第1章　場合の数

I. 場合の数

基礎問 1. ▶ベン図の活用◀

1 から 1000 までの自然数全体の集合をUとする。集合Uにおいて，6 で割り切れる数全体の集合をA，8 で割り切れる数全体の集合をB，12 で割り切れる数全体の集合をCとする。このとき，集合 $A\cap B$ の要素の個数は $\boxed{\text{(ア)}}$ である。

また，$(\overline{A\cup B})\cap(\overline{A\cup C})$ の要素の個数は $\boxed{\text{(イ)}}$ である。

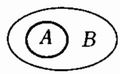
（福岡大）

精講

1° まず集合の言葉を復習しておこう。

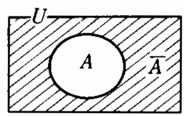
$\boldsymbol{a\in A}$…aはAの**要素**(元)である。

$\boldsymbol{A\subset B}$…AはBに含まれる。



これは $A=B$ の場合も含んでいる。

$\boldsymbol{\overline{A}}$…$A$ の補集合。Uを全体集合とするとき，Uの要素でAに属さない要素の集合をAの**補集合**という。



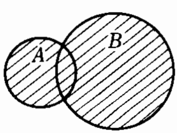
$$\boldsymbol{\overline{\overline{A}}=A,\quad \overline{U}=\phi}\ \text{（空集合という）}$$

2 つの集合の演算としては，次のようなものがある。

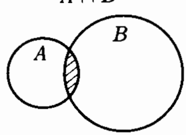
$\boldsymbol{A\cup B}$…AとBとの**和集合**(合併集合，結び)。AまたはBに属する要素の集合である。

$\boldsymbol{A\cap B}$…AとBとの**共通部分**(積集合，交わり)。AかつBに属する要素の集合である。

$A\cup B$



$A\cap B$



交換法則　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

結合法則　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

分配法則　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

ド・モルガンの法則

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

2°　集合Aの要素の個数を $n(A)$ で表すと

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

とくに，$A\cap B=\phi$ のとき

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

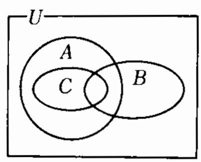
A，B，C 3つの集合になると

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$

解　答　$A=\{6$ の倍数$\}$

$B=\{8$ の倍数$\}$

$C=\{12$ の倍数$\}$



であるから

$A\cap B=\{24$ の倍数$\}$

1000 に一番近い 24 の倍数は

$984=24\times41$

よって　　$n(A\cap B)=41$　　……(答)　(ア)

また　$(\overline{A\cup B})\cap(\overline{A\cup C})=(\overline{A\cup B})\cap\overline{A}$　$(\because\ A\supset C)$

$=\overline{(A\cup B)\cup A}=\overline{A\cup B}$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=166+125-41=250$

よって，求める要素の個数は

$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$

$=1000-250=750$　　……(答)　(イ)

▶演習◀

[1]　300 以下の正の整数のうち 2，3，5 のいずれによっても割り切れないものの個数を求めよ。　　（日本大）

基礎問 2. ▶数え上げ・和の法則◀

1から20までの番号を記入したカードが1枚ずつ計20枚が箱の中に入れてある。この箱の中からカードを1枚ずつ，もとにもどさないで，2回とり出すことにする。1回目にとり出した番号を x，2回目にとり出した番号を y とするとき，$x<y$ となる場合は $\boxed{\text{(ア)}}$ 通りである。また，$2x<y$ となる場合は $\boxed{\text{(イ)}}$ 通りである。

(福岡大-理・工・薬)

精講

1° いろいろな事柄の起こり方の総数を**場合の数**という。数えるときの要領は，ただやみくもに数えてるのではなく，順序だてて　**モレなく，ダブリなく**

数えることが大切である。そのためには　**辞書式配列，樹形図**

などが利用される。

本問の $x<y$ の場合，$(x,\ y)$ を**辞書式にならべて**いくと

$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ \cdots\cdots,\ (1,\ 20)$　　19通り

$(x,\ y)=(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ \cdots\cdots,\ (2,\ 20)$　　18通り

…………

$(x,\ y)=(18,\ 19),\ (18,\ 20)$　　2通り

$(x,\ y)=(19,\ 20)$　　1通り

これより，求める場合の数は

$$19+18+17+\cdots\cdots+2+1=\frac{19(19+1)}{2}=190 \text{ 通り}$$

同様にして，$2x<y$ の場合も

$(x,\ y)=(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ \cdots\cdots,\ (1,\ 20)$　　18通り

…………

と数えていくと

$$18+16+14+\cdots\cdots+4+2=\frac{9(18+2)}{2}=90 \text{ 通り}$$

2° ここで計算した　$19+18+17+\cdots\cdots+2+1$　あるいは $18+16+14+\cdots\cdots+4+2$　は和の法則にしたがっている。

和の法則：2つの事柄A，Bが同時に起こらないとき，A，Bの起こり方がそれぞれ m，n 通りならば，A，Bいずれかが起こる場合の数は $\boldsymbol{m+n}$ **通り**である。

“A，Bが同時に起こらない”という仮定は重要である。基礎問1において，AまたはB，すなわち $A \cup B$ の要素の個数は

$$n(A)+n(B)$$

ではなかった。24の倍数というA，Bが同時に起こる場合があるから

$$n(A)+n(B)-n(A \cap B)$$

としなければならない。

解答 $x=k$ のとき，$x<y$ を満たす y は

$y=k+1,\ k+2,\ \cdots\cdots,\ 20$ の $(20-k)$ 通り

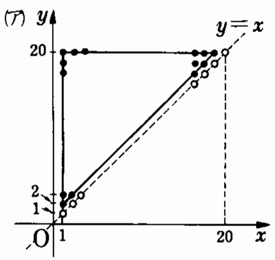
求める場合の数は

$$\sum_{k=1}^{19}(20-k)=\sum_{k=1}^{19}k=\frac{19(1+19)}{2}=190 \text{ 通り}$$ ……(答) (ア)

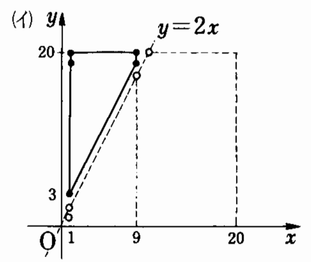
同じようにして，$x=k$ のとき，$2x<y$ を満たす y は $(20-2k)$ 通りあり，求める場合の数は

$$\sum_{k=1}^{9}(20-2k)=\sum_{k=1}^{9}2k=2\,\frac{9(1+9)}{2}=90 \text{ 通り}$$ ……(答) (イ)

研究 グラフを利用して，条件を満たす格子点 $(x,\ y)$ を数え上げてもよい。



$$\frac{20\times20-20}{2}=190 \text{ 通り}$$



$$\frac{20\times9}{2}=90 \text{ 通り}$$

演習

[2] 大中小の3個のさいころを投げて出る目の数を x，y，z とするとき，$x<y<z$ となる場合は何通りあるか。 (三重大)

基礎問　3.　▶ 3桁の整数・積の法則 ◀

4つの数字0，1，2，3の中から異なる3つの数字を選んで，3桁の数をつくるとする。

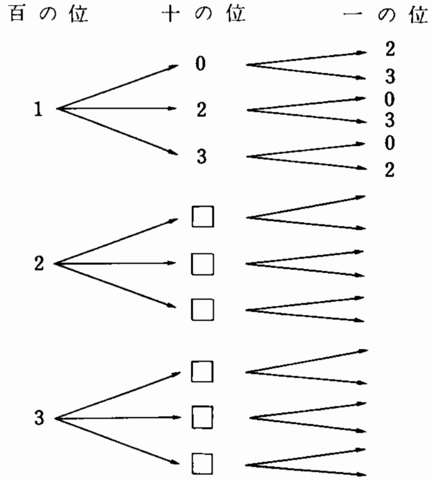
(1)　全部で何通りの数ができるか。

(2)　偶数は何通りできるか。

(3)　3の倍数は何通りできるか。　　　　　　　　　　（龍谷大-文）

精講

1°　(1)について，**樹形図**をかいてすべてを数え上げてみよう。



以上より，18通り。

2°　いつもこれをやっていたのでは大変である。そこで，次の積の法則を使う。

積の法則：2つのことがらA，Bがあって，Aの起こり方がm通り，その1つ1つの起こり方に対して，Bの起こり方がn通りであるならば，AとBがともに起こる場合の数は

$$m \times n \quad \text{通り}$$

である。

本問(1)においては，ことがらA，B，Cの積の法則であり，百の位の起こり方3通りの1つ1つに対して，十の位の起こり方が3通りあり，その十の位の起こり方1つ1つに対して，一の位の起こり方が2通りあるから

$3\times3\times2=18$ 通り

といえる。

3° 自然数Nが3の倍数になるのは，

各位の数字の和が3の倍数

になるときである。Nを3桁の数として証明しておこう。

$$N=100a+10b+c$$
$$=(99+1)a+(9+1)b+c$$
$$=(99a+9b)+(a+b+c)$$
$$=(3\text{ の倍数})+(a+b+c)$$

よって，$a+b+c$ が3の倍数ならば，Nは3の倍数である。

解答 (1) 最高位に0はこないから

$3\times3\times2=18$ 通り ……(答)

(2) 末位が0のとき　$3\times2=6$

末位が2のとき　$2\times2=4$

よって，　$6+4=10$ 通り ……(答)

(3) 3の倍数となる組合せは

$\{0,\ 1,\ 2\}$，$\{1,\ 2,\ 3\}$

それぞれが3桁の数になる数をかぞえて

$2\cdot2\cdot1+3\cdot2\cdot1=10$ 通り ……(答)

▶演習◀

[3] 6個の数字0，1，2，3，4，5を全部並べてできる6桁の整数の総数は $\boxed{(ア)}$ であり，それらを小さい順に並べたとき122番目の数は $\boxed{(イ)}$ である。また，それらのうち偶数の個数は $\boxed{(ウ)}$ である。

(中央大-理工)

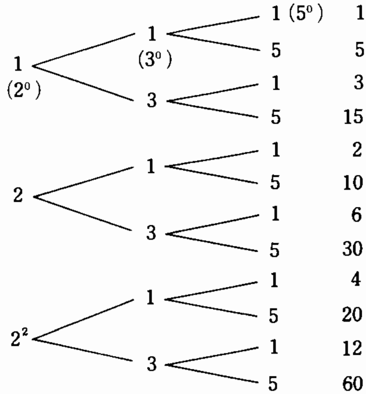
[4] 3桁の自然数の中で各位の数字がすべて等しい数字からなる3の倍数は全部で $\boxed{(ア)}$ 個あり，各位の数字がすべて異なる数字からなる3の倍数は全部で $\boxed{(イ)}$ 個ある。 (日本大-農獣医)

基礎問 4. ▶約数の個数と総和◀

(1) 7500 の正の約数は何個あるか。

(2) 7500 の正の約数の全部の和を求めよ。　　　　（中央学院大-商）

精講　1° 7500 は大きいので，まずは $60=2^2\cdot3\cdot5$ の約数について考えてみよう。樹形図で 60 の約数を並べると



以上，12 個であるが，これは積の法則を使って次のように考えればよい。

約数 2 のとり方は　0 個，1 個，2 個　の　3 通り

あり，その 1 つ 1 つに対して，

約数 3 のとり方は　0 個，1 個　の　2 通り

また，その 1 つ 1 つに対して，

約数 5 のとり方は　0 個，1 個　の　2 通り

ある。したがって，60 の約数の個数は

$$3\times2\times2=12 \text{ 個}$$

また，約数の総和については，

$$(2^0+2^1+2^2)(3^0+3^1)(5^0+5^1)$$

$$=2^0\cdot3^0\cdot5^0+2^0\cdot3^0\cdot5^1+2^0\cdot3^1\cdot5^0+2^0\cdot3^1\cdot5^1$$
$$+2^1\cdot3^0\cdot5^0+\cdots\cdots\cdots+2^2\cdot3^1\cdot5^1$$

と展開され，すべての約数

$$2^a3^b5^c \quad (a=0,\ 1,\ 2,\ b=0,\ 1,\ c=0,\ 1)$$

が 12 個現れる。

したがって，これを計算して

$$(1+2+4)(1+3)(1+5)=7\cdot4\cdot6=168$$

2°　一般に，自然数Nが　$N=p^aq^br^c$　と素因数分解されるとき，

Nの約数は，

$$(p^0+p^1+\cdots\cdots+p^a)(q^0+q^1+\cdots\cdots+q^b)(r^0+r^1+\cdots\cdots+r^c)$$

の展開式を考えればよく

約数の個数は

$$\boldsymbol{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

約数の総和は

$$\boldsymbol{\frac{p^{a+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{b+1}-1}{q-1}\cdot\frac{r^{c+1}-1}{r-1}}$$

である。

解　答　$7500=2^2\cdot3\cdot5^4$　であるから

(1)　約数の個数は

$(2+1)(1+1)(4+1)=30$ 個　……(答)

(2)　約数の総和は

$$(2^0+2^1+2^2)(3^0+3^1)(5^0+5^1+5^2+5^3+5^4)$$
$$=\frac{2^3-1}{2-1}\cdot\frac{3^2-1}{3-1}\cdot\frac{5^5-1}{5-1}$$
$$=7\cdot4\cdot781$$
$$=21868$$
……(答)

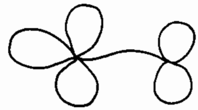
▶演習◀

[5]　2 数 42336，49896 の公約数の個数は $\boxed{\text{(ア)}}$ である。また，この 2 数の公倍数のうちで 1 億より小さいものの個数は $\boxed{\text{(イ)}}$ である。

(東京理大-薬)

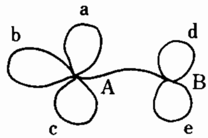
基礎問 5. ▶一筆書き◀

右図において，これを一筆書きする仕方の総数を求めよ。　　　　　　（琉球大）



精講

右図のようにAからAへの3つのループa，b，c，BからBへの2つのループd，eと名前をつけると，各ループは右回りと左回りがあるから，これを a_R，a_L と区別することにする。



一筆書きは，AまたはBから書きはじめなければならない。まず，Aから書きはじめる場合を考えてみる。

最初のループの選び方は

a_R，a_L，b_R，b_L，c_R，c_L　の6通り

たとえば a_R を選んだとすると，次のループの選び方は

b_R，b_L，c_R，c_L　の4通り

さらに，次のループの選び方は　2通り

そして $A \longrightarrow B$ と渡り（1通り），Bでのループを決めていく。

$6 \cdot 4 \cdot 2 \times 1 \times 4 \cdot 2 = 384$

Bから書きはじめる場合もあるから

求める総数は　$384 \times 2 = 768$　通り

解答ではもう少し要領よくまとめてみよう。$n!$ は

$$\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

を表し，***n* の階乗**と読む。

解　答　Aにおける3つのループの作りかたは

a，b，cの並べかたを数えて　$3!$ 通り

Bにおける2つのループの作りかたは　　$2!$ 通り

各ループには右回りと左回りがあり，Aから書きはじめるかBから書きはじめるかで，2通りがあるから

$(3! \cdot 2^3 \times 1 \times 2! \cdot 2^2) \times 2 = 768$ 通り　　　　……（答）

基礎問 6. ▶支払金額◀

10 円硬貨 4 枚，100 円硬貨 5 枚，500 円硬貨 2 枚の全部または一部で，ちょうど支払うことのできる金額は何通りあるか。ただし，0 円は除く。 （東北学院大-工）

精講

10 円硬貨 4 枚の使い方は 0〜4 枚の　5 通り
100 円硬貨 5 枚の使い方は 0〜5 枚の　6 通り
500 円硬貨 2 枚の使い方は 0〜2 枚の　3 通り

$5\times6\times3=90$　通り

ただし，100 円硬貨 5 枚を使うのは 500 円硬貨 1 枚と同じであるから，このなかにはダブリがある。

解答 10 円硬貨 4 枚の使い方は 0〜4 枚の　5 通り
100 円硬貨，500 円硬貨についても同様にそれぞれ　6 通り，3 通りある。

$\therefore\quad 5\times6\times3=90$　通り

このうち，100 円硬貨 5 枚と 500 円硬貨 1 枚は同額になるから

$$\left.\begin{array}{ll}500\text{円}+10n\text{円} & 5\text{通り}\\ 1000\text{円}+10n\text{円} & 5\text{通り}\end{array}\right\}\text{合わせて}\quad 10\text{通り}$$

はダブッて数えている。また，0 円の場合の　1 通り　は除くから

$90-(10+1)=79$　通り ……(答)

研究

次のように考えてもよい。
100 円硬貨 5 枚と 500 円硬貨 2 枚を使うと

100 円から 1500 円までの　15 通り

を支払うことができ，10 円硬貨 4 枚を使えば

0 円から 40 円までの　5 通り

を支払うことができるから　$15\times5+4=79$　通り

▶演習◀

[6] 10 円硬貨 5 個，100 円硬貨 3 個，500 円硬貨 3 個がある。これらの一部または全部を用いて作ることができる金額の種類は $\boxed{}$ 種である。 （共立薬大）

II. 順列・組合せ

基礎問 7. ▶順列・塗り分け◀

東北地方の地図の概形は右の通りである。6つの県を色で塗り分ける。ただし，隣り合う県は異なる色で塗り分ける。

(1)　2色を用いるとき，何通りの塗り方があるか。

(2)　3色を用いるとき，何通りの塗り方があるか。

(3)　たかだか4色を用いるとき，何通りの塗り方があるか。ただし，塗り分けができないときには，0通りと答えよ。

（東北学院大-工＊）

精講

1°　3色を用いるときの樹形図をかいてみよう。3色をA，B，Cで表すと

①	②	③	④	⑤	⑥
A	B	C	A	ダメ	
			C	A	B
	C	B	A	ダメ	
			B	A	C

①の選択はA，B，Cの3通りがあり，①がB，Cの場合もそれぞれ②〜⑥は2通りあるから　　$3\times2=6$　通り

2°　もう少し簡単に。①，②，③で同じ色を塗ることはできないので，積の法則より　3!

それに対して⑤，④，⑥はどれも1つずつ決まるので（⑤を④より先に塗るところに注意）

$$3!\times1\times1\times1=6\quad\text{通り}$$

これを4色の場合にも適用して

$$(4\cdot3\cdot2)\times2\times2\times2=192\quad\text{通り}$$

ここで，“4·3·2”は異なる4色のなかから3色をとってきて並べる仕方の総数であり　${}_4P_3$　で表される。

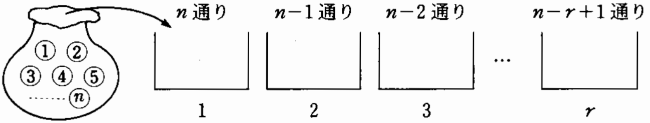
ものを1列に並べたものを**順列**といい，Pは順列(Permutation)の頭

文字である。

一般に，異なる n 個のものから r 個をとった順列の総数は

$$ {}_n\mathrm{P}_r=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)}_{r\text{個の積}} $$

となる。ただし，$n \geqq r$。これは r 個の箱を用意しておいて，異なる n 個のものを1つずつ入れていくと考えればよい。



第1の箱に入れる玉のとり方は①からⓝの n 通り，第2の箱に入れる玉のとり方は1個へって　$n-1$ 通り，……　これが続いて r 番目の箱に入れる玉のとり方は $n-r+1$ 通り　である。

積の法則により，上式が得られる。

3°　階乗 $(n!)$ の記号を使うと

$$ n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-r+1) $$
$$ =\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)\cdot(n-r)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1}{(n-r)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1} $$

と変形できるから

$$ {}_n\mathrm{P}_r=\frac{n!}{(n-r)!} $$

となる。

とくに $r=n$ のとき，${}_n\mathrm{P}_n=\dfrac{n!}{0!}$ となるが，${}_n\mathrm{P}_n=n!$ であるから，**$0!=1$** と約束すれば，$r=n$ のときも上式は成り立つ。今後はこの約束にしたがう。

解 答　(1)　①，②，③が隣り合っているので2色では塗り分けできない。　0通り　……(答)

(2)　①，②，③の塗り方は　$3!$　通り

その1つ1つに対して⑤，④，⑥は1つずつ決まるので

$3!\times1\times1\times1=6$　通り　……(答)

(3)　①，②，③の塗り方は　${}_4\mathrm{P}_3$　通り

その1つ1つに対して⑤，④，⑥は2つずつ決まるので

${}_4\mathrm{P}_3\times2\times2\times2=192$　通り　……(答)

基礎問 8. ▶余事象，隣り合うものは1つとみなす◀

7個の文字a，b，c，d，e，f，gを1列に並べるとき，

(1)　aとbの間に他の文字が1個以上入るような並べ方はいく通りあるか。

(2)　aとbの間に他の文字が2個以上入るような並べ方はいく通りあるか。　　　　（お茶の水女大）

精講　**1°**　(1)　aとbの間に他の文字が1個以上入るということは，入る文字が1個の場合，2個の場合，…，5個の場合の5通りを数え上げなければならない。これは大変である。そこで見方を変える。全体から条件に合わないものをとってしまうのである。これを**余事象**という。

(1)の余事象は，aとbの間に他の文字が1つも入らないということであり，(2)の余事象は，aとbの間に他の文字が0個または1個入るということである。

2°　aとbの間に文字が入らない(入る文字が0個)ということは，aとbが隣り合うということである。

"隣り合うものは1つとみなす"

と数えやすい。ab，c，d，e，f，gの6文字の順列と考えればよい。このとき，abについてはab，baの2通りがあることを忘れてはならない。

解　答　(1)　7文字の順列の総数は　$7!$

aとbの間に他の文字が1つも入らない場合の総数は，aとbの順序も考えて　$6!\times 2$

求める総数は　$7!-6!\times 2=3600$　通り　　……(答)

(2)　aとbの間に他の文字が1つ入る場合の総数は，入る文字○を決めて　a○b　を1つとみなし，全部で5文字の順列と考えればよい。○の決め方は5通りあるから

$5!\times 5\times 2$

求める総数は

$7!-(6!\times 2+5!\times 5\times 2)$

$=5!\times(42-12-10)=2400$　通り　　……(答)

基礎問 9. ▶条件のついた順列◀

equation のすべての文字を使って，順列を作る。このとき，次のようなものは，それぞれ何通りあるか。

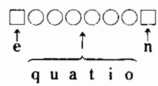
(1) e，n が両端にあるもの

(2) q，a が隣り合っていないもの

(3) t，i，o，n の順がこのままのもの　　　　（高知医大）

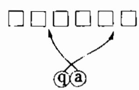
精講

いろいろな条件が付いているが，さて，どうしよう。並べ方の工夫が必要になる。このコツがつかめるようになったら順列はほぼ卒業だ。各問ごとに考えていこう。



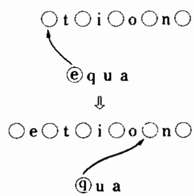
(1) まず，両端の e，n を決めて，次に quatio を並べるという2段ロケット式に考えればよい。

(2) 全体から q，a が隣り合う場合を除く（余事象を考える）方法と2段ロケット式に考える方法の2つがある。



2段ロケット方式では，まず q，a 以外の6文字を並べて，次に，並べた6文字の間もしくは両端の7か所のうち2か所に q，a を入れることになる。

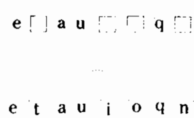
$$6!\times{}_7P_2=30240 \quad \text{通り}$$



(3) 次の3つの方法が考えられる。

(ア) tion と並べておいて，これらの文字の間もしくは両端に1つずつ equa を入れていく。このとき，e が入って “etion” となれば，次の q の入り方は6通りとなることに注意しよう。

(イ) equa□□□□の順列を考える。並べた後，□□□□のところを順に tion と置き変えていけばよい。これは “同じものを含む順列（➜基礎問 11）” であり



$$\frac{8!}{4!}=1680 \quad \text{通り}$$

となる。

(ウ)　8 つの場所を用意しておき，先ず tion の位置を決める。次に，残った 4 つの場所に equa を並べていけばよい。

$${}_8C_4 \times 4! = 1680 \quad \text{通り}$$

(組合せについては➜基礎問 14)

○○○○○○○○
⇩
○□○○□□○□
⇩
e $\boxed{t}$ a u $\boxed{i}$ $\boxed{o}$ q $\boxed{n}$

解　答　(1)　まず，両端の e，n を決めて，次に quatio を並べる。

$2 \times 6! = 1440$　通り　……(答)

(2)　全体から q，a が隣り合う場合を除くと

$8! - 7! \times 2$

$= 7! \cdot (8-2) = 30240$　通り　……(答)

(3)　tion と並べておいて，これらの文字の間もしくは両端に 1 つずつ equa を順次入れていくと

$5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680$　通り　……(答)

▶演習◀

[7]　男子 3 人，女子 4 人が 1 列に並ぶのに，女子 2 人が両端にくる場合は $\boxed{\quad(ア)\quad}$ 通りで，女子が 4 人隣り合う場合は $\boxed{\quad(イ)\quad}$ 通りである。　(福岡大-商)

[8]　SHODAI という語の全部の文字を用いてつくる順列の中で

(1)　S が最初に，I が最後にくるものはいく通りあるか。

(2)　母音 O，A，I がこの順序にあるものはいく通りあるか。

(熊本商大)

[9]　(1)　A，B，C，D，E，F，G の 7 つの文字から異なる 5 つの文字を選んで，1 列に並べる。ただし，○ABC○，○○BCA などのように A，B，C は必ず隣り合っているようにする。このような並べ方は $\boxed{\qquad}$ 通りある。

(2)　(1)で更に先頭が C で，末尾が G であるという並べ方は $\boxed{\qquad}$ 通りある。　(神戸女薬大)

基礎問 10. ▶円順列◀

父母，子供6人の合計8人の並び方はいく通りあるか。次の各場合について答えよ。

(1)　父母が隣り合うようにして1列に並ぶ。

(2)　父母の間に子供3人が並ぶように1列に並ぶ。

(3)　(1)で1列のかわりに円形に並ぶ。

(4)　(2)で1列のかわりに円形に並ぶ。　　　　(静岡大＊)

精講

異なる n 個のものを円形に並べたもの(**円順列**)の総数は $(n-1)!$　である。

これは次のように説明される。

【説明1】　ここに1つの円順列があったとしよう。円順列の弧を1つ切ると順列が1つできる。どこを切るかにより，n 通りの順列をつくることができる。各円順列から n 通りの順列がつくられるから，円順列が x 個できるとすれば，全体の順列の総数は

$$n\times x \quad 通り$$

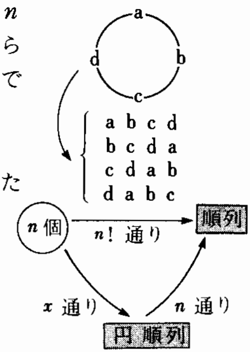
となる。一方，異なる n 個のものを1列に並べた順列の総数は

$$n! \quad 通り$$

であり，これらは等しい。

$$n\times x=n!$$

$$\therefore\quad x=\frac{n!}{n}=(n-1)! \quad 通り$$



【説明2】　円順列は，回転して重なれば，同じものとみなされる。そこで，特定の1つを固定してしまうと，他の $n-1$ 個は右まわりあるいは左まわりに並べればよく，これは

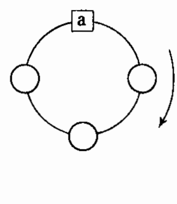
$n-1$ 個の順列

ということになる。

すなわち，求める円順列の総数は

$$(n-1)! \quad 通り$$

である。



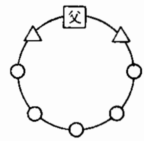
解　答　(1)　$\boxed{父母}$をひとかたまりとみて，7人の順列を考える。父母，母父の順序もあるから　○○$\boxed{父母}$○○○○

$2\times7!=10080$　通り　……(答)

(2)　$\boxed{父○○○母}$をひとかたまりとみる。子供○○○の並び方は ${}_6P_3$ であるから　○$\boxed{父○○○母}$○○

$({}_6P_3\cdot2)\times4!$

$=5760$　通り　……(答)

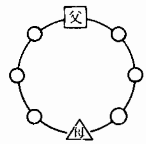


(3)　父の場所を固定して考える。

母は父の隣りにくるから　2通り

あとは，子供を並べて

$2\times6!=1440$　通り　……(答)



(4)　父母の間に子供3人が並ぶとき，母は父の向いがわにくるから，子供6人の順列を決めればよい。

$6!=720$　通り　……(答)

研究　説明1にならって

(3)　$\dfrac{(1)}{8}=1260$　通り　　(4)　$\dfrac{(2)}{8}=720$　通り

とした人はいないか。(4)の円順列はどこで切っても(2)の順列になるからよいが，(3)は父―母の間で切ると(1)の順列にはならない。$\boxed{父}$○○○○○○$\boxed{母}$の順列も考え合わせると，(3)は次のようになる。

$$\frac{(1)+2\times6!}{8}=1440\quad 通り$$

▶演習◀

[10]　男女5人ずつ計10人の学生が男女1人ずつ2人の先生を招き，円卓を囲んで集まりをもつことにし，先生には隣り合った特定の2つの席に座っていただくことにした。

(1)　何通りの座り方があるか。

(2)　先生を含めて男女が交互に座ることにするならば，何通りの座り方があるか。

(3)　先生を含めて男女が分かれて座ることにするならば，何通りの座り方があるか。　（信州大-経）

基礎問 11. ▶同じものを含む順列◀

0と書いたカードが2枚，1と書いたカードが2枚，2と書いたカードが3枚ある。この7枚のカードを横に並べて7桁の整数を作るとき

(1) 両端が1である7桁の整数は何通りできるか。

(2) 7桁の整数は全部で何通りできるか。（大阪女大）

精講

1° aがp個，bがq個，cがr個，………の合計n個（$n=p+q+r+\cdots\cdots\cdots$）を1列に並べたもの（**同じものを含む順列**）の総数は

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots\cdots\cdots}$$

である。これは次のように説明される。

【説明1】 求める順列の総数がx通りあるとしておこう。そのうちの1つ

a a c b a c………

について考える。この列においてp個のaを区別し a_1，a_2，a_3，………，

q個のbをb_1，b_2，b_3，………，

r個のcをc_1，c_2，c_3，………，

………

a a c b a c………

⇩

$a_1\,a_2\,c_1\,b_1\,a_3\,c_2$………

$a_1\,a_3\,c_1\,b_1\,a_2\,c_2$………

$a_2\,a_1\,c_1\,b_1\,a_3\,c_2$………

$a_2\,a_3\,c_1\,b_1\,a_1\,c_2$………

………

とし，n個の文字すべてを区別した順列をつくっていく。

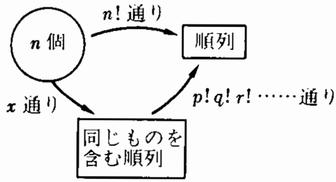
まず，aについては$p!$通り，bについては$q!$通り，cについては$r!$通り，………の順列が考えられ，通して数えると

$p!\,q!\,r!$……… 通り

となる。x通りの順列それぞれについても同じことが起こるからn個の文字すべてを区別した全体の順列の総数は

$x\times(p!\,q!\,r!\cdots\cdots\cdots)$ 通り

となる。一方，異なるn個のものを1列に並べた順列の総数は



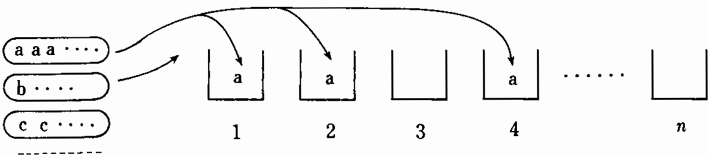
$$n!\quad \text{通り}$$

であり，これらは等しい。

$$x \times (p!\,q!\,r!\cdots\cdots\cdots) = n!$$

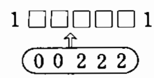
$$\therefore\quad x = \frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots\cdots\cdots}\quad \text{通り}$$

【説明 2】　組合せ（➜基礎問 14）を使うと次のように説明される。n 個の箱を用意しておいて，p 個の a を箱に 1 つずつ入れる，次に q 個の b を空いている $n-p$ 個の箱に 1 つずつ入れる，………これを繰り返すと求める順列がつくられる。



$$\begin{aligned}
&{}_{n}C_{p}\cdot{}_{n-p}C_{q}\cdot{}_{n-p-q}C_{r}\cdots\cdots\cdots \\
&=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}\cdot\frac{(n-p)!}{q!\,(n-p-q)!}\cdot\frac{(n-p-q)!}{r!\,(n-p-q-r)!}\cdot\cdots\cdots\cdots \\
&=\frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots\cdots\cdots}
\end{aligned}$$

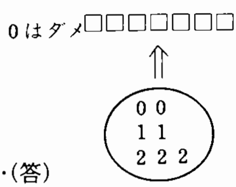
解　答　(1)　1 を両端において，0 のカード 2 枚，2 のカード 3 枚をその間に並べればよい。



$$\frac{5!}{2!\,3!} = 10\quad \text{通り}$$

……（答）

(2)　最高位に 0 はこないから，0 となった場合を全体からひけばよい。



$$\begin{aligned}
&\frac{7!}{2!\,2!\,3!} - \frac{6!}{2!\,3!} \\
&= \frac{5}{2}\cdot\frac{6!}{2!\,3!} \\
&= 150\quad \text{通り}
\end{aligned}$$

……（答）

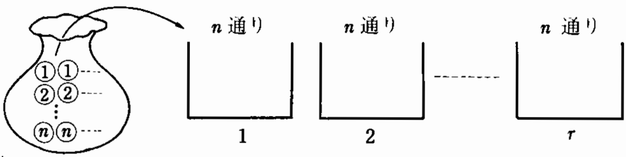
基礎問 12. ▶重複順列◀

3個の数字1，2，3を用いて6けたの整数をつくるとき，同じ数字を何回でも用いてよいことにすると全部で[　　]個できるが，4回まで用いてよいことにすると[　　]個となる。(日本大-生産工)

精講　異なるn種類のものからくり返しとることを許してr個をとり1列に並べたもの(**重複順列**)の総数は${}_n\Pi_r$で表され

$${}_n\Pi_r=n^r$$

である。このとき，$n<r$でもよく，n，rの大小には制限はない。ここまで，すすんだ諸君なら，この公式はすぐ理解できるであろう。r個の箱を用意しておいて，n種類の玉をその中に入れることを考えよう。



第1の箱に入る玉のとり方は①からⓝのn通り，それに対して，第2の箱に入る玉のとり方もn通り，……，これが続いて，r番目の箱に入る玉のとり方もn通りである。求める総数${}_n\Pi_r$は積の法則より

$${}_n\Pi_r=\underbrace{n\cdot n\cdot\cdots\cdots\cdot n}_{r\text{個の積}}=n^r$$

解答　何回でも用いてよいときは

${}_3\Pi_6=3^6=729$　個　……(答)

同じ数字を6回用いるとき，6けたの整数は3個できる。

5回用いるときは，5回用いる数字と1回用いる数字の決め方が3×2　通り，その並べ方が　$\dfrac{6!}{5!}=6$　通り

よって，4回まで用いてよいときは

$729-(3+3\times2\times6)=690$　通り　……(答)

基礎問 13. ▶部分集合・写像の個数◀

$X=\{1, 2, 3, 4\}$，$Y=\{5, 6, 7, 8, 9\}$ とする。このとき

(1)　Xの部分集合は，全部で $\boxed{}$ 個ある。

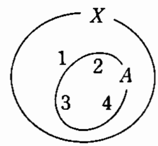
(2)　Xの部分集合のうち，少なくとも１つ奇数を含むものは，$\boxed{}$ 個ある。

(3)　XからYへの写像は，全部で $\boxed{}$ 個ある。

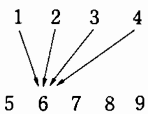
(4)　XからYへの写像のうち，１対１の写像は $\boxed{}$ 個ある。ただし，１対１の写像とは，Xの任意の元 a_1，a_2 $(a_1 \neq a_2)$ に対し，$f(a_1) \neq f(a_2)$ となるような写像 f をさす。　（立正大-経営）

精講　1°　AをXの部分集合$(A \subset X)$とするとき，Xの元１がAに，入るか入らないか$(\in A,\ \notin A)$と考えると２通りの選択がある。2，3，4 も同様に２通りの選択があるから，これは重複順列の問題である。

ここで，ϕ(空集合)，Xそれ自身もXの部分集合であることに注意せよ。



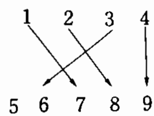
2°　写像とはXの元１つ１つにYの元１つを対応させる規則である。



写像である

$_5\Pi_4$

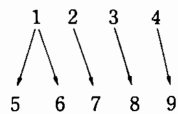
$\left(\begin{array}{l}X\text{の各元の像として}\\5\text{通り選択がある}\end{array}\right)$



１対１の写像

$_5\mathrm{P}_4$

$\left(\begin{array}{l}Y\text{の中から}4\text{つを}\\\text{とり並べればよい}\end{array}\right)$



写像でない

解　答　(1)　各元は部分集合の中に入る入らないの２通りの選択があるから　$_2\Pi_4=2^4=16$　個　……(答)

(2)　余事象を考えて　$16-2^2=12$　個　……(答)

(3)　Xの各元の像はそれぞれ５通り考えられ

$_5\Pi_4=5^4=625$　個　……(答)

(4)　$_5\mathrm{P}_4=5\cdot4\cdot3\cdot2=120$　個　……(答)

基礎問 14. ▶組合せ◀

男子 10 人，女子 10 人の中から 6 人を選ぶとき，男子と女子がそれぞれ少なくとも 2 人選ばれる場合の数は $\boxed{}$ 通りである。

（関西学院大-理）

精講

1° 異なる n 個のものから r 個をとる**組合せ**の総数 ${}_n\mathrm{C}_r$（C は Combination の頭文字）は

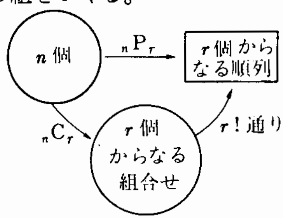
$$ {}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!} $$

である。

ただし，$n \geqq r$　これは次のように説明される。

異なる n 個のものから r 個をとって 1 つの組をつくる。

次にこの r 個を 1 列に並べる。組が ${}_n\mathrm{C}_r$ 通りできるとすれば，その 1 つ 1 つに対し，順列は $r!$ 通りできるから，全体を通してみると



$$ {}_n\mathrm{C}_r\times r! \quad \text{通り} $$

の順列ができたことになる。もちろん，これは，異なる n 個のものから r 個をとって並べた順列の総数

$$ {}_n\mathrm{P}_r $$

に等しいから

$$ {}_n\mathrm{C}_r\times r!={}_n\mathrm{P}_r $$

$$ \therefore\quad {}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!}\cdot\frac{1}{r!} $$

ということになる。

2° 異なる n 個の中から r 個をとるということは，残る $n-r$ 個を決めるといっても同じであるから

$$ {}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r} $$

である。もちろん計算からもすぐわかる。

また，$r=0$ のときは意味をもたないが，$0!=1$ を使って ${}_n\mathrm{C}_0=1$ と約束しておく。このとき

$$ {}_n\mathrm{C}_n={}_n\mathrm{C}_0=1 $$

でもある。

解　答　男子 x 人，女子 y 人とすると，男子と女子がそれぞれ少なくとも2人選ばれるのは

$$(x,\ y)=(2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2)$$

のいずれかである。

それぞれの組合せを考えると

$$\begin{aligned}&{}_{10}C_2\cdot{}_{10}C_4+{}_{10}C_3\cdot{}_{10}C_3+{}_{10}C_4\cdot{}_{10}C_2\\&=\frac{10!}{8!\,2!}\cdot\frac{10!}{6!\,4!}+\frac{10!}{7!\,3!}\cdot\frac{10!}{7!\,3!}+\frac{10!}{6!\,4!}\cdot\frac{10!}{8!\,2!}\\&=9450+14400+9450\\&=33300\ \text{通り}\end{aligned}$$

……(答)

研究

1°　選ばれる男子2人，女子2人をまず決め，次に残り2人を決めるとして

$$({}_{10}C_2\cdot{}_{10}C_2)\cdot{}_{16}C_2$$

としてはイケナイ。たとえば，男子を大文字，女子を小文字で表すとして右の組合せを考えてみるとよい。最初に選ばれる4人の組合せはどれも異なっているが合計6人としてみるとすべて同じである。ダブってしまってはイケナイ。

(ＡＢａｂ)Ｃｃ
と
(ＡＣａｂ)Ｂｃ
(ＡＣｂｃ)Ｂａ
……
はすべて同じ組合せ

2°　「少なくとも……」ということから，余事象を考えてもよい。全体から男子(女子) 0人のとき，男子(女子) 1人のときを除けばよいから

$$\begin{aligned}&{}_{20}C_6-({}_{10}C_6+{}_{10}C_5\cdot{}_{10}C_1)\cdot 2\\&=\frac{20!}{14!\,6!}-\left(\frac{10!}{4!\,6!}+\frac{10!}{5!\,5!}\cdot 10\right)\cdot 2\\&=38760-2730\cdot 2\\&=33300\ \text{通り}\end{aligned}$$

▶演習◀

[11]　男6人，女4人のうちから委員を3人選ぶ。このとき女が少なくとも1人含まれる方法は $\boxed{}$ 通りあり，女が少なくとも2人含まれる方法は $\boxed{}$ 通りある。　　(日本大-経)

基礎問 15. ▶ n 角形の中の三角形◀

円に内接する n 角形 $(n \geqq 5)$ の 3 頂点をとり三角形をつくる。

(1) もとの n 角形と 1 辺のみを共有する三角形は何個あるか。

(2) もとの n 角形と辺を共有しない三角形は何個あるか。

（宮崎大-教育）

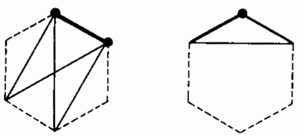
精講

三角形を決定するには

3 つの頂点 または 2 つの辺

を指定すればよい。

3 つの頂点を指定するとき，点には順序がないから **“組合せ”の問題**となる。



n 角形と 1 辺のみを共有する三角形は，共有辺により 2 頂点が決まるので，残りの頂点を指定すればよい。

n 角形と辺を共有しない三角形は，余事象を考えて三角形全体から辺を共有するものを除けばよい。

n 角形と 2 辺を共有する三角形は，共有辺が決まれば三角形は決定される。共有辺の共有頂点のとり方を調べればよい。

解 答 (1) n 角形と共有する辺のとり方は n 通り

残りの頂点の決め方は，共有辺の隣りの頂点を除く $n-4$ 通りあるから，求める個数は

$n(n-4)$ 個 ……(答)

(2) つくられる三角形全体から，n 角形と 1 辺のみを共有する三角形，2 辺を共有する三角形を除く。

$$
\begin{aligned}
&{}_nC_3-n(n-4)-n\\
&=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-n(n-3)\\
&=\frac{n(n-4)(n-5)}{6} \text{ 個}
\end{aligned}
$$

……(答)

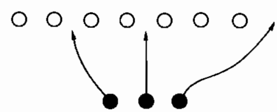
基礎問 16. ▶隣り合わないものは，後で入れる◀

数直線上の整数点 $x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ に，合計 n 個の黒または白の石を1つずつ，黒石どうしは隣り合わないように置く。黒石を3個使う置き方は何通りあるか。ただし，$n\geqq 5$ とする。

（北海道大-理・医・歯）

精講

隣り合わないということは，隣り合うの否定だから，全体から隣り合うものを除くという方法が考えられる(→研究)。しかし，これは少々むづかしい。そこで，基礎問9でもとった2段ロケット方式をとることにする。まず，白石を並べ(第1段ロケット)，そのすき間あるいは両端に黒石を入れていく(第2段ロケット)のである。このようにして並べれば，黒石どうしが隣り合うことはない。



解　答　まず $n-3$ 個の白石を並べ，そのすき間あるいは両端に黒石を入れることにする。すき間は両端も含めて $n-2$ 個あるから，黒石を入れる3つの場所のとり方は

$$ {}_{n-2}C_3=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}\ \text{通り} \quad \cdots\cdots(\text{答}) $$

研究

隣り合うものを除くという方法をとるなら，次のようになる。隣り合う黒を ●● として1つとみなし，同じものを含む順列として考える。●●● と ●●● のダブリに注意すると

$$ \frac{n!}{3!\,(n-3)!}-\left\{\frac{(n-1)!}{1!\,1!\,(n-3)!}-\frac{(n-2)!}{1!\,(n-3)!}\right\} $$

$$ =\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}\ \text{通り} $$

▶演習◀

[12] DEGREE の6文字を並べかえてできる順列のうち，E が隣り合わないものはいくつあるか。　（防衛大）

基礎問 17. ▶重複組合せ◀

球と立方体と正三角錐の3種類の積み木を製造する会社があり，これらの積み木を組み合わせて10個1組のセットを作るとする。

(1) 全部で幾つの組合せが考えられるか。

(2) 3種類の積み木のうち，球と立方体とを少なくとも1個ずつ含む組合せはいくつか。 （麻布大-獣医）

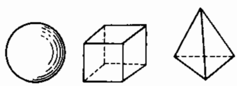
精講

異なる n 種類のものからくり返しとることを許して r 個をとる組合せ(**重複組合せ**)の総数は ${}_nH_r$ で表され

$${}_n\mathbf{H}_r={}_{n+r-1}\mathbf{C}_r$$

である。このとき，$n<r$ であってもかまわない。Hは同次積(Homogeneous product の頭文字H)である。これは次のように説明される。

本問(1)を例に考えよう。



3個　2個　5個

球，立方体，正三角錐の個数をそれぞれ，a，b，c で表すことにすると，球3個，立方体2個，正三角錐5個のセットは

$(a,\ b,\ c)=(3,\ 2,\ 5)$ $\iff$ $(a,\ b,\ c)=(3,\ 2,\ 5)$

と表される。求めるセットの　[$a^3b^2c^5$ とみてもよい]

つくり方の総数は，

$a+b+c=10$ $\iff$ $a\ a\ a\ b\ b\ c\cdots\cdots c$

$a\geqq0,\ b\geqq0,\ c\geqq0$

を満たす解 $(a,\ b,\ c)$ の個数である。 $\iff$ ○○○｜○○｜○……○

あるいは，

$(a,\ b,\ c)=(3,\ 2,\ 5)$ $\iff$ $\underbrace{□□□□□□□□□\cdots\cdots□}_{\text{12か所}}$

を $a^3b^2c^5$ とみれば3文字 a，b，c からつくられる10次の同次積

○が10個，｜が2本

$$a^{10},\ a^9b,\ a^9c,\ a^8b^2,\ \cdots\cdots,\ a^pb^qc^r,\ \cdots\cdots,\ c^{10}$$

がいくつあるかという問題と同じである。(したがって，これは重複組合せの問題であり，この総数を ${}_3\mathrm{H}_{10}$ とかく)

さらに，おきかえをすすめると，これは10個の○を並べておいて，2

本の仕切りを入れることに他ならない。

(3, 2, 5) $\Longleftrightarrow$ ○○○|○○|○○○○○

(2, 0, 8) $\Longleftrightarrow$ ○○||○○……………○

(0, 0, 10) $\Longleftrightarrow$ ||○○○○……………○

といった具合である。ここまでくると，これは10個の○と2本の仕切り|の順列である。同じものを含む順列であるから

$$ {}_3H_{10}=\frac{12!}{10!\,2!}=66 \quad \text{通り} $$

一般化するために組合せで説明すると，12か所の□のうち○の場所10個を決めれば，順列は決定するから

$$ {}_3H_{10}={}_{12}C_{10}=66 \quad \text{通り} $$

である。

${}_nH_r$ については，r 個の○と $n-1$ 個の仕切り|の順列であり

$$ {}_nH_r={}_{r+(n-1)}C_r={}_{n+r-1}C_r $$

となる。

解　答　(1)　球，立方体，正三角錐の個数をそれぞれ a, b, c とすると

$$ a+b+c=10,\ a\geqq 0,\ b\geqq 0,\ c\geqq 0 $$

これを満たす整数解 (a, b, c) の個数を求めればよく

$$ {}_3H_{10}={}_{12}C_{10}=66 \quad \text{通り} $$ ……(答)

(2)　はじめから球と立方体を1個ずつ入れておき，残り8個のセットを考えればよい。

$$ a+b+c=8,\ a\geqq 0,\ b\geqq 0,\ c\geqq 0 $$

これを満たす整数解 (a, b, c) の個数を求めればよく

$$ {}_3H_8={}_{10}C_8=45 \quad \text{通り} $$ ……(答)

▶演習◀

[13]　$x+y+z=6$ を満たす正の整数解の組は全部で $\boxed{}$ 個ある。
(日本大-農獣医)

[14]　$(x+y+z)^{88}$ の展開式の同類項は何種類あるか。　(明治大-工)

基礎問 18. ▶分配の問題◀

(1)　区別のつく6個の品を，2個ずつ，A，B，Cの3人に分ける方法は何通りあるか。

(2)　全く区別のつかない6個の品を，A，B，Cの3人に分ける方法は何通りあるか。ただし，1個も配分のない人があってもよいものとする。　　（近畿大-医）

精講

1°　まず区別のつく6個の品を，A，B，Cの3人に分ける方法を数え上げてみよう。品を1〜6として区別すると，品1はA，B，Cの誰に渡るかで3通り，品2も3通り，……であり，全体としては，

$${}_3\Pi_6=3^6 \quad 通り$$

が考えられる。

1	2	3	4	5	6
↓	↓	↓	↓	↓	↓
A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C

2°　次にA，B，Cに渡る個数が指定されたとき，すなわち，本問(1)の場合について考えてみよう。

問題をひろげて異なるn個のものをA，B，Cの3人にそれぞれp個，q個，r個$(p+q+r=n)$ずつ分ける方法を数え上げる。まず，Aがp個とり，次にBが残り$n-p$個からq個とる。そうすれば，残り$n-p-q=r$個は自動的にCのものとなる。これを式でかくと

$${}_n\mathrm{C}_p\cdot{}_{n-p}\mathrm{C}_q=\frac{n!}{p!\,q!\,r!}\quad (n=p+q+r)$$

となる。

3°　この式は基礎問11(同じものを含む順列，説明2)で登場している。分配の問題をこの立場で解釈すると，異なる品1〜6のうち1，4をAに，2，3をBに，5，6をCに配るということは，右図のように　ABBACC　という順列に対応することになる。これはAが2個，Bが2個，Cが2個の同じものを含む順列に他ならない。

1	2	3	4	5	6
↓	↓	↓	↓	↓	↓
A	B	B	A	C	C

4°　区別のつかないn個のものをA，B，Cの3人に分ける問題は，

A，B，Cがそれぞれ何個ずつもらうかがテーマであり，Aがa個，Bがb個，Cがc個もらうものとすると

$$a+b+c=n,\ a\geqq 0,\ b\geqq 0,\ c\geqq 0$$

であり，この方程式の整数解の個数が分配の総数と一致する。すなわち

$$_3\mathrm{H}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_n$$

である。

解　答　(1)　6個の中からまずAが2個とり，次にBが残り4個の中から2個とればよいから

$$_6\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_2=\frac{6!}{4!\,2!}\cdot\frac{4!}{2!\,2!}=15\cdot 6=90\quad\text{通り}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　A，B，Cがもらう個数をそれぞれa，b，cとすると

$$a+b+c=6,\ a\geqq 0,\ b\geqq 0,\ c\geqq 0$$

であり，この方程式の整数解の個数は

$$_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_2=\frac{8!}{2!\,6!}=28\quad\text{通り}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

▶演習◀

[15]　3つのボールを7つの箱に入れる。箱には番号がかいてあり，区別できるものとする。

(1)　ボールも番号によって区別できるとき，同じ箱に何個のボールを入れてもよいものとすれば，$\boxed{}$通りの入れ方がある。

(2)　ボールは区別できないとき，同じ箱には1つしかボールが入れられないものとすれば，$\boxed{}$通りの入れ方がある。

(3)　ボールは区別できないとき，同じ箱に2つまでボールが入れられるものとすれば，$\boxed{}$通りの入れ方がある。　(広島工大)

[16]　異なる3つの箱に玉を分けるとき，次の(1)，(2)の場合，分け方は何通りあるか。玉を入れない箱があってもよい。

(1)　赤い玉を5個の場合

(2)　赤い玉が5個と白い玉が2個の場合　(日本大-生産工)

基礎問 19. ▶組分けの問題◀

男子４人，女子３人の合計７人を３組に分ける。

(1) ４人，２人，１人の３組に分ける方法は $\boxed{}$ 通りである。

(2) ４人，２人，１人の３組に分け，どの組にも女子が入っているように分ける方法は $\boxed{}$ 通りである。

(3) ２人，２人，３人の３組に分ける方法は $\boxed{}$ 通りである。

（神戸大医技短大）

精講

1° まず７人を３組に分ける仕方をあげると

(5, 1, 1), (4, 2, 1)

(3, 3, 1), (3, 2, 2)

の４通りである。ここで問題としているのは人数の分け方であり(5, 1, 1), (1, 5, 1), (1, 1, 5) は区別されない。

2° (4, 2, 1) の３組に分けるには

４人の組に入る人を決め　${}_7C_4$

残り，３人の中から２人の組となる人を決め　${}_3C_2$

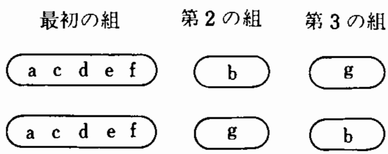
残った１人は１の組となる。

∴　${}_7C_4 \cdot {}_3C_2$

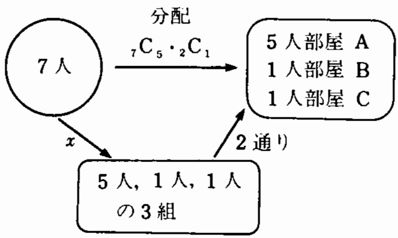
しかし，(5, 1, 1) はそうもいかない。上にならって

${}_7C_5 \cdot {}_2C_1$

としてはイケナイのだ。右図をみれば，第２組，第３組の決め方が違っているのに，結果としての組分けはb，gが１人ずつで，他の５人が１組と一致している。



次のように考えればよい。７人を５人，１人，１人の３組に分け，５人は５人部屋のA室へ，残り２人は１人



部屋のB室，C室に入る。3組の分け方がx通りあるとすると，その1つ1つに対して，B，Cの部屋割りは2通りできるから，全体としては

$$x\times2\quad\text{通り}$$

の部屋割りができる。7人を3室に分配したことになる。これを最初から分配の問題として扱えば，A室に入る人は${}_7C_5$通り，残り2人のうちB室に入るのは${}_2C_1$通り。全体としては　${}_7C_5\cdot{}_2C_1$

となる。よって，

$$x\times2={}_7C_5\cdot{}_2C_1$$

$$\therefore\quad x=\frac{{}_7C_5\cdot{}_2C_1}{2}=21\quad\text{通り}$$

【注】 1人，1人となる2人を決めればおしまい。

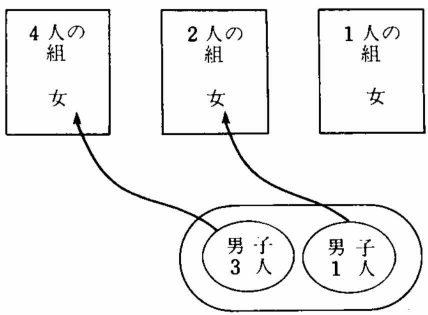
$${}_7C_2=21\quad\text{通り}$$

解答 (1)　${}_7C_4\cdot{}_3C_2=35\cdot3=105$　通り　……(答)

(2)　まず，女子を各組に入れる。　3!　通り

次に，男子を3人，1人の組に分ければよく，

$$3!\cdot{}_4C_3$$
$$=6\cdot4$$
$$=24\quad\text{通り}\cdots\text{(答)}$$



(3)　3人の組のつくり方は　${}_7C_3$　通り

残り4人を2人，2人の組に分けると

$$\frac{{}_7C_3\cdot{}_4C_2}{2}=\frac{35\cdot6}{2}=105\quad\text{通り}$$　……(答)

研究

1°　一般性のある問題として，9人の組分けで

(1)　2人，3人，4人

(2)　2人，2人，5人

(3)　3人，3人，3人

の各場合について考えてみよ。

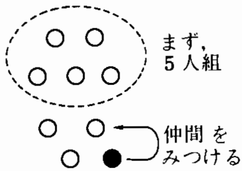
(1) ${}_9C_2\cdot{}_7C_3=36\cdot35=1260$ 通り

(2) $\dfrac{{}_9C_2\cdot{}_7C_2}{2}=\dfrac{36\cdot21}{2}=378$ 通り

(3) $\dfrac{{}_9C_3\cdot{}_6C_3}{3!}=\dfrac{84\cdot20}{6}=280$ 通り　（3! に注意 3 ではない）

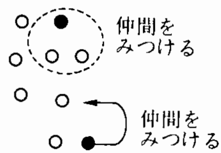
2° (2), (3)の別解を示しておく。

(2) まず，5 人の組をつくり，残った 4 人のうちの特定な 1 人の仲間の決め方を考えると



$${}_9C_5\cdot{}_3C_1=\frac{9!}{4!\,5!}\cdot3=126\cdot3=378\ \text{通り}$$

(3) 9 人のうちの特定な 1 人の仲間 2 人を決め，残り 6 人のうちの特定な 1 人の仲間 2 人を決めると考えて

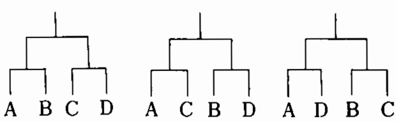


$${}_8C_2\cdot{}_5C_2=\frac{8!}{6!\,2!}\cdot\frac{5!}{3!\,2!}=28\cdot10=280\ \text{通り}$$

▶演習◀

[17] 12 人の生徒を 4 人ずつ 3 組に分ける方法は $\boxed{}$ 通りで，特定の 3 人 A，B，C が互いに異なる組に入るように 4 人ずつ 3 組に分ける方法は $\boxed{}$ 通りである。　（関西学院大-理）

[18] (1) A，B，C，D の 4 人でトーナメントを行うとき，異なる組合せ方式は，右図に示す 3 通りである。



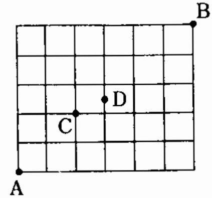
8 人の場合には，何通りあるか。

(2) 8 人でトーナメントを行う。8 人の間には実力差があり，試合では常に実力上位のものが勝つと仮定する。このとき，実力第 3 位のものが決勝戦に進出する組合せ方式は，何通りあるか。

（青山学院大-理工）

基礎問 **20.** ▶最短径路(Ⅰ)◀

図のように街路が碁盤の目のようになった町がある。地点Aから地点Bへ行く最短の道すじは何通りあるか。次の3つの場合について答えよ。



(1)　地点Cを通っていく場合

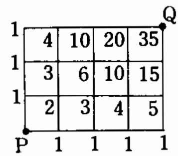
(2)　地点Cを通らないで行く場合

(3)　地点Dを通らないで行く場合

（豊橋技科大）

精講

最短径路の問題は順列，組合せの応用として最頻出の問題である。右図を例にしていろいろ説明しよう。

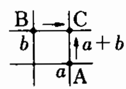


1°　数えあげる　素朴な方法だが，ときには有効な手段でもある。出発点PからA，PからBへの最短の道すじの数をそれぞれa，bとすると，PからCへ行く道すじの数は，$\mathrm{P} \xrightarrow{a} \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{C}$

または　$\mathrm{P} \xrightarrow{b} \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}$　であり

$a+b$

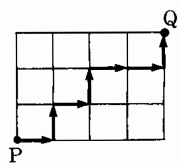
となる。これを図の中に順次書き込んでいくと右上図となる。すなわち，PからQへの道すじの数は



35　通り

2°　同じものを含む順列(ヨタヨタ論法)

右の道すじは



$\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\uparrow$

と表される。→4個と↑3個の順列が決まれば道すじが1つ決まることになる。この総数は，同じものを含む順列として

$$\frac{7!}{4!\,3!}=35\quad\text{通り}$$

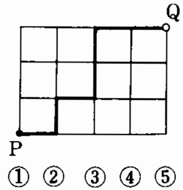
として計算される。→(ヨコ)，↑(タテ)より上の道すじは

ヨタヨタヨヨタ

とも表されるので，これをヨタヨタ論法という。

3° 組合せ →，↑の2種類の道しかないのだから，→4個，↑3個の合計7個のうち，→4個の場所を決めればよい。

$_7C_4=35$ 通り



4° 重複組合せ 右図のようにタテの道に番号をつけると，道すじは5種類の道から重複を許してタテの区画を3個選べばよい(右図の道すじは②，③，③の選択)。求める総数は

$_5H_3={}_7C_3=35$ 通り

解 答 (1) AからCまでは→2個，↑2個，CからBまでは→4個，↑3個であるから

$$\frac{4!}{2!\,2!}\times\frac{7!}{4!\,3!}=6\times35=210 \text{ 通り}$$ ……(答)

(2) 全体から，Cを通る場合を除けばよい。

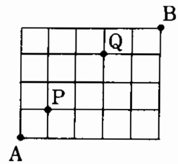
$$\frac{11!}{6!\,5!}-210=462-210=252 \text{ 通り}$$ ……(答)

(3) 全体から，Dを通る場合を除けばよい。

$$\frac{11!}{6!\,5!}-\frac{5!}{3!\,2!}\times\frac{5!}{3!\,2!}$$
$$=462-10\times10=362 \text{ 通り}$$ ……(答)

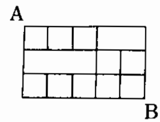
▶演習◀

[19] 図のような道路において，AからBへ行く最短の道順のうち，PまたはQを通る道順は何通りあるか。 (千葉大)



基礎問 *21.* ▶最短径路（II）◀

図のような道路網において，点Aから点Bに至る最短路の数を求めよ。　（青山学院大-理工）



精講

大きく分けると

(ア)　与えられた道路網の中で数える

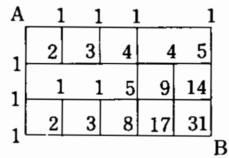
(イ)　道路を補って，完全な格子道路として，あとで補った道路を除く

の2方法が考えられる。

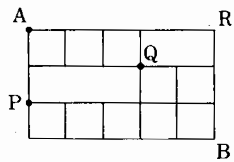
1°　(ア)の方法でも2つの方法が考えられる。

1つめの方法　前問の精講で示した**直接数えあげる**という方法である。実行すると右図のようになり

31　通り



2つめの方法　右下図のようにP，Q，Rの**関所を設ける**とよい。AからBに行くにはP，Q，Rのどれかを通らなければならず，どれもダブッて通ることはないから



$$\mathrm{A}\to\mathrm{P}\to\mathrm{B}：1\times\frac{6!}{5!}=6\quad 通り$$

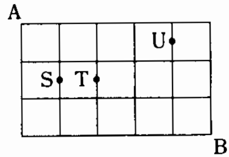
$$\mathrm{A}\to\mathrm{Q}\to\mathrm{B}：\frac{4!}{3!}\times\frac{4!}{2!\,2!}=24\quad 通り$$

$$\mathrm{A}\to\mathrm{R}\to\mathrm{B}：\quad 1通り$$

$$\therefore\quad 6+24+1=31\quad 通り$$

2°　(イ)の方法で解答を示すことにしよう。

解 答 右図のように3つの道路S，T，Uを補うとAからBに行く最短路の数は



$$\frac{8!}{5!\,3!}=56 \quad \text{通り}$$

このうち

A→S→B となるのは $2\times\frac{5!}{4!}=10$ 通り

A→T→B となるのは $\frac{3!}{2!}\times\frac{4!}{3!}=12$ 通り

A→U→B となるのは $1\times\frac{3!}{2!}=3$ 通り

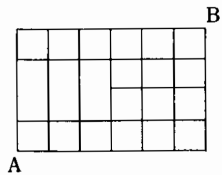
よって，求める径路の数は

$56-(10+12+3)=31$ 通り ……(答)

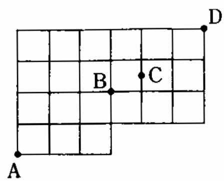
▶演習◀

[20] 右の図において，点Aから点Bまで行くのに，最短距離の行き方は何通りあるか。

（和歌山県医大）



[21] 右図の実線はAを出発してDに到着する径路を示す。



(1) AからDに行く最短径路は何通りあるか。

(2) (1)で求めた径路のうち図の点Bを通らない径路は何通りあるか。

(3) (1)で求めた径路のうち図の点Cを通らない径路は何通りあるか。

(4) (1)で求めた径路のうち図の点Bも点Cも通らない径路は何通りあるか。

（山形大-人文）

III. 二　項　定　理

基礎問 22. ▶パスカルの三角形◀

$1 \leqq r \leqq n$ を満たす整数 n と r に対して

$$ {}_n\mathrm{C}_{r-1} + {}_n\mathrm{C}_r = {}_{n+1}\mathrm{C}_r $$

が成り立つことを示せ。　　　　　　　　　　（大阪女大）

精講　上の等式を，右のように示すなら，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ を並べていくと

$$\begin{array}{ccc} {}_n\mathrm{C}_{r-1} & & {}_n\mathrm{C}_r \\ & {}_{n+1}\mathrm{C}_r & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & {}_1\mathrm{C}_0 & & {}_1\mathrm{C}_1 & & & \\ & & {}_2\mathrm{C}_0 & & {}_2\mathrm{C}_1 & & {}_2\mathrm{C}_2 & & \\ & {}_3\mathrm{C}_0 & & {}_3\mathrm{C}_1 & & {}_3\mathrm{C}_2 & & {}_3\mathrm{C}_3 & \\ {}_4\mathrm{C}_0 & & {}_4\mathrm{C}_1 & & {}_4\mathrm{C}_2 & & {}_4\mathrm{C}_3 & & {}_4\mathrm{C}_4 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

このようにしてできた三角形を**パスカルの三角形**という。これは

$$\begin{aligned} (a+b)^1 &= 1a+1b \\ (a+b)^2 &= 1a^2+2ab+1b^2 \\ (a+b)^3 &= 1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3 \\ (a+b)^4 &= 1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

といった具合に $(a+b)^n$ （$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$）を二項展開したときの係数からできている。

解　答

$$ {}_n\mathrm{C}_{r-1} + {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{(n-r+1)!\,(r-1)!} + \frac{n!}{(n-r)!\,r!} $$

$$ = \frac{n!\{r+(n-r+1)\}}{(n-r+1)!\,r!} = \frac{(n+1)n!}{(n+1-r)!\,r!} = {}_{n+1}\mathrm{C}_r $$

別　解　$n+1$ 個の中から r 個をとるとり方のうち

特定の1個を含むとり方は　${}_n\mathrm{C}_{r-1}$　通り

特定の1個を含まないとり方は　${}_n\mathrm{C}_r$　通り

したがって，${}_{n+1}\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{r-1} + {}_n\mathrm{C}_r$

基礎問 23. 二項定理

数学的帰納法を用いて，二項定理

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$$

が成立することを証明せよ。（宇都宮大-農・教育）

精講

1° $n=4$ のときを調べてみよう。

$$(a+b)^4=(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

右辺を展開すると 4 個のかっこの内から a または b を 1 つずつとっていくことになり

$$a^4,\ a^3b,\ a^2b^2,\ ab^3,\ b^4$$

と 4 次の式が 5 種類（${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4=5$）できる。

$$(a+b)^4=\boxed{}a^4+\boxed{}a^3b+\boxed{}a^2b^2+\boxed{}ab^3+\boxed{}b^4$$

であり，係数は何かが問題となる。たとえば，a^3b ならば

$$(a+b)\,(a+b)\,(a+b)\,(a+b)$$

といった具合であり，a^3b のつくり方は b をどこのかっこからとってくるか（残ったかっこからは a をとることになる）を決めればよい。そのとり方は ${}_4\mathrm{C}_1$ 通りである。これが a^3b の係数である。

同様にして，a^4 の係数は ${}_4\mathrm{C}_0$，a^2b^2 は ${}_4\mathrm{C}_2$，ab^3 は ${}_4\mathrm{C}_3$，b^4 は ${}_4\mathrm{C}_4$ である。

$$\therefore\ (a+b)^4={}_4\mathrm{C}_0a^4+{}_4\mathrm{C}_1a^3b+{}_4\mathrm{C}_2a^2b^2+{}_4\mathrm{C}_3ab^3+{}_4\mathrm{C}_4b^4$$

2° 一般化して

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\cdot\cdots\cdots\cdot(a+b)}_{n\text{ 個の積}}$$

を考える。できる n 次の同類項の種類は

$$a^n,\ a^{n-1}b,\ a^{n-2}b^2,\ \cdots\cdots,\ ab^{n-1},\ b^n$$

の $n+1$ 個（${}_2\mathrm{H}_n={}_{n+1}\mathrm{C}_n=n+1$）であり，$a^{n-r}b^r$ の係数は n 個のかっこのうちのどの b を使うかで決まり ${}_n\mathrm{C}_r$ である。

$$\therefore\ (a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$$

3° 数学的帰納法でこれを証明するが，この定理は覚えて使えるよう

にしておけばよい(基礎問 24，25 など)。

解 答　$n=1$ のとき，右辺$={}_1C_0a+{}_1C_1b=a+b=$左辺

n での成立を仮定すると

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1}&=(a+b)(a+b)^n\\&=(a+b)\sum_{r=0}^{n}{}_nC_ra^{n-r}b^r\\&={}_nC_0a^{n+1}+{}_nC_1a^nb+{}_nC_2a^{n-1}b^2+\cdots\cdots+{}_nC_nab^n\\&\quad+{}_nC_0a^nb+{}_nC_1a^{n-1}b^2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}ab^n+{}_nC_nb^{n+1}\\&={}_nC_0a^{n+1}+\sum_{r=1}^{n}({}_nC_{r-1}+{}_nC_r)a^{n+1-r}b^r+{}_nC_nb^{n+1}\end{aligned}$$

ここで，${}_nC_0={}_{n+1}C_0$，${}_nC_n={}_{n+1}C_{n+1}$，${}_nC_{r-1}+{}_nC_r={}_{n+1}C_r$

であるから

$$(a+b)^{n+1}=\sum_{r=0}^{n+1}{}_{n+1}C_ra^{n+1-r}b^r$$

$n+1$ のときも成り立つ。

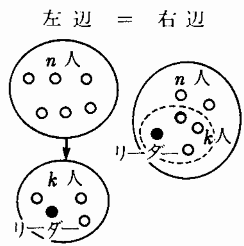
よって，すべての自然数 n について成り立つ。

研究

下の演習の中の係数

$$k{}_nC_k=n{}_{n-1}C_{k-1}$$

は二項係数に関する等式としてよく使われる。計算でも示されるが(各自やってみよ)，組合せの意味から考えてみよう。左辺は，n 人の中から k 人のグループをつくり(${}_nC_k$ 通り)，リーダーを選ぶ(k 通り)場合の数であり，右辺は，まずリーダーを決めて(n 通り)，残り $n-1$ 人の中から仲間を集めて(${}_{n-1}C_{k-1}$ 通り) k 人のグループをつくる場合の数である。



▶演習◀

[22]　x と y を実数，n を自然数とするとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sum_{k=1}^{n}{}_nC_kkx^ky^{n-k}=nx(x+y)^{n-1}$$

(山梨医大)

基礎問 24. ▶展開式の係数◀

(1) $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ を展開したとき，x^{11} の係数は $\boxed{}$ である。

(神奈川大-工)

(2) $(a+b+c)^6$ を展開したとき，ab^2c^3 の係数は $\boxed{}$ である。

(自治医大)

精講

二項定理 $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r a^{n-r}b^r$ における第 $r+1$ 項 ${}_nC_r a^{n-r}b^r$ を展開の一般項という。この手の問題では

一般項に着目

すればよい。展開すべてをおこなうのは不経済である。

解 答 (1) 一般項は ${}_{10}C_r x^{2(10-r)}x^{-r}={}_{10}C_r x^{20-3r}$

$20-3r=11$ となるのは $r=3$

求める係数は ${}_{10}C_3=120$ ……(答)

(2) $\{a+(b+c)\}^6$ として展開し，a の1次式となるのは

$${}_6C_5 a^{6-5}(b+c)^5=6a\sum_{r=0}^{5}{}_5C_r b^{5-r}c^r$$

$r=3$ のとき，ab^2c^3 があらわれ，その係数は

$6\cdot{}_5C_3=60$ ……(答)

研究

前問の精講を今一度読み直せば

$$(a+b+c)^n=\sum_{p,q,r}\frac{n!}{p!\ q!\ r!}a^p b^q c^r$$

と展開されるのが理解されよう。ここでの和は，$p+q+r=n$，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$ となる整数 p，q，r についてのものであり，項の数は ${}_3H_n={}_{n+2}C_n$ 個である。これを**多項定理**という。

本問(2)は $\dfrac{6!}{1!\ 2!\ 3!}=60$ ということになる。

▶演習◀

[23] $\left(x+y+\dfrac{1}{3xy}\right)^6$ の展開式における定数項は $\boxed{}$ である。

(神奈川大-工)

基礎問 25. ▶二項係数◀

次の和を求めよ。

(1) ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n$

(2) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n$

(3) $1{}_nC_1+2{}_nC_2+3{}_nC_3+\cdots\cdots+n{}_nC_n$ (神奈川大-工)

精講

組合せ ${}_nC_r$ の総和は，二項定理

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n$$

を利用することが多い。

この式と求める和との類似を考えると

(1)は　$x=1$　と置く

(2)は　$x=-1$　と置く

(3)は　$({}_nC_rx^r)'=r{}_nC_rx^{r-1}$　と微分する

などがうかぶであろう。

解答 (1) $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n$ …①

において，$x=1$ と置くと

$${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n=(1+1)^n=2^n \quad (答)$$

(2) ①において，$x=-1$ と置くと

$${}_nC_0-{}_nC_1+\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n=(1-1)^n=0 \quad (答)$$

(3) ①の両辺を x で微分すると

$$n(1+x)^{n-1}={}_nC_1+2{}_nC_2x+\cdots\cdots+n{}_nC_nx^{n-1}$$

$x=1$ と置くと

$${}_nC_1+2{}_nC_2+\cdots\cdots+n{}_nC_n$$
$$=n(1+1)^{n-1}=n2^{n-1} \quad \cdots\cdots(答)$$

研究

1° (1)を組合せの意味から考えてみよう。

n 個の要素からなる集合 A の部分集合の個数はいくつあるか？　部分集合の要素の個数で場合分けしながら数えていく。要素が 0 個の部分集合は ${}_nC_0(=1)$ 個(これは空集合)，要素が 1 個のものは ${}_nC_1$ 個，……，要素が n 個のものは ${}_nC_n(=1)$ 個(A 自身)であり，その総数は

$${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n$$

個である。これを要素の立場から数え直すと，各要素は 1 つの部分集合の中に属する，属さない 2 通りの選択があるから

$${}_2\Pi_n=2^n$$

個の部分集合をつくることができる。

$$\therefore\quad {}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n=2^n$$

2° (1)，(2)を加えると

$$2({}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots\cdots)=2^n$$

(1)，(2)をひくと

$$2({}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots\cdots)=2^n$$

すなわち

$${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots\cdots={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots\cdots=2^{n-1}$$

という等式が得られる。

3° (3)も頻出問題であり，解き方もいろいろある。

(ア) 微分の利用……解答の方法

(イ) $r\,{}_nC_r=n\,{}_{n-1}C_{r-1}$ の利用 (➡基礎問 23 研究)

演習 [22] において，$x=y=1$ とおけば本問。

(ウ) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r\,{}_nC_r=n2^{n-1}$ を示せ，という出題に対しては数学的帰納法を使うこともできる。

▶演習◀

[24] (1) $2\cdot1\cdot{}_nC_2+3\cdot2\cdot{}_nC_3+\cdots\cdots+n(n-1){}_nC_n$ を計算せよ。

(琉球大)

(2) n が自然数のとき，$x^n(1+x)^n$ を二項定理によって展開して得られる等式を利用して

$$\sum_{k=0}^{n}(n+k)\cdot{}_nC_k=n\,{}_nC_0+(n+1){}_nC_1+\cdots\cdots+2n\,{}_nC_n$$

の値を求めよ。 (産業医大)

[25] n は自然数として，次の和を求めよ。

$$\frac{{}_nC_0}{1}+\frac{{}_nC_1}{2}+\cdots\cdots+\frac{{}_nC_k}{k+1}+\cdots\cdots+\frac{{}_nC_n}{n+1}$$ (近畿大)

[26] 31^n を 900 で割ったときの余りが最大となる自然数 n のうち最小のものを求めよ。 (琉球大)