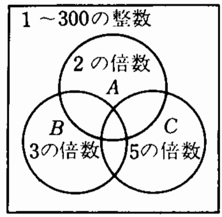
演習の解答

[1] 右図のように記号をとると



$$n(A\cup B\cup C)$$
$$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$
$$=150+100+60-50-20-30+10=220$$

したがって，求める個数は

$$n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=n(\overline{A\cup B\cup C})$$
$$=300-220$$
$$=80$$
……(答)

[2] $x<y<z$ となる $(x,\ y,\ z)$ を辞書式に並べていくと

(1, 2, ○)　は4通り
(1, 3, ○)　は3通り
(1, 4, ○)　は2通り
(1, 5, 6)　の1通り
(2, 3, ○)　は3通り
(2, 4, ○)　は2通り
(2, 5, 6)　の1通り
(3, 4, ○)　は2通り
(3, 5, 6)　の1通り
(4, 5, 6)　の1通り

以上，合計すると　20　通り　……(答)

[3] □□□□□□
↑
0はダメ

$5\times5!=600$　……(答)（ア）

辞書式に数を並べていくと

1□□□□□ ……… $5!=120$ 番目

2 0 1 3 4 5 ……… 121 番目

2 0 1 3 5 4 ……… 122 番目 ……(答) (イ)

また，偶数の個数は $\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{1}$ の順に数を決めていく(すなわち，末位を最初に決める)ことにすると

末位が 0 のとき　$1\times5!=120$

0 でないとき　$2\times4\times4!=192$

$\therefore$ $120+192=312$ 個 ……(答) (ウ)

[4] $N=100a+10b+c$ が 3 の倍数 $\Longleftrightarrow$ $a+b+c$ が 3 の倍数

各位がすべて等しく a であるとき，$3a=$(3 の倍数) である。

a は $1\leqq a\leqq9$ の 9 通りがとれるから，3 の倍数は 9 個 ……(答) (ア)

各位がすべて異なるときは

$A_0=\{0,\ 3,\ 6,\ 9\}$，$A_1=\{1,\ 4,\ 7\}$，$A_2=\{2,\ 5,\ 8\}$

から 3 数ともとるか，各々1 つの数をとればよい。ただし，百の位は 0 ではない。

$(4\cdot3\cdot3\times3!-1\cdot3\cdot3\times2!)+(3\cdot3\cdot2+3!+3!)=228$ 個 ……(答) (イ)

[5] $42336=2^5\cdot3^3\cdot7^2$，$49896=2^3\cdot3^4\cdot7\cdot11$

最大公約数は $2^3\cdot3^3\cdot7$ ゆえ，公約数は

$2^a\cdot3^b\cdot7^c$　$0\leqq a\leqq3$，$0\leqq b\leqq3$，$0\leqq c\leqq1$

の形をしている。この個数は $4\cdot4\cdot2=32$ 個 ……(答) (ア)

また，最小公倍数は $2^5\cdot3^4\cdot7^2\cdot11=1397088$

1 億$\div1397088=71.5\cdots\cdots$　71 個 ……(答) (イ)

[6] 作られる金額は

$500x+100y+10z$

であり，$0\leqq x\leqq3$，$0\leqq y\leqq3$，$0\leqq z\leqq5$ ゆえ金額のダブリはない。0 円となる場合を除くと

$4\times4\times6-1=96-1=95$ 種類 ……(答)

[7]　まず，両端の女子2人を決めて，次に男子3人，女子2人を並べる。　${}_4P_2 \cdot 5! = 1440$　　……(答) (ア)

女子4人が隣り合うのは，この4人の並び方が4!通りで，これをひとまとまりとして（女子4人），男子3人の並び方を考える。

$$4! \cdot 4! = 576$$　……(答) (イ)

[8]　(1)　S○○○○Iの順列は　$4! = 24$　通り　……(答)

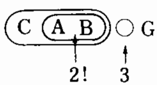
(2)　O，A，Iを並べておいて，これらの文字の間もしくは両端に1つずつS，H，Dを順次入れていくと

$$4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$$　通り　……(答)

[9]　(1)　○○ と並べて，間もしくは両端のどちらかに（ABC）を入れる。A，B，Cの順序を考えると

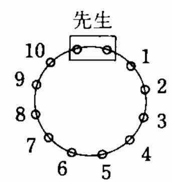
$${}_4P_2 \cdot 3 \cdot 3! = 216$$　通り　……(答)

(2)



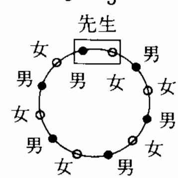
$2! \cdot 3 = 6$　通り　……(答)

[10]　先生の座わる場所を固定して考える。



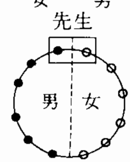
(1)　先生の座り方は2通り，次に学生が座わると考えると

$$2 \times 10! = 7257600$$　通り　……(答)



(2)　先生2人の座わり方が決まれば，男女の席は確定する。男子学生5人の座わり方5!通り，女子学生5人の座わり方5!通りであるから

$$2 \times (5! \cdot 5!) = 28800$$　通り　……(答)



(3)　(2)と同じく，先生の座り方が決まれば，男女の席は確定する。

$$2 \times (5! \cdot 5!) = 28800$$　通り　……(答)

[11] どちらも余事象を考える。

女が少なくとも1人含まれる方法は，全体から男ばかり3人の場合を除いて

$${}_{10}C_3 - {}_6C_3 = 120 - 20 = 100 \quad \text{通り} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

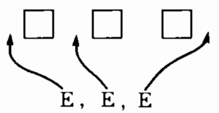
女が少なくとも2人含まれる方法は，女が1人だけ含まれる方法が

$${}_4C_1 \cdot {}_6C_2 = 4 \cdot 15 = 60$$

であるから

$${}_{10}C_3 - (20+60) = 120 - 80 = 40 \quad \text{通り} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

[12] まず，D，G，Rを並べ，次に，そのすき間あるいは両端に3つのEを入れると考えると



$$3! \times {}_4C_3 = 6 \times 4$$
$$= 24 \quad \text{通り} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

[13] $x,\ y,\ z \geqq 1$ ゆえ

$X = x-1,\ Y = y-1,\ Z = z-1$ と置くと

$x+y+z = X+Y+Z+3 = 6$

$\therefore\quad X+Y+Z=3,\ X \geqq 0,\ Y \geqq 0,\ Z \geqq 0$

この方程式の整数解の個数は

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10 \quad \text{個} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

[14] ${}_3H_{88} = {}_{90}C_{88} = 4005$　種類　……(答)

[15] (1)　1つのボールの入れ方は7通りずつであるから

$${}_7\Pi_3 = 7^3 = 343 \quad \text{通り} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　7つの箱から，ボールの入る箱3つを選べばよい。

$${}_7C_3 = 35 \quad \text{通り} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　1つの箱にボール2個，他の箱にボール1個と入るのは

$$7 \cdot 6 = 42$$

(3)のときと合わせて

$35+42=77$ 通り　……(答)

別解 各箱に入るボールの個数を a, b, ……, g とするとボールの入れ方は

$$a+b+c+d+e+f+g=3 \quad a,\ b,\ \cdots\cdots,\ g \geqq 0$$

の整数解の個数と一致する。これから，1つの箱に3個のボールが入るときを除けばよい。

$${}_7H_3-7={}_9C_3-7=84-7=77 \text{ 通り}$$

[16] (1) 箱A，B，Cに入る赤い玉の個数をそれぞれ a, b, c とすると

$$a+b+c=5 \quad a,\ b,\ c \geqq 0$$

この方程式の整数解の個数は

${}_3H_5={}_7C_5=21$ 通り　……(答)

(2) まず，赤い玉を入れて，次に白い玉を入れる。

${}_3H_5 \cdot {}_3H_2={}_7C_5 \cdot {}_4C_2=21 \cdot 6=126$ 通り　……(答)

[17] 12人を4人，4人の3組に分けるのは

$\dfrac{{}_{12}C_4 \cdot {}_8C_4}{3!}=5775$ 通り　……(答)

(特定な1人の仲間をみつけると考えて　${}_{11}C_3 \cdot {}_7C_3=5775$ 通り　としてもよい。)

Aの仲間，Bの仲間，残りはCの仲間と考えて

${}_9C_3 \cdot {}_6C_3=84 \cdot 20=1680$ 通り　……(答)

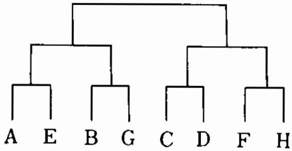
[18] (1) 8人を4人，4人に組分けすれば，4人のトーナメントの組合せは3通りできるから

$\dfrac{{}_8C_4}{2} \times 3 \cdot 3=35 \times 9=315$ 通り　……(答)

(2) A，B，C，……，Hの順に実力に差があるものとし，Cが実力第3位とする。Cが決勝戦に進出するためには，8人を4人，4人に組分

けするとき，A，Bの組にCが入らなければよい。そのように組分けするには，A，Bの仲間2人をD〜Hから選べばよいから

$${}_5C_2=10 \quad 通り$$



あとは，各ブロックの組合せを考えて

$$10\times3\cdot3=90 \quad 通り$$ ……(答)

[19] P，Qを通る道順の数をそれぞれ $n(\mathrm{P})$，$n(\mathrm{Q})$

PかつQ，PまたはQを通る道順の数をそれぞれ $n(\mathrm{P}\cap\mathrm{Q})$，$n(\mathrm{P}\cup\mathrm{Q})$ とすると

$$n(\mathrm{P})=\frac{2!}{1!\,1!}\times\frac{7!}{4!\,3!}=2\times35=70$$

$$n(\mathrm{Q})=\frac{6!}{3!\,3!}\times\frac{3!}{2!\,1!}=20\times3=60$$

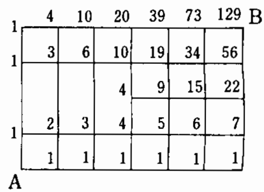
$$n(\mathrm{P}\cap\mathrm{Q})=\frac{2!}{1!\,1!}\times\frac{4!}{2!\,2!}\times\frac{3!}{2!\,1!}=2\times6\times3=36$$

よって，$n(\mathrm{P}\cup\mathrm{Q})=n(\mathrm{P})+n(\mathrm{Q})-n(\mathrm{P}\cap\mathrm{Q})$

$$=70+60-36=94 \quad 通り$$ ……(答)

[20] **【解1】** 右図のようにして，直接数え上げると

129　通り ……(答)



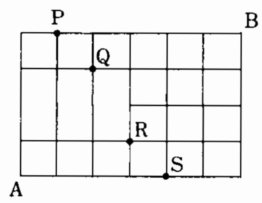
【解2】 右図のようにP，Q，R，Sの関所を設けると

$$n(\mathrm{P})+n(\mathrm{Q})+n(\mathrm{R})+n(\mathrm{S})$$

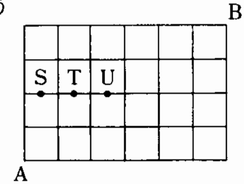
$$=\frac{4!}{1!\,3!}+\frac{4!}{2!\,2!}\times\frac{5!}{4!\,1!}$$

$$+\frac{4!}{3!\,1!}\times\frac{6!}{3!\,3!}+\frac{6!}{2!\,4!}$$

$$=4+30+80+15=129 \quad 通り$$ ……(答)



【解 3】 右図のように 3 つの道 S, T, U を補うと，A から B への行き方は



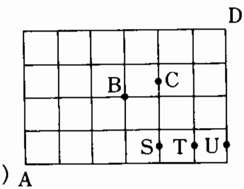
$\dfrac{10!}{6!\,4!}=210$　通り

このうち，S, T, U のどれかを通る行き方は

$$
\begin{aligned}
&n(\mathrm{S}\cup\mathrm{T}\cup\mathrm{U})\\
&=n(\mathrm{S})+n(\mathrm{T})+n(\mathrm{U})-n(\mathrm{S}\cap\mathrm{T})-n(\mathrm{T}\cap\mathrm{U})-n(\mathrm{S}\cap\mathrm{U})\\
&\qquad+n(\mathrm{S}\cap\mathrm{T}\cap\mathrm{U})\\
&=n(\mathrm{S})+n(\mathrm{T})+n(\mathrm{U})-n(\mathrm{S}\cap\mathrm{T})-n(\mathrm{T}\cap\mathrm{U})\\
&\qquad(\because\quad \mathrm{S}\cap\mathrm{T}\cap\mathrm{U}=\mathrm{S}\cap\mathrm{U})\\
&=\frac{7!}{5!\,2!}+\frac{3!}{1!\,2!}\cdot\frac{6!}{4!\,2!}+\frac{4!}{2!\,2!}\cdot\frac{5!}{3!\,2!}-\frac{6!}{4!\,2!}-\frac{3!}{1!\,2!}\cdot\frac{5!}{3!\,2!}\\
&=21+3\cdot15+6\cdot10-15-3\cdot10\\
&=81
\end{aligned}
$$

∴　210−81=129　通り　……(答)

[21] 上と同じ 3 つの解法が考えられるが，ここでは(解 3)で考えることにする。他の方法は各自考えてみよ。



(1)　右図のように 3 つの道 S, T, U を補う。

$$
\begin{aligned}
&\frac{10!}{6!\,4!}-\left(\frac{5!}{2!\,3!}+\frac{4!}{1!\,3!}+1\right)\\
&=210-(10+4+1)\\
&=195\quad\text{通り}
\end{aligned}
$$
……(答)

(2)　B を通る径路は　$\dfrac{5!}{3!\,2!}\cdot\dfrac{5!}{3!\,2!}=10\cdot10=100$　通り

∴　195−100=95　通り　……(答)

(3)　C を通る径路は，S を通る径路に注意すると

$\left(\dfrac{6!}{4!\,2!}-1\right)\cdot\dfrac{3!}{2!\,1!}=(15-1)\cdot3=42$　通り

∴　195−42=153　通り　……(答)

(4)　B かつ C を通る径路は　$\dfrac{5!}{3!\,2!}\cdot\dfrac{3!}{2!\,1!}=10\cdot3=30$　通り

$\therefore\quad n(\overline{\mathrm{B}}\cap\overline{\mathrm{C}})=n(\overline{\mathrm{B}\cup\mathrm{C}})=195-n(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})$

$$=195-\{n(\mathrm{B})+n(\mathrm{C})-n(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})\}$$

$$=195-(100+42-30)$$

$=83$　通り　　……(答)

[22]　$k\geqq 1$ のとき　$k{}_n\mathrm{C}_k=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$　であるから

$$\sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k kx^k y^{n-k}=\sum_{k=1}^{n} n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}x^k y^{n-k}$$

$$=nx\sum_{k=1}^{n}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}x^{k-1}y^{n-1-(k-1)}$$

$k-1=r$ とおくと

$$=nx\sum_{r=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_r x^r y^{n-1-r}$$

$$=nx(x+y)^{n-1}$$

別解　二項定理　$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k y^{n-k}$　を x で微分すると

$$n(x+y)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k kx^{k-1}y^{n-k}$$

両辺に x を掛けると

$$nx(x+y)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k kx^k y^{n-k}$$

[23]　$\left(x+y+\frac{1}{3xy}\right)^6=\left\{x+\left(y+\frac{1}{3xy}\right)\right\}^6$ の一般項は

$${}_6\mathrm{C}_r x^{6-r}\left(y+\frac{1}{3xy}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r x^{6-r}\sum_{k=0}^{r}{}_r\mathrm{C}_k y^{r-k}\left(\frac{1}{3xy}\right)^k$$

$$={}_6\mathrm{C}_r\sum_{k=0}^{r}\frac{{}_r\mathrm{C}_k}{3^k}x^{6-r-k}y^{r-2k}$$

$0\leqq k\leqq r\leqq 6$ において

$$\begin{cases}6-r-k=0\\ r-2k=0\end{cases}$$ となるのは　$r=4,\ k=2$

求める値は

${}_6\mathrm{C}_4\cdot\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{3^2}=15\cdot\frac{6}{3^2}=10$　　……(答)

別解　多項定理を使うと

$$\left(x+y+\frac{1}{3xy}\right)^6=\sum_{p+q+r=6}\frac{6!}{p!\,q!\,r!}x^p\cdot y^q\left(\frac{1}{3xy}\right)^r$$

$$=\sum_{p+q+r=6}\frac{6!}{p!\,q!\,r!}\frac{1}{3^r}x^{p-r}y^{q-r}$$

$p+q+r=6$ において

$$\begin{cases} p-r=0 \\ q-r=0 \end{cases}$$ となるのは　$p=q=r=2$

求める値は　$\dfrac{6!}{2!\,2!\,2!}\cdot\dfrac{1}{3^2}=10$

[24]　(1)　$(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_rx^r$　を x で微分すると

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{r=1}^{n}r{}_n\mathrm{C}_rx^{r-1}$$

さらに，両辺を x で微分して

$$n(n-1)(1+x)^{n-2}=\sum_{r=2}^{n}r(r-1){}_n\mathrm{C}_rx^{r-2}$$

$x=1$ とおくと

$$2\cdot1{}_n\mathrm{C}_2+3\cdot2{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+n(n-1){}_n\mathrm{C}_n$$
$$=n(n-1)2^{n-2}$$
……(答)

(2)　$$x^n(1+x)^n=x^n\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_rx^r=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_rx^{n+r}$$

両辺を x で微分すると

$$\{(x+x^2)^n\}'=n(x+x^2)^{n-1}(1+2x)$$
$$=\sum_{r=0}^{n}(n+r){}_n\mathrm{C}_rx^{n+r-1}$$

$x=1$ とおくと

$$n{}_n\mathrm{C}_0+(n+1){}_n\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+2n{}_n\mathrm{C}_n=3n\cdot2^{n-1}$$
……(答)

[25]　$(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_rx^r$　を $[0,\ 1]$ で積分すると

$$\int_0^1(1+x)^ndx=\left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

$$\int_0^1 \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r x^r dx = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r \int_0^1 x^r dx$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r \left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_0^1 = \sum_{r=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_r}{r+1}$$

$$\therefore\quad \frac{{}_n\mathrm{C}_0}{1} + \frac{{}_n\mathrm{C}_1}{2} + \frac{{}_n\mathrm{C}_2}{3} + \cdots\cdots + \frac{{}_n\mathrm{C}_n}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$ ……(答)

[26]　$31^n = (30+1)^n$

$$= {}_n\mathrm{C}_n 30^n + {}_n\mathrm{C}_{n-1} 30^{n-1} + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_2 30^2 + {}_n\mathrm{C}_1 30 + {}_n\mathrm{C}_0$$

$$= 900({}_n\mathrm{C}_n 30^{n-2} + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_2) + 30n + 1$$

n は自然数ゆえ

$30n+1 = 31,\ 61,\ 91,\ \cdots\cdots,\ 871,\ 901,\ 931,\ \cdots\cdots$

であり，31^n を 900 で割った最大の余りは 871

この余りを得るための最小の n は　29　である。 ……(答)

[27]　3 球が同じ色である確率は

$$\frac{{}_7\mathrm{C}_3 + {}_5\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3} = \frac{35+10}{220} = \frac{9}{44}$$ ……(答)

また，少なくとも 1 球が白である確率は，「3 球とも黒球である」の余事象と考えて

$$1 - \frac{{}_7\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3} = 1 - \frac{35}{220} = 1 - \frac{7}{44} = \frac{37}{44}$$ ……(答)

[28]　(1)　3 個のうち 2 個の色が一致するのは

一致する色の選び方　${}_4\mathrm{C}_1$　通り

選ばれた色の 4 個からどの 2 個を選ぶかは　${}_4\mathrm{C}_2$　通り

他の 1 個は残り 12 個のうちから 1 つを選ぶから　${}_{12}\mathrm{C}_1$　通り

求める確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_{12}\mathrm{C}_1}{{}_{16}\mathrm{C}_3} = \frac{288}{560} = \frac{18}{35}$$ ……(答)

(2)　4 個のうち 3 種類の色が現れるのは，2 個，1 個，1 個の色分けとなるときで

2個となる色の選び方　${}_4C_1$ 通り

その色の4個からどの2個を通ぶかは　${}_4C_2$　通り

残り2球は，3色のうちの2色を選び　${}_3C_2$　通り

その色から1球ずつ選べばよい　${}_4C_1 \cdot {}_4C_1$　通り

求める確率は　$\dfrac{{}_4C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_4C_1}{{}_{16}C_4} = \dfrac{288}{455}$　……(答)

[29] (1)　$P(\mathrm{A}) = 1 - P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$　……(答)

$P(\mathrm{B}) = 1 - P(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$　……(答)

$C = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \{$3または5の目だけが出る$\}$　ゆえ

$P(C) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$　……(答)

(2)　$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 1 - P(\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}) = 1 - P(C)$

$= 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$　……(答)

(3)　$P(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) - P(\mathrm{B})$

$= \left\{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\} - \left\{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$　………(答)

(4)　$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) - P(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})$

$= \left\{1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n\right\} - \left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

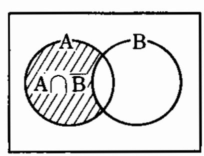
$= 1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$　……(答)

(注)　$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ を計算してもよい。

[30]　$P(\mathrm{A} \mid \overline{\mathrm{B}}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})}{P(\overline{\mathrm{B}})}$

$= \dfrac{P(\mathrm{A}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{1 - P(\mathrm{B})}$

$= \dfrac{0.3 - 0.1}{0.4} = 0.5$　……(答)



別 解 右のカルノー図より

	B	$\overline{\mathrm{B}}$	
A	0.1	y	0.3
$\overline{\mathrm{A}}$	z	u	
	0.6		

$y=0.2$, $u=0.2$, $(z=0.5)$

$$P(\mathrm{A}\,|\,\overline{\mathrm{B}})=\frac{y}{y+u}$$

$$=\frac{0.2}{0.2+0.2}=0.5 \qquad \cdots\cdots(答)$$

[31] 1枚のカードを取り出して色を見るとき，どのカードのどの面かを区別すると根元事象の個数は

カード	A	B	C	D
表	赤	赤	白	赤
裏	赤	赤	白	白

$4\times2=8$ (個)

1枚取り出したときの色が赤である事象をR，裏が白である事象をWとすると

$$P(\mathrm{R})=\frac{5}{8},\quad P(\mathrm{R}\cap\mathrm{W})=\frac{1}{8}$$

$$\therefore\quad P_{\mathrm{R}}(\mathrm{W})=\frac{P(\mathrm{R}\cap\mathrm{W})}{P(\mathrm{R})}=\frac{1}{8}\div\frac{5}{8}=\frac{1}{5} \qquad \cdots\cdots(答)$$

[32] 条件より

$$P(\overline{\mathrm{A}}\cup\overline{\mathrm{B}})=P(\overline{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}})=1-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{3}{4}$$

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\quad P(\mathrm{A})=3P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=3\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4} \qquad \cdots\cdots(答)$$

AとBが独立ゆえ，$P(\mathrm{B})=P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\dfrac{1}{3}$

$$\therefore\quad P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{6} \qquad \cdots\cdots(答)$$

[33] (1) 1等の引き方は1本目，2本目，3本目の3通りがあり

$$\frac{1}{10}\times3=\frac{3}{10} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) $\qquad \dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{6}{8}\times 3=\dfrac{21}{40}$ ……（答）

(3) 1等，2等，はずれの引き方は 3! 通りがある

$$\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8}\times 3!=\frac{7}{60} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(4) $\qquad \dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{6}{9}\cdot\dfrac{5}{8}=\dfrac{7}{24}$ ……（答）

別 解 3本のくじを同時に引くと考えると，確率の定義から

(1) $\dfrac{{}_1C_1\cdot{}_9C_2}{{}_{10}C_3}$ (2) $\dfrac{{}_3C_1\cdot{}_7C_2}{{}_{10}C_3}$ (3) $\dfrac{{}_1C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_7C_1}{{}_{10}C_3}$ (4) $\dfrac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3}$

[34] (i) n 回のあとも 2 球であるとは，球が 1 つも増えない状態であり，n 回とも白球のときである。

$$p_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(ii) n 回のあと球が $n+2$ 個になるのは，毎回赤球が出たときであり，

$$q_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(iii) n 回のあと球が 3 個となるのは，1 回だけ赤球が出たときであり，

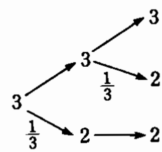
$$k\text{ 回目に赤球が出る確率}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}=\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{3}{2}\right)^k$$

$$\therefore \quad r_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{3}{2}\right)^k=\left(\frac{1}{3}\right)^n\frac{\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}$$

$$=3\left(\frac{1}{3}\right)^n\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right\}=3\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

[35] (1) “だれ”が“どの手”で負けるかを考えて

$$\frac{3\cdot 3}{3^3}=\frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$



(2) 3人でジャンケンをして，あいこになるのは“3人とも同じ手”をだすか“3人とも違う手”をだすかのどちらかであるから

$$\frac{3+3!}{3^3}=\frac{3+6}{3^3}=\frac{1}{3}$$

2人でジャンケンをして，あいこになるのは“2人が同じ手”をだすときであり

$$\frac{3}{3^2}=\frac{1}{3}$$

よって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$$ ……(答)

(3) n 回ジャンケンを続けても，勝者が1人に決まらないのは

(ア) n 回ともあいこになる $\left(\frac{1}{3}\right)^n$

(イ) $k-1$ 回まではあいこで，k 回目に2人が勝ち，残り $n-k$ 回は2人であいこを続ける。$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ の各場合は排反であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n=n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

求める確率は

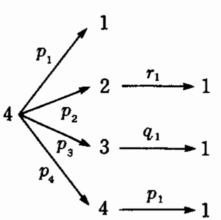
$$\left(\frac{1}{3}\right)^n+n\left(\frac{1}{3}\right)^n=(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$ ……(答)

[36] (1) “だれ”が“どの手”で勝つかを考えて

$$p_1=\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_1}{3^4}=\frac{4}{27},\quad p_2=\frac{{}_4C_2\cdot{}_3C_1}{3^4}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$$

$$p_3=\frac{{}_4C_3\cdot{}_3C_1}{3^4}=\frac{4}{27},\quad p_4=1-(p_1+p_2+p_3)=\frac{13}{27}$$ ……(答)

(2) 3人でジャンケンして1人勝つ確率を q_1，2人でジャンケンをして1人勝つ確率を r_1 とすると



$$q_1=\frac{{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{3^3}=\frac{1}{3}$$

$$r_1=\frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{3^2}=\frac{2}{3}$$

よって，2 回でこのゲームが終了する確率 q は

$$q=p_2\cdot r_1+p_3\cdot q_1+p_4\cdot p_1$$

$$=\frac{6}{27}\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{27}\cdot\frac{1}{3}+\frac{13}{27}\cdot\frac{4}{27}=\frac{196}{729}$$ ……(答)

[37]　(1)　A チームが優勝するのは右の 3 通りがあるから，求める確率は

○ ○ ┆ ○
○ ○ ┆ × ○
○ ○ ┆ × × ○

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$$ ……(答)

(2)　A チームが優勝するのは(1)の他に右の 3 通りが加わる。第 2 回戦以後の試合回数を数えると

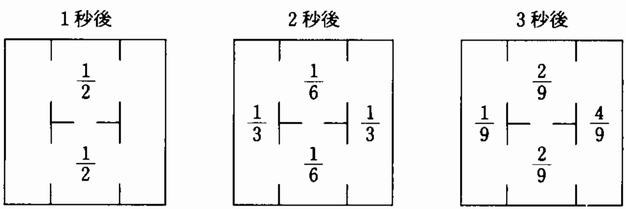
○ × ○ ○
○ × ○ × ○
○ × × ○ ○

2 回戦う………1 通り
3 回戦う………2 通り
4 回戦う………3 通り

であるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2+\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 3=\frac{11}{16}$$ ……(答)

[38]　(1)　$n\,(=1,\ 2,\ 3)$ 秒後に各部屋にいる確率は次のとおりである。



よって，3 秒後に D にいない確率は　$1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$ ……(答)

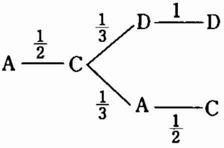
(2)　4 秒後に D にいる確率は

$$\left(\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}\right)\times 2+\frac{4}{9}\cdot 1=\frac{16}{27}$$ ……(答)

(3)　3 秒後までに少なくとも 1 回は B にいるという事象を B，4 秒後に D にいるという事象を D とすると

$$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{D})=\frac{P(\mathrm{B}\cap\mathrm{D})}{\mathrm{P(B)}}=\frac{P(\mathrm{D})-P(\overline{\mathrm{B}}\cap\mathrm{D})}{1-P(\overline{\mathrm{B}})}$$

3秒後までに1回もBにいかないのは，右図のように動くときであるから



$$P(\overline{\mathrm{B}})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P(\overline{\mathrm{B}}\cap\mathrm{D})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot1\cdot1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{36}$$

$$\therefore\quad P_{\mathrm{B}}(\mathrm{D})=\frac{\dfrac{16}{27}-\dfrac{7}{36}}{1-\dfrac{1}{4}}=\frac{43}{81}\qquad\cdots\cdots(答)$$

[39] 硬貨を投げて表が出るという事象をA，3人とも「表が出た」と証言する事象をBとすると

$$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}=\frac{P(\mathrm{A})P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})+P(\overline{\mathrm{A}})P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^3}{\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^3+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}\right)^3}$$

$$=\frac{4^3}{4^3+1}=\frac{64}{65}\qquad\cdots\cdots(答)$$

[40] $2\cdot x+1\cdot y=7$ となる $(x,\ y)$ を求めると

$$(x,\ y)=(0,\ 7),\ (1,\ 5),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1)$$

x，y は奇数の目，偶数の目の回数をそれぞれ表している。
これらは互いに排反であり，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_6\mathrm{C}_1\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2^7}+6\cdot\frac{1}{2^6}+10\cdot\frac{1}{2^5}+4\cdot\frac{1}{2^4}$$

$$=\frac{1+12+40+32}{2^7}=\frac{85}{128}\qquad\cdots\cdots(答)$$

[41] (1)　$X_n = {}_9C_n p^n (1-p)^{9-n}$ であるから，$p=\dfrac{1}{3}$ のとき

$$与式 = 1-(X_0+X_1) = 1-\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^9 + 9\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^8\right\}$$

$$= 1-\frac{11}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^8 \quad \left(=\frac{16867}{19683}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2)　$X_4 < X_5 + X_6$ より

$${}_9C_4 p^4 (1-p)^5 < {}_9C_5 p^5 (1-p)^4 + {}_9C_6 p^6 (1-p)^3$$

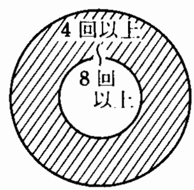
$p^4(1-p)^3$ で割って

$${}_9C_4 (1-p)^2 - {}_9C_5 p(1-p) - {}_9C_6 p^2 < 0$$

整理して　　$4p^2 - 9p + 3 < 0$

$0<p<1$ に注意して解くと　　$\dfrac{9-\sqrt{33}}{8} < p < 1$　　$\cdots\cdots$(答)

(3)　Aが1回目から連続4回以上起こる確率は，5回目以降は，Aが起こっても起こらなくてもよいわけだから



$$p^4 \cdot 1^5 = p^4$$

同じく，1回目から連続して8回以上起こる確率は　　p^8

$$\therefore \quad Q = p^4 - p^8 = p^4(1-p^4) \qquad \cdots\cdots(答)$$

[42] (1)　$(0.5)^4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}$　　$\cdots\cdots$(答)

(2)　最初の5試合は3勝2引分けで，6試合目に勝って優勝となる場合であるから，求める確率は

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\triangle\triangle}\bigcirc$$

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{160} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3)　条件に適するのは右の4通りがある。求める確率は

$$\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$$
$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\times}\bigcirc$$
$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\times\times}\bigcirc$$
$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\times\times\times}\bigcirc$$

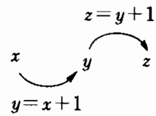
$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)$$
$$+ {}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^2 + {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^3$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^4\left\{1+4\cdot\frac{2}{5}+10\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2+20\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3\right\}$$

$$=\frac{137}{400} \qquad \cdots\cdots(答)$$

[43] (1) $P(\mathrm{E})$

$$=P(y=x+1)+P(z=y+1)$$
$$-P(y=x+1 \text{ かつ } z=y+1)$$
$$=\frac{5}{6^2}+\frac{5}{6^2}-\frac{4}{6^3}=\frac{7}{27} \qquad \cdots\cdots(答)$$



(2) $P_n={}_{26}\mathrm{C}_n\left(\frac{7}{27}\right)^n\left(\frac{20}{27}\right)^{26-n}$ であるから

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{{}_{26}\mathrm{C}_{n+1}}{{}_{26}\mathrm{C}_n}\cdot\left(\frac{7}{27}\right)\cdot\left(\frac{20}{27}\right)^{-1}=\frac{26-n}{n+1}\cdot\frac{7}{20}$$

$P_{n+1}\geqq P_n$ となるのは $\frac{26-n}{n+1}\cdot\frac{7}{20}\geqq 1 \quad \therefore \quad n\leqq 6$

$$P_1<P_2<\cdots\cdots<P_5<P_6=P_7, \qquad P_7>P_8>\cdots\cdots$$

よって，P_n を最大にする n は　6 と 7　……(答)

[44] 赤球の個数を r 個とすると

$$P(\mathrm{A})={}_2\mathrm{C}_1\frac{r}{n}\cdot\frac{n-r}{n}+{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{r}{n}\right)^2$$
$$=\frac{2r(n-r)+r^2}{n^2}$$
$$=\frac{r(2n-r)}{n^2}$$

$$P(\mathrm{B})={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{r}{n}\right)^2\left(\frac{n-r}{n}\right)^2+{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{r}{n}\right)^3\frac{n-r}{n}+{}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{r}{n}\right)^4$$
$$=\frac{r^2(6n^2-8nr+3r^2)}{n^4}$$

$$\therefore \quad P(\mathrm{A})-P(\mathrm{B})=\frac{r}{n^4}(2n^3-7n^2r+8nr^2-3r^3)$$

$$=\frac{r}{n^4}(n-r)^2(2n-3r)$$

したがって

$$
\begin{cases}
r=0,\ \ n,\ \ \dfrac{2}{3}n\ \text{のとき} & P(\mathrm{A})=P(\mathrm{B}) \\
0<r<\dfrac{2}{3}n\ \text{のとき} & P(\mathrm{A})>\mathrm{P}(\mathrm{B}) \\
\dfrac{2}{3}n<r<n\ \text{のとき} & P(\mathrm{A})<P(\mathrm{B})
\end{cases}
$$
……(答)

[45] サイコロの目の和が4となるのは3通り，7となるのは6通りあるから，A君が得点2を得る確率は

$$\frac{3+6}{6^2}=\frac{1}{4}$$

したがって，Bが得点1を得る確率は　$1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

Bが勝者となる確率は

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4+{}_4C_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^4(1+1)=\frac{81}{128}>\frac{1}{2}$$

B君の方が有利である。　……(答)

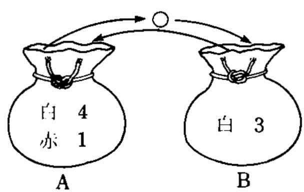
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

○　○　○　○

$\underbrace{○\ ○\ ○\ ×}$　○

[46] (1) Aから取り出した玉が赤か白かで場合分けして

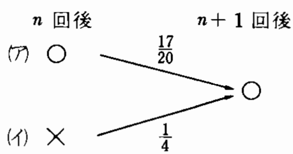
$$p_1=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\cdot1=\frac{17}{20}\quad(答)$$



(2) $n+1$ 回後に赤玉がAにあるのは

(ア) n 回後に赤玉がAにあり，$n+1$ 回後もAにある。

(イ) n 回後には赤玉はBにあり，$n+1$ 回後にAにある。



の2タイプあり，これらは排反。

$$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{17}{20}+(1-p_n)\cdot\frac{1}{4}$$

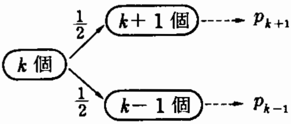
$$\therefore\quad p_{n+1}=\frac{3}{5}p_n+\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3)　$$p_{n+1}-\frac{5}{8}=\frac{3}{5}\left(p_n-\frac{5}{8}\right)$$

$p_0=1$ より　$p_n-\frac{5}{8}=\left(p_0-\frac{5}{8}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n=\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n$

$$\therefore\quad p_n=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n \qquad \cdots\cdots(答)$$

[47]　(1)　最初 k 個のコインを持っていた人がこのゲームに勝つのは



(ア)　1回目のじゃんけんで勝って，コインが $k+1$ 個となり，最後に勝つ。

(イ)　1回目のじゃんけんで負けて，コインが $k-1$ 個となり，最後に勝つ

の2つのタイプがある。これらは排反であるから

$$p_k=\frac{1}{2}p_{k+1}+\frac{1}{2}p_{k-1}\quad(0<k<n) \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2)　$n=3$ より，$p_0=0$，$p_3=1$　(1)より

$$\begin{cases} p_1=\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{2}p_0 \\ p_2=\frac{1}{2}p_3+\frac{1}{2}p_1 \end{cases} \quad\therefore\quad \begin{cases} p_1=\frac{1}{2}p_2 \\ p_2=\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{2} \end{cases}$$

これを解いて，$p_1=\frac{1}{3}$，$p_2=\frac{2}{3}$　$\cdots\cdots$(答)

(3)　$t=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$　より　$t=1$ (重解)。(1)の漸化式を変形して

$$p_{k+1}-p_k=p_k-p_{k-1}\qquad(0<k<n)$$

数列 $\{p_{k+1}-p_k\}$ は公比1，初項 $p_1-p_0=p_1$ の等比数列ゆえ

$$p_{k+1}-p_k=p_1 \qquad (0\leqq k<n)$$

これより数列 $\{p_k\}$ は公差 p_1，初項 $p_0=0$ の等差数列である。

$$p_k=kp_1 \qquad (0\leqq k\leqq n)$$

ここで，$p_n=np_1=1$ ゆえ　$p_1=\dfrac{1}{n}$

$$\therefore \quad p_k=\frac{k}{n} \quad (0\leqq k\leqq n)$$ ……(答)

[48] (1)　AA，ACBAA，BCAA，BCABCAA　……(答)

(2)　第 1 回戦は A，B のいずれが勝ってもよいが，第 2 回戦以降は前回の勝者が負けなければいけないから

$$1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$ ……(答)

(3)　C が優勝するのは

ACC	BCC
(ACB)ACC	(BCA)BCC
(ACB)(ACB)ACC	(BCA)(BCA)BCC
⋮	⋮

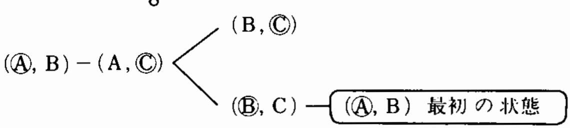
の 2 タイプがある。優勝が決まるのは第 $3k$ 回戦であり

$$\underbrace{\text{(ACB)(ACB)}\cdots\cdots\text{(ACB)}}_{3(k-1)\,戦}\ \text{ACC}\ \underbrace{\square\,\square}_{誰が勝ってもよい}$$

$$p_{3k}=p_{3k+1}=p_{3k+2}=2\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{8}\right)^{j-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{8}\right)^{j-1}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{8}}=\frac{2}{7}$$ ……(答)

別　解



最初に A が勝って，C が優勝する確率を p_A とすると

$$p_A=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot p_A\right) \qquad \therefore \quad p_A=\frac{1}{7}$$

最初にBが勝て，Cが優勝する確率 p_B も同じく，$p_B=\dfrac{1}{7}$

　したがって，Cが優勝する確率は　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n=p_A+p_B=\frac{2}{7}$　……(答)

[49]　(1)　$X-5=-4,\ -3,\ \cdots\cdots,\ 9,\ 10$ であり，$Y=|X-5|$ について，$1\leqq Y\leqq 4$ となる X の値は2通り，それ以外の Y に対しては X の値は1通りである。Y の確率分布は

Y	0	1 …… 4	5 …… 10
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

……(答)

(2)　$E(Y)=0\cdot\dfrac{1}{15}+(1+2+3+4)\cdot\dfrac{2}{15}+(5+\cdots\cdots+10)\cdot\dfrac{1}{15}$

$=\dfrac{13}{3}$　……(答)

[50]　(1)　A，Bが表を出す枚数をそれぞれ $x(\mathrm{A})$，$x(\mathrm{B})$ とし，その確率を表に表すと

$x(\mathrm{A})$	0	1	2	3	4
${}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$x(\mathrm{B})$	0	1	2	3
${}_3\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Aが勝つ確率は

$$\frac{4}{16}\cdot\frac{1}{8}+\frac{6}{16}\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\right)+\frac{4}{16}\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\right)+\frac{1}{16}\cdot 1$$

$=\dfrac{1+6+7+2}{32}=\dfrac{1}{2}$　……(答)

Bが勝つ確率は

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{16}+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{16}+\frac{4}{16}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}\right)$$

$=\dfrac{3+15+11}{8\cdot 16}=\dfrac{29}{128}$　……(答)

引き分けとなる確率は

$1-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{29}{128}\right)=\dfrac{35}{128}$　……(答)

(2) Aの期待金額は

$$150\cdot\frac{1}{2}-400\cdot\frac{29}{128}+0\cdot\frac{35}{128}=50\left(\frac{3}{2}-\frac{29}{16}\right)<0$$

したがって，Bの方が有利である。 ……(答)

[51] $P(X=0)=\frac{{}_4C_4}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{210}$

$P(X=1)=\frac{{}_6C_1\cdot{}_4C_3}{{}_{10}C_4}=\frac{24}{210}$

$P(X=2)=\frac{{}_6C_2\cdot{}_4C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{90}{210}$

$P(X=3)=\frac{{}_6C_3\cdot{}_4C_1}{{}_{10}C_4}=\frac{80}{210}$

$P(X=4)=\frac{{}_6C_4}{{}_{10}C_4}=\frac{15}{210}$

期待値 $E(X)=\frac{1}{210}(0\cdot1+1\cdot24+2\cdot90+3\cdot80+4\cdot15)$

$=\frac{504}{210}=\frac{12}{5}$ ……(答)

$E(X^2)=\frac{1}{210}(0^2\cdot1+1^2\cdot24+2^2\cdot90+3^2\cdot80+4^2\cdot15)$

$=\frac{1344}{210}=\frac{32}{5}$

∴ 分散 $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{32}{5}-\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$ ……(答)

[52] Yの確率分布表は

$Y=k$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P(Y=k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

したがって

$E(Y)=\frac{1}{10}(-3\cdot1-2\cdot1-1\cdot2+0\cdot2+1\cdot2+2\cdot1+3\cdot1)$

$=0$ ……(答)

$$E(Y^2)=\frac{1}{10}((3^2\cdot1+2^2\cdot1+1^2\cdot2)\times2+0\cdot2)=3$$

$\therefore\quad V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=3-0^2=3$ ……(答)

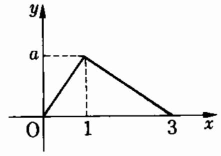
$X=5Y+30$ より

$E(X)=5E(Y)+30=5\cdot0+30=30$ ……(答)

$V(X)=5^2V(Y)=25\cdot3=75$ ……(答)

[53] (1) 右図の面積を考えると，

"確率の総和 $=1$" より



$\frac{1}{2}\cdot3\cdot a=1 \qquad \therefore\quad a=\frac{2}{3}$ ……(答)

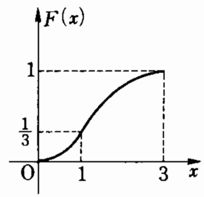
(2) $0\leqq x\leqq1$ のとき，$F(x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{2}{3}x=\frac{x^2}{3}$

$1\leqq x\leqq3$ のとき，$F(x)=$  $+$  $=\frac{1}{3}+\int_1^x\left(-\frac{x}{3}+1\right)dx$

$$=\frac{1}{3}+\left[-\frac{x^2}{6}+x\right]_1^x$$

$$=-\frac{x^2}{6}+x-\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1}{6}(x-3)^2+1$$



$F(x)$ のグラフは右のようになる。

参考 $F(x)$ を確率変数Xの**分布関数**という。

[54] (1) $\int_0^a f(x)dx=b\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=1$ より

$a^2b(6-a)=3$ ……①

平均値 $\int_0^a xf(x)dx=b\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^a=\frac{a}{2}$ より

$a^2b(16-3a)=6$ ……②

①，②より $2(6-a)=16-3a$

$\therefore\quad a=4,\ b=\frac{3}{32}$ ……(答)

(2) 方程式 $4t^2-12t+9(X-1)=0$ の 2 解 α，β がともに正である条

件は

$$\begin{cases} 判別式 \geqq 0 \\ \alpha+\beta>0 \\ \alpha\beta>0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} 6^2-4\cdot 9(X-1)\geqq 0 \\ 3(>0) \\ \dfrac{9}{4}(X-1)>0 \end{cases}$$

以上，まとめると　$1<X\leqq 2$

$$\therefore \quad P(1<x\leqq 2)=\int_1^2 f(x)dx=\frac{3}{32}\int_1^2(4-x)xdx$$

$$=\frac{3}{32}\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{11}{32} \qquad \cdots\cdots(答)$$

[55]　1の目が出る回数Xは二項分布 $B\left(180,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従うから

期待値　$E(X)=np=180\cdot\dfrac{1}{6}=30$

分散　$V(X)=npq=180\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}=25$

よって，求める値は　$\dfrac{40-E(X)}{\sqrt{V(X)}}=\dfrac{40-30}{\sqrt{25}}=2$ 　……(答)

[56]　平均値 $E(X)=np=6$，分散 $V(X)=npq=2$

また，$p+q=1$ より　$n=9$，$p=\dfrac{2}{3}$，$q=\dfrac{1}{3}$

よって，$P_k={}_9C_k\left(\dfrac{2}{3}\right)^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{9-k}$　($k=0$，1，2，……，9)

$$\therefore \quad \frac{P_4}{P_3}=\frac{{}_9C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^5}{{}_9C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^6}=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\cdot 3=3 \qquad \cdots\cdots(答)$$

[57]　(1)　題意より

$$\begin{cases} np(1-p)=\dfrac{8}{9} \\ np^{n-1}(1-p)=8p^n \end{cases} \quad 解いて \quad p=\frac{1}{3},\ n=4$$

よって，二項分布 $B\left(4,\ \frac{1}{3}\right)$ の式は

$$P(X=r)={}_4C_r\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^{4-r} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2)　平均値 $m=np=4\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$，標準偏差 $\sigma=\sqrt{npq}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\left|X-\frac{4}{3}\right|>\frac{2\sqrt{3}}{3}$　より　$X<\frac{4}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$X>\frac{4}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}$　をみたす

$X(0\leqq X\leqq 4)$ は $X=0,\ 3,\ 4$

$$P(|X-m|>\sigma)=P(X=0,\ 3,\ 4)$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^4+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{25}{81} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3)　$E(X^2-3X+2)=E(X^2)-3E(X)+2$

$$=(\sigma^2+m^2)-3m+2$$

$$=\left\{\frac{8}{9}+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right\}-3\cdot\frac{4}{3}+2=\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots(答)$$

[58]　Bの平均 $\bar{x}$，標準偏差 σ は

$$\bar{x}=\frac{107.00}{20}=5.35,\quad \sigma=\sqrt{\frac{572.90}{20}-(5.35)^2}=0.15$$

Bの跳ぶ距離をXとすると $Z=\frac{X-5.35}{0.15}$ は $N(0,\ 1)$ に従う。

AがBに勝つ確率は

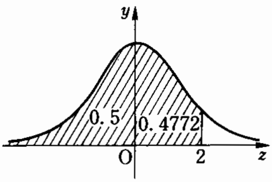
$$P(X<5.65)$$

$$=P\left(Z<\frac{5.65-5.35}{0.15}\right)$$

$$=P(Z<2)$$

$$=0.5+0.4772$$

$$=0.9772 \qquad \cdots\cdots(答)$$



[59]　製品の長さをXとすると，Xは $N(69,\ 0.4^2)$ に従う。

$Z=\frac{X-69}{0.4}$ とおくと，Zは $N(0,\ 1)$ に従うから，不良品である確率は

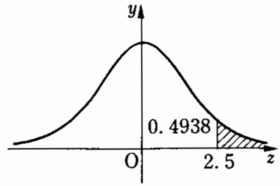
$P(X \geqq 70)$

$= P\left(Z \geqq \dfrac{70-69}{0.4}\right)$

$= P(Z \geqq 2.5)$

$= 0.5 - 0.4938$

$= 0.0062$



よって，1万個のうちの不良品は約　62　個　……(答)

[60] (1)　10個の卵の総重量は

$(50\times 2)+(55+56+54+55)+(60\times 4)=560$ g

平均は　56 g　……(答)

また，卵は重さの順に A，B，C と入っているから，中央値は

$\dfrac{55+56}{2}=55.5$ g　……(答)

(2)　$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}-\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{24306}{3}-\left(\dfrac{270}{3}\right)^2}=\sqrt{2}$　……(答)

(3)　A，C の卵の重さの平方の和を A，C とすると

$1^2=\dfrac{A}{2}-50^2$,　　$2^2=\dfrac{C}{4}-60^2$

$\therefore\ \sqrt{\dfrac{A+C+55^2+56^2+54^2+55^2}{10}-56^2}$

$=\sqrt{3152-3136}=4$　……(答)

[61]　$\sigma(\bar{X})=\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq\dfrac{1}{40}$

$\sqrt{n}\geqq 40\cdot\sigma=40\cdot\dfrac{1}{2}=20$　　$\therefore\ n\geqq 400$

求める n の最小値は 400　……(答)

[62] (1)　x は $N(50,\ 3^2)$ に従う。$z=\dfrac{x-50}{3}$ と置くと

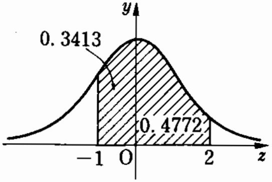
$P(47\leqq x\leqq 56)$

$=P\left(\dfrac{47-50}{3}\leqq z\leqq\dfrac{56-50}{3}\right)$

$=P(-1\leqq z\leqq 2)=0.3413+0.4772$

$=0.8185$ $\quad\therefore\quad 81.85\ \%$

……(答)

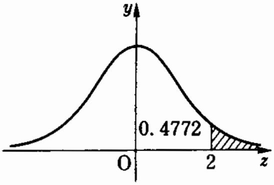


(2) $\bar{x}$ は $N\left(50,\ \dfrac{3^2}{4}\right)$ に従うとしてよいから，$\bar{z}=\dfrac{\bar{x}-50}{\frac{3}{2}}$ とおくと

$P(\bar{x}\geqq 53)=P\left(\bar{z}\geqq\dfrac{2}{3}(53-50)\right)$

$=P(\bar{z}\geqq 2)=0.5-0.4772$

$=0.0228$ ……(答)



[63] 身長の平均値 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{5\cdot 8^2}{n}\right)$ に従うから，m の 95 %信頼区間は $\quad\bar{X}-1.96\dfrac{5.8}{\sqrt{n}}<m<\bar{X}+1.96\dfrac{5.8}{\sqrt{n}}$

信頼区間の長さを 2 cm 以下にするためには

$$2\times 1.96\frac{5.8}{\sqrt{n}}\leqq 2$$

$$n\geqq(1.96\times 5.8)^2=11.368^2=129.23\cdots$$

したがって，130 人以上調査する必要がある。 ……(答)

[64] n が十分大きいとき，母比率 p の 95 %信頼区間は

$$\bar{p}-1.96\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}<p<\bar{p}+1.96\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

なので，この幅を考えると

$$2\times 1.96\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\leqq 0.02$$

であればよい。$\bar{p}$ は与えられていないが 0.2 で代用して

$$n\geqq 196^2\times 0.2\times 0.8=6146.56$$

したがって，6147 粒以上を選び出せばよい ……(答)

正規分布表

t	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49597	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49722	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49855	0.49860
3.0	0.49865	0.49869	0.49873	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49897	0.49900