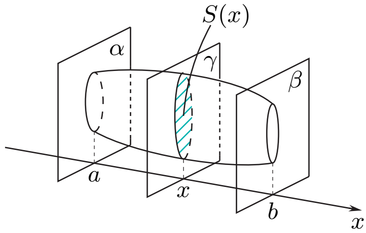
255 xy 平面内の放物線 $y=x^2-2x-1$ と直線 $y=-x+1$ で囲まれた部分を底面とし，x 軸に垂直な平面で切った切り口がつねに正三角形であるような右図の概形をもつ立体の体積を求めよ。（信州大）



256 xyz 空間の 2 点 A(1，0，1)，B(−1，0，1) を結ぶ直線を L とし，xy 平面における円 $x^2+y^2 \leqq 1$ を D とする。点 P が L 上を動き，点 Q が D 上を動くとき，線分 PQ が動いてできる立体を H とする。

平面 $z=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ による立体 H の切り口 H_t の面積 S_t と，H の体積 V を求めよ。（東北大）

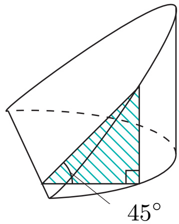
チェック・チェック



ある立体と，x 軸に垂直な 2 平面 α，β とではさまれた立体の体積 V は，α，β と x 軸との交点の座標を，それぞれ a，b とし，x 座標が x の点で x 軸に垂直に立てた平面 γ によるこの立体の断面積を $S(x)$ とすると

$$V=\int_a^b S(x)\,dx$$

です。**微小体積 $S(x)\varDelta x$ の寄せ集め**というのが基本精神です。



254 右図の切り口（斜線部分）は直角二等辺三角形です。

255 問題文にあるように切り口は正三角形です。

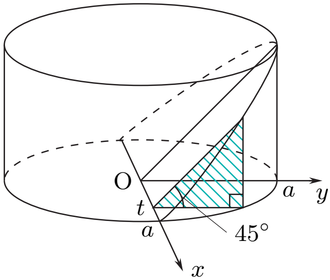
この正三角形の 1 辺の長さを求めましょう。

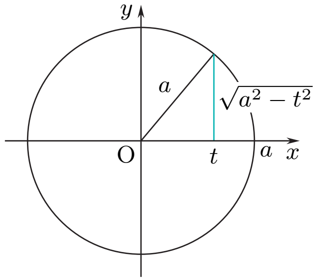
256 2 点 P，Q が動いて立体 H ができるのですが，同時に 2 点を動かすのはつらい。**まずは一方を固定して**，他方を動かします。P を固定して Q が動くときの立体は斜円錐です。

解答・解説

254 図のように x 軸，y 軸をとると，小さい方の部分と，x 軸に垂直な平面 $x = t\ (-a \leqq t \leqq a)$ の共通部分は，直角をはさむ 2 辺が $\sqrt{a^2 - t^2}$ の直角二等辺三角形なので，面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2}(a^2 - t^2)$$



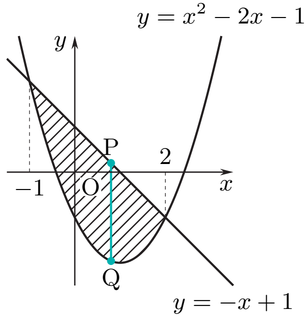


よって，小さい方の体積は

$$\int_{-a}^{a} S(t)\,dt = 2 \times \frac{1}{2}\int_0^a (a^2 - t^2)\,dt = \left[a^2 t - \frac{1}{3}t^3\right]_0^a = \underline{\boldsymbol{\frac{2}{3}a^3}}$$

したがって，大きい方の体積は

$$\pi a^2 \cdot a - \frac{2}{3}a^3 = \underline{\boldsymbol{\left(\pi - \frac{2}{3}\right)a^3}}$$



255 $y=x^2-2x-1$ と $y=-x+1$ の交点の x 座標は

$$x^2-2x-1=-x+1$$
$$x^2-x-2=0$$
$$(x+1)(x-2)=0 \qquad \therefore \quad x=-1,\ 2$$

したがって，底面は右図の斜線部分となる。この底面を x 軸と垂直な平面で切った切り口，すなわち線分 PQ の長さは

$$(-x+1)-(x^2-2x-1)$$
$$=-x^2+x+2=-(x+1)(x-2)$$

である。したがって，PQ を 1 辺とする正三角形の面積 $S(x)$ は

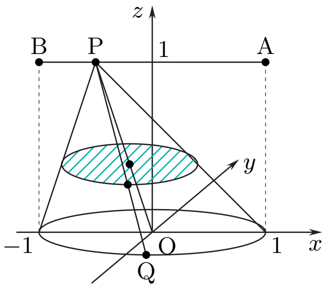
$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\{-(x+1)(x-2)\}^2\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}(x+1)^2(x-2)^2$$

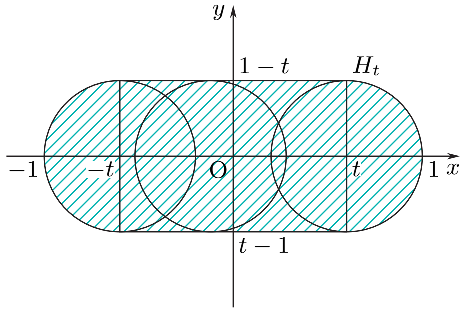
となる。よって，求める体積 V は

$$V=\int_{-1}^{2}S(x)\,dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)^2\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^{2}(x+1)^2\{(x+1)-3\}^2\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^{2}\{(x+1)^4-6(x+1)^3+9(x+1)^2\}\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{(x+1)^5}{5}-6\cdot\frac{(x+1)^4}{4}+9\cdot\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3^5}{5}-\frac{3}{2}\cdot 3^4+3\cdot 3^3\right)=\underline{\boldsymbol{\frac{81\sqrt{3}}{40}}}$$

256 P$(p,\ 0,\ 1)$ を固定して，Q を D 上で動かすと，線分 PQ は P を頂点とする斜円すいをえがく。これと，平面 $z=t$ の共通部分は，OP を $t:1-t$ に内分する点 $(pt,\ 0,\ t)$ を中心とする半径 $1-t$ の円板である。

次に，P を線分 AB 上で動かすと，立体 H の平面 $z=t$ による切り口 H_t は下の右図の斜線部分となる。





切り口 H_t の面積 S_t は

$$S_t=\pi(1-t)^2+2t\cdot 2(1-t)=\underline{\boldsymbol{\pi(1-t)^2+4t(1-t)}}$$

よって，H の体積 V は

$$\begin{aligned}V&=\int_0^1 S_t\,dt=\int_0^1\{\pi(1-t)^2+4t(1-t)\}\,dt\\&=\pi\left[-\frac{1}{3}(1-t)^3\right]_0^1+4\int_0^1(t-t^2)\,dt\\&=\frac{\pi}{3}+4\left[\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\underline{\boldsymbol{\frac{\pi+2}{3}}}\end{aligned}$$

2.6　曲線の長さ

問題

257 $0 \leqq x$ で定義された曲線 $y = \sqrt{x} - \dfrac{x\sqrt{x}}{3}$ について，点 P が点 $\left(1,\ \dfrac{2}{3}\right)$ を出発して，x 軸正方向にこの曲線上を点 Q まで動く。点 Q の x 座標を $q\ (q > 1)$ とするとき，点 P が動いた道のり $L(q)$ を求めよ。　（群馬大　改）

258 正の定数 a に対して，関数 $f(x) = \dfrac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ を考える。曲線 $C : y = f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(0,\ a)$，$\mathrm{Q}(b,\ f(b))$ $(b > 0)$ の間の弧の長さは $af'(b)$ に等しいことを示せ。　（富山大　改）

259 θ が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，点 $(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$ が描く軌跡を A とする。A の長さを求めよ。　（日本医科大　改）

260 初めは原点にある動点 P の t 秒後の座標 $(x(t),\ y(t))$ が

$$x(t) = e^t\cos t - 1, \quad y(t) = e^t\sin t$$

で与えられるとする。P が 2 度目に x 軸の正の部分に達するまでに P が動く道のりは $\boxed{}$ である。　（早稲田大）

261 平面上の点の直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とする。極方程式 $r = f(\theta)$ によって表される曲線 C について，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C 上の点 $(x,\ y)$ について，$\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2$ を $f(\theta)$，$f'(\theta)$ を用いて表せ。

(2) $f(\theta) = \sin^3\dfrac{\theta}{3}$ のとき，曲線 C の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の長さを求めよ。

（熊本大）

チェック・チェック

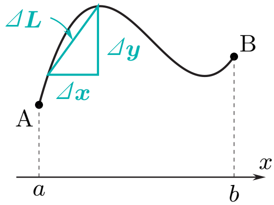
257 $y=f(x)$ の $a \leqq x \leqq b$ における曲線の長さ L は

$$\varDelta L=\sqrt{(\varDelta x)^2+(\varDelta y)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2}\,\varDelta x$$

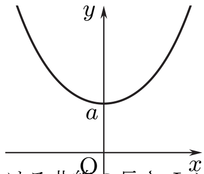
なので

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

です。



258 これはカテナリー (懸垂線) とよばれる曲線です。ロープや電線の両端を持って垂らしたときにできる曲線です。



259 パラメータ表示された曲線 $\begin{cases} x=x(\theta) \\ y=y(\theta) \end{cases}$ の $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ における曲線の長さ L は

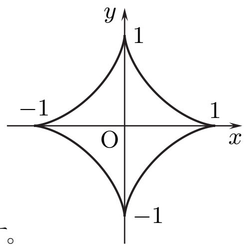
$$\varDelta L=\sqrt{(\varDelta x)^2+(\varDelta y)^2}=\sqrt{\left(\frac{\varDelta x}{\varDelta \theta}\right)^2+\left(\frac{\varDelta y}{\varDelta \theta}\right)^2}\,\varDelta\theta$$

なので

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

です。

本問はアステロイド（星芒形）とよばれる有名な曲線です。



260 動点 P が 2 度目に x 軸の正の部分に達するのは

$$y(t)=e^t\sin t=0$$

の正の解のうち，小さい方から順に $x(t)$ に代入していき，2 度目に正となる t のときです。

261 (1) 極座標表示された曲線 $r=f(\theta)$ の $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ における長さ L は本問により

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(\theta)\}^2+\{f(\theta)\}^2}\,d\theta$$

であることが分かります。

解答・解説

257 $y=x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ より

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 1+\{f'(x)\}^2&=1+\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^2\\&=1+\frac{x^{-1}-2+x}{4}\\&=\frac{x^{-1}+2+x}{4}\\&=\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^2\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}L(q)&=\int_1^q\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx\\&=\int_1^q\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}{2}\right)dx\\&=\frac{1}{2}\left[2\cdot x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_1^q\\&=\sqrt{q}+\frac{1}{3}q\sqrt{q}-1-\frac{1}{3}\\&=\underline{\boldsymbol{\frac{q\sqrt{q}}{3}+\sqrt{q}-\frac{4}{3}}}\end{aligned}$$

258 $f'(x)=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{a}\cdot e^{\frac{x}{a}}-\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$ であるから

$$\begin{aligned}1+\{f'(x)\}^2&=1+\left\{\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})\right\}^2\\&=1+\frac{1}{4}(e^{\frac{2x}{a}}+e^{-\frac{2x}{a}}-2)\\&=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}}+e^{-\frac{2x}{a}}+2\right)\\&=\left\{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)\right\}^2\end{aligned}$$

したがって，題意の弧の長さ l は

$$\begin{aligned}l&=\int_0^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^b\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx\\&=\frac{1}{2}\left[ae^{\frac{x}{a}}-ae^{-\frac{x}{a}}\right]_0^b\\&=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{b}{a}}-e^{-\frac{b}{a}}\right)\\&=af'(b)\end{aligned}$$

（証終）

259 $x(\theta)=\cos^3\theta,\ y(\theta)=\sin^3\theta$ とおくと

$$x(2\pi-\theta)=x(\theta)$$
$$y(2\pi-\theta)=-y(\theta)$$

より，$0\leqq\theta\leqq\pi$ と $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ のときの軌跡は，x 軸に関して対称である。また

$$x\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-x\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$y\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=y\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

より，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ と $\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のときの軌跡は，y 軸に関して対称である。すなわち，軌跡 A は x 軸，y 軸に関して対称であるから，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ での軌跡を考えればよい。ここで

$$\frac{dx}{d\theta}=-3\sin\theta\cos^2\theta$$
$$\frac{dy}{d\theta}=3\cos\theta\sin^2\theta$$

より

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=9\sin^2\theta\cos^2\theta$$

となるので，求める長さ L は

$$\begin{aligned}L&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin\theta\cos\theta d\theta\\&=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta\\&=6\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\underline{\mathbf{6}}\end{aligned}$$

260 $x'(t) = (e^t)'\cos t + e^t(\cos t)' = e^t\cos t - e^t\sin t = e^t(\cos t - \sin t)$
$y'(t) = (e^t)'\sin t + e^t(\sin t)' = e^t\sin t + e^t\cos t = e^t(\cos t + \sin t)$

より

$$\begin{aligned}\sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2} &= \sqrt{\{e^t(\cos t-\sin t)\}^2+\{e^t(\cos t+\sin t)\}^2}\\ &= e^t\sqrt{(1-2\sin t\cos t)+(1+2\sin t\cos t)}\\ &= \sqrt{2}e^t\end{aligned}$$

また，$t>0$ の範囲で $y(t)=0$ を解くと

$t=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$

このときの P の座標は

$(-e^{\pi}-1,\ 0),\ (e^{2\pi}-1,\ 0),\ (-e^{3\pi}-1,\ 0),\ (e^{4\pi}-1,\ 0),\ \cdots$

より，P が 2 度目に x 軸の正の部分に達するのは，$\mathrm{P}(e^{4\pi}-1,\ 0)$ となるとき，すなわち $t=4\pi$ のときである。よって，求める道のり L は

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{4\pi}\sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2}\,dt\\ &= \int_0^{4\pi}\sqrt{2}e^t\,dt\\ &= \left[\sqrt{2}e^t\right]_0^{4\pi}\\ &= \underline{\boldsymbol{\sqrt{2}(e^{4\pi}-1)}}\end{aligned}$$

261 (1) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ より

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}\{f(\theta)\cos\theta\}\\ &= f'(\theta)\cos\theta + f(\theta)(\cos\theta)'\\ &= f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}\{f(\theta)\sin\theta\}\\ &= f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)(\sin\theta)'\\ &= f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\\ &= \{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta\}^2 + \{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta\}^2\\ &= \{f'(\theta)\}^2\cos^2\theta - 2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta + \{f(\theta)\}^2\sin^2\theta\\ &\qquad + \{f'(\theta)\}^2\sin^2\theta + 2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta + \{f(\theta)\}^2\cos^2\theta\\ &= \underline{\boldsymbol{\{f'(\theta)\}^2+\{f(\theta)\}^2}}\end{aligned}$$

(2) $f(\theta)=\sin^3\dfrac{\theta}{3}$ より

$$f'(\theta)=3\sin^2\frac{\theta}{3}\cdot\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)'=3\sin^2\frac{\theta}{3}\cdot\cos\frac{\theta}{3}\cdot\left(\frac{\theta}{3}\right)'=\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}$$

よって

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2&=\left(\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\right)^2+\left(\sin^3\frac{\theta}{3}\right)^2\\&=\sin^4\frac{\theta}{3}\left(\cos^2\frac{\theta}{3}+\sin^2\frac{\theta}{3}\right)\\&=\sin^4\frac{\theta}{3}\end{aligned}$$

となるので，求める長さ L は

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^4\frac{\theta}{3}}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{\theta}{3}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos\frac{2}{3}\theta}{2}\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=\underline{\boldsymbol{\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{8}}}\end{aligned}$$