第2章　確　　率

I.　確率の定義・加法定理

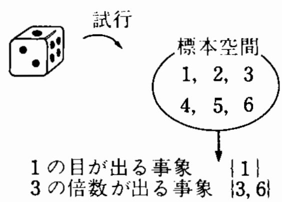
基礎問 26. ▶標本空間，サイコロ◀

2つのサイコロを同時に振ったとき，出た目の和が3の倍数になる確率を求めよ。　　　　（日本大-工）

精講　1°　まず，確率で使われる言葉を確認しておこう。

実験や観測をおこなうことを**試行**といい，試行の結果として起こる事がらを**事象**という。

1つのサイコロを投げるとき(これは1つの試行)，1の目が出る，3の倍数が出るなどは事象である。3の倍数の目が出るという事象は3の目が出る，6の目が出るという2つの事象に分解できるが，1の目が出るという事象は分解できない。このように，それ以上分解できない事象を**根元事象**(標本点)という。根元事象全体の集合を**標本空間**という。言い換えると，事象とは標本空間の部分集合といえる。



2°　確率を考えるとき，考える対象をハッキリ限定する必要がある。そのためには集合を用いると便利である。

全事象…標本空間Ωは Ω自身の部分集合であり，これを全事象という。全事象は必ず起こる事象である。

空事象…決して起こらない事象を空事象といい，ϕで表す。

余事象…事象Aが起こらないという事象をAの余事象といい，$\overline{A}$ で表す。

和事象…事象A，Bの少なくとも一方が起こるという事象をAとBの和事象といい，$A \cup B$ で表す。

積事象…事象A，Bの両方が同時に起こるという事象をAとBの積事

象といい，**A∩B** で表す。

排反事象…事象A，Bの両方が同時には起こらないとき，すなわち，A∩B＝ϕ のとき，A，Bは互いに排反であるという。(これとA，Bが独立(➜基礎問33)ということを混同してはイケナイ)

3°　確率の定義(数学的確率)　ある試行において，起こりうるすべての根元事象の数が $n(\Omega)=n$ で，その起こり方が **“同様に確からしい”** とされるとき，事象Aの起こる場合の数が $n(\mathrm{A})=a$ ならば

事象Aの起こる確率 $P(\mathrm{A})$ は　$\boldsymbol{P(\mathrm{A})=\dfrac{a}{n}}$

と定義される。

ここで，“同様に確からしい”という言葉は重要である。本問において，出た目の和を考えるならその値は

{2，③，4，5，⑥，7，8，⑨，10，11，⑫}

である。だからといって，求める確率を $\dfrac{4}{11}$ とはできない。

そもそも，上の集合を標本空間とすることがイケナイ。各根元事象が“同様に確からしい”とはいえないからだ。2つのサイコロをA，BとしてA，Bの目の和を表にすると右のようになる。結果は

$6^2=36$　個

の根元事象からなる標本空間を考えることになる。

A＼B	1	2	3	4	5	6
1	2	**3**	4	5	**6**	7
2	**3**	4	5	**6**	7	8
3	4	5	**6**	7	8	**9**
4	5	**6**	7	8	**9**	10
5	**6**	7	8	**9**	10	11
6	7	8	**9**	10	11	**12**

解　答　$a+b=3,\ 6,\ 9,\ 12\quad(1\leqq a\leqq 6,\ 1\leqq b\leqq 6)$

となる整数解の組はそれぞれ　2，5，4，1個ずつある。

求める確率は

$$\frac{2+5+4+1}{6^2}=\frac{1}{3}$$ ……(答)

基礎問 27. ▶「少なくとも……」は余事象，赤球・白球◀

袋の中に全く同様な 12 個の球が入っている。その中の 3 個は赤色，4 個は白色，5 個は青色である。いま袋の中をよくかきまぜて 4 個の球を取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1) 取り出した球の色が青色だけである。

(2) 取り出した球の色が少なくとも 2 種類である。

(3) 取り出した球の色が 3 種類である。　　(関西大)

精講

1° 標本空間はどうなるか？ 球の取り出し方を分類すると

(赤，白，青)=(0，0，4)，(0，1，3)，(0，2，2)，
(0，3，1)，(0，4，0)，(1，0，3)，(1，1，2)，(1，2，1)，
(1，3，0)，(2，0，2)，(2，1，1)，(2，2，0)，(3，0，1)，
(3，1，0)

の 14 通りがあるが，これらをまとめて標本空間とはできない。“同様の確からしさ”が問題となるからである。

(0，4，0) の取り出し方は 1 通りだが，(0，0，4) の取り出し方は青球 5 個を区別すると，どの 4 個を取るかで ${}_5C_4=5$ 通りの取り出し方があるからだ。

したがって，赤$_1$，赤$_2$，赤$_3$，白$_1$，白$_2$，……と**各球を区別して**

$${}_{12}C_4=495 \text{ 個}$$

の根元事象をもつ標本空間を考えることになる。

2° **“少なくとも……”ときたら，余事象**を考えるのが定石である。

色が少なくとも 2 種類というのは

2 種類または 3 種類

ということであり，これは

全体から 1 種類の場合を除け　ばよい。

全事象を Ω，求める事象を A とすると

$$P(\mathrm{A})=\frac{n(\mathrm{A})}{n(\Omega)}=\frac{n(\Omega)-n(\overline{\mathrm{A}})}{n(\Omega)}=1-P(\overline{\mathrm{A}})$$

となる。一般には

事象Aの確率：　$0 \leqq P(\mathrm{A}) \leqq 1$
全事象Ωの確率：　$P(\Omega)=1$
空事象ϕの確率：　$P(\phi)=0$
余事象$\overline{\mathrm{A}}$の確率：　$P(\overline{\mathrm{A}})=1-P(\mathrm{A})$

である。

解　答　(1)　$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_{12}\mathrm{C}_4}=\dfrac{5}{495}=\dfrac{1}{99}$　……(答)

(2)　余事象は，取り出した球の色が1種類であり，それは

白球4個　または　青球4個

の2通りがある。求める確率は

$$1-\frac{{}_4\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_4}{{}_{12}\mathrm{C}_4}=1-\frac{1+5}{495}=\frac{163}{165}$$　……(答)

(3)　取り出した球の色が3種類となるのは

赤球1個，白球1個，青球2個　${}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_2=3\cdot4\cdot10$
赤球1個，白球2個，青球1個　${}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_5\mathrm{C}_1=3\cdot6\cdot5$
赤球2個，白球1個，青球1個　${}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_1=3\cdot4\cdot5$

の3通りがある。求める確率は

$$\frac{120+90+60}{{}_{12}\mathrm{C}_4}=\frac{270}{495}=\frac{6}{11}$$　……(答)

▶演習◀

[27]　黒球が7個，白球が5個はいっている袋から，同時に3球を取り出すとき，それが同じ色である確率は$\boxed{}$であり，少なくとも1球が白球である確率は$\boxed{}$である。ただし，どの1球が取り出されることも同程度に期待されるものとする。　(慶大)

[28]　赤，青，黄，緑の球がそれぞれ4個ずつ合計16個箱の中に入っている。

(1)　この箱の中から3個の球を取り出すとき，それらのうち2個だけ色が一致している確率を求めよ。

(2)　この箱の中から4個の球を取り出すとき，ちょうど3種類の色が現れる確率を求めよ。　(高知大)

基礎問 28. ▶加法定理◀

n個のサイコロを投げて得られる2つの事象A，Bを次のように定める。

(A)　奇数の目ばかり出ている事象をAとする。

(B)　1の目が少なくとも1つは出ている事象をBとする。

これに関して，次の問いに答えよ。

(1)　「AかつB」という事象の起こる確率を求めよ。

(2)　「AまたはB」という事象の起こる確率を求めよ。

（和歌山県医大＊）

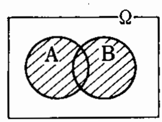
精講

1°　「かつ」，「または」という言葉は集合のとき現れた言葉である(➔基礎問1)。これを確率の言葉に直しておこう。

根元事象の起こり方がどれも同様に確からしい標本空間Ωを考える。Ωの部分集合Xの要素の個数を$n(X)$と書くなら

$$n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$

であり，両辺を$n(\Omega)$で割ると

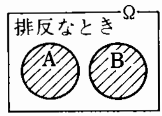


$$\frac{n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})}{n(\Omega)}=\frac{n(\mathrm{A})}{n(\Omega)}+\frac{n(\mathrm{B})}{n(\Omega)}-\frac{n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{n(\Omega)}$$

確率の定義から，左辺は「AまたはB」が起こる確率であり

$$\boldsymbol{P}(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})=\boldsymbol{P}(\mathbf{A})+\boldsymbol{P}(\mathbf{B})-\boldsymbol{P}(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})$$

が成り立つ。これを確率の**加法定理**という。



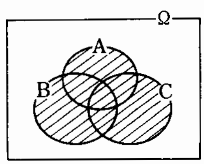
AとBが同時には起こらないとき，すなわち，**AとBが排反(A∩B＝ϕ)のとき**は　$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0$

であり

$$\boldsymbol{P}(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})=\boldsymbol{P}(\mathbf{A})+\boldsymbol{P}(\mathbf{B})$$

となる。

2°　3つの事象A，B，Cの加法定理は次のようになる。



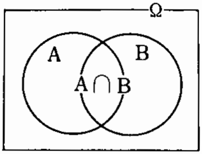
$$\boldsymbol{P}(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}\cup\mathbf{C})=\boldsymbol{P}(\mathbf{A})+\boldsymbol{P}(\mathbf{B})+\boldsymbol{P}(\mathbf{C})-\boldsymbol{P}(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})$$
$$-\boldsymbol{P}(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})-\boldsymbol{P}(\mathbf{C}\cap\mathbf{A})+\boldsymbol{P}(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\cap\mathbf{C})$$

解　答　(1)　A：奇数の目ばかりが出ている事象

B：1の目が少なくとも1つは出ている事象

$A\cap\overline{B}$ と $A\cap B$ は排反ゆえ

$$P(A)=P(A\cap\overline{B})+P(A\cap B)$$



$A\cap\overline{B}$ は1の目でない奇数，すなわち3または5の目ばかりが出ている事象であるから

$$P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap\overline{B})$$

$$=\frac{3^n}{6^n}-\frac{2^n}{6^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \cdots\cdots(答)$$

(2)　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=P(A)+(1-P(\overline{B}))-P(A\cap B)$$

$$=\frac{3^n}{6^n}+\left(1-\frac{5^n}{6^n}\right)-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$$=1+\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \cdots\cdots(答)$$

研究

1°　(1)でおこなった“排反な2つの事象に分ける”手法はよく使われる。(2)においても

$$P(A\cup B)=P(A\cap\overline{B})+P(B)$$

$$=\frac{2^n}{6^n}+\left(1-\frac{5^n}{6^n}\right)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

▶演習◀

[29]　n 個($n\geqq2$)のさいころを1度に投げるとき，1の目が少なくとも1つ出るという事象をA，偶数の目が少なくとも1つ出るという事象をB，AもBも起こらないという事象をCとする。このとき，

(1)　A，B，Cおのおのについて，それが起こる確率

(2)　AまたはBが起こる確率

(3)　Aは起こるがBは起こらない確率

(4)　AもBも起こる確率

を求めよ。　　　　　　　　　　　　　　　　(福井大)

基礎問 29. 排反事象，サイコロの最大目

3個のサイコロを投げるとき

(1)　3つの目の和が奇数となる確率を求めよ。

(2)　3つの目の最大値が奇数となる確率を求めよ。　(早大*)

精講

1°　3つの目の和が奇数となるのは

(3つとも奇数)，(1つ奇数，2つ偶数)

のいずれかであり，これらは**排反**である。それぞれの確率を計算して，加えればよい。

2°　3つの目の最大値が奇数となるのは“最大値が 1, 3, 5”のいずれかであり，これらは互いに排反である。**3つの事象A, B, Cが排反**とは

$$A\cap B=\phi,\ B\cap C=\phi,\ C\cap A=\phi$$

が同時に成り立つことである。したがって，$A\cap B\cap C=\phi$ ゆえ

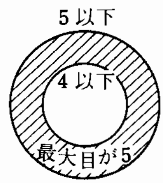
$$\boldsymbol{P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)}$$

3°　最大目が5というのは

3つの目が5

2つの目が5で他の1つが4以下

1つの目が5で他の2つが4以下



のいずれかであるが，これらを計算する必要はない。最大目をXとすると

$$P(X=5)=P(X\leqq 5)-P(X\leqq 4)$$

である。

解答　(1)　(奇，奇，奇)と(奇，偶，偶)，(偶，奇，偶)，(偶，偶，奇)に分けると

$$\frac{3^3}{6^3}+3\times\frac{3\cdot 3^2}{6^3}=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$$　……(答)

(2)　最大目が1のとき　$\dfrac{1^3}{6^3}=\dfrac{1}{216}$

最大目が3のとき　$\dfrac{3^3}{6^3}-\dfrac{2^3}{6^3}=\dfrac{19}{216}$

最大目が5のとき　$\dfrac{5^3}{6^3}-\dfrac{4^3}{6^3}=\dfrac{61}{216}$

$$\therefore\ \frac{1+19+61}{216}=\frac{3}{8}$$　……(答)

基礎問 30. ▶ベン図・カルノー図◀

2つの事象E，Fがあって

$$P(\mathrm{E})=\frac{1}{5},\ P(\mathrm{E}\cup \mathrm{F})=\frac{3}{5},\ P(\mathrm{E}\cap \mathrm{F})=\frac{1}{10}$$

のとき，次の確率を求めよ。

(1) $P(\mathrm{F})$

(2) $P(\overline{\mathrm{E}}\cap \mathrm{F})$ （実践女大）

精講

1° 加法定理 $P(\mathrm{E}\cup \mathrm{F})=P(\mathrm{E})+P(\mathrm{F})-P(\mathrm{E}\cap \mathrm{F})$

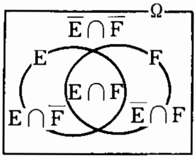
より $P(\mathrm{F})=P(\mathrm{E}\cup \mathrm{F})-P(\mathrm{E})+P(\mathrm{E}\cap \mathrm{F})$

$$=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{1}{2}$$

(2)はFを排反な2つに分けて

$$P(\overline{\mathrm{E}}\cap \mathrm{F})=P(\mathrm{F})-P(\mathrm{E}\cap \mathrm{F})=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{2}{5}$$

2° 標本空間ΩはE，Fにより4つの事象に分けられる。各事象の確率を明記するには右のカルノー図が便利である。



$\Longleftrightarrow$

	F	$\overline{\mathrm{F}}$
E	$\mathrm{E}\cap\mathrm{F}$	$\mathrm{E}\cap\overline{\mathrm{F}}$
$\overline{\mathrm{E}}$	$\overline{\mathrm{E}}\cap\mathrm{F}$	$\overline{\mathrm{E}}\cap\overline{\mathrm{F}}$

解　答 与えられた条件をカルノー図に示すと右のようになる。

	F	$\overline{\mathrm{F}}$
E	$\frac{1}{10}$	x
$\overline{\mathrm{E}}$	y	z

$$\begin{cases}\dfrac{1}{10}+x=\dfrac{1}{5}\\[2mm] \dfrac{1}{10}+x+y=\dfrac{3}{5}\end{cases}$$

$\therefore\ \ y=P(\overline{\mathrm{E}}\cap \mathrm{F})=\dfrac{2}{5}$ ……(答) (2)

$P(\mathrm{F})=\dfrac{1}{10}+y=\dfrac{1}{2}$ ……(答) (1)

II．　確率の計算・乗法定理

基礎問 31．▶条件つき確率◀

事象EとFの起こる確率をそれぞれ$\dfrac{1}{4}$および$\dfrac{1}{3}$とし，事象Eが起こったとしたときのFの起こる条件つき確率を$\dfrac{1}{2}$とするとき，事象Fが起こったとしたときのEの起こる条件つき確率を求めよ。

（東京電機大）

精講

1°　事象Aが起こったという条件のもとで事象Bの起こる確率を，AのもとでのBの**条件つき確率**といい，$\boldsymbol{P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})}$または$\boldsymbol{P(\mathrm{B}\,|\,\mathrm{A})}$で表す。

“事象Aが起こった条件のもとで……”ということは，これから考える標本空間をAにとれということであり，その中での事象Bの起こる確率を考えるのであるから，右のカルノー図で各事象の根元事象の個数をa，b，c，dとし，全事象Ωの個数をnとすると

	B	$\overline{\mathrm{B}}$
A	a	b
$\overline{\mathrm{A}}$	c	d

$a+b+c+d=n$

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{a}{a+b}=\frac{\dfrac{a}{n}}{\dfrac{a+b}{n}}$$

もとの標本空間Ωにおいては

$$\frac{a}{n}=P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}),\quad \frac{a+b}{n}=P(\mathrm{A})$$

であり

$$\boldsymbol{P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}}$$

となる。ここで，Aは A$\neq\phi$，すなわち，$P(\mathrm{A})\neq 0$ とする。

2°　条件つき確率でも，前節でのべた確率の基本的性質

$0\leqq P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})\leqq 1$，$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{A})=1$，$P_{\mathrm{A}}(\phi)=0$，

$P_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{B}})=1-P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$，

$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})=P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})+P_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})-P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})$

はそのまま成立する。たとえば，加法定理なら

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})=\frac{P\{\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})\}}{P(\mathrm{A})}=\frac{P\{(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})\}}{P(\mathrm{A})}$$
$$=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+P(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C})}{P(\mathrm{A})}$$
$$=P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})+P_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})-P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})$$

解　答　条件より

$$P(\mathrm{E})=\frac{1}{4},\quad P(\mathrm{F})=\frac{1}{3},\quad P_{\mathrm{E}}(\mathrm{F})=\frac{P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})}{P(\mathrm{E})}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad P_{\mathrm{F}}(\mathrm{E})=\frac{P(\mathrm{F}\cap\mathrm{E})}{P(\mathrm{F})}=\frac{P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})}{P(\mathrm{F})}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{8}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

研究

右のカルノー図で，各事象の確率を x，y，z，u とすると

$$x+y+z+u=1$$

	F	$\overline{\mathrm{F}}$	
E	x	y	$\frac{1}{4}$
$\overline{\mathrm{E}}$	z	u	
	$\frac{1}{3}$		

条件より

$$x+y=\frac{1}{4},\quad x+z=\frac{1}{3},\quad \frac{x}{x+y}=\frac{1}{2}$$

解いて

$$x=y=\frac{1}{8},\ \left(z=\frac{5}{24},\quad u=\frac{13}{24}\right)$$

$$\therefore\quad P_{\mathrm{F}}(\mathrm{E})=\frac{x}{x+z}=\frac{1}{8}\div\frac{1}{3}=\frac{3}{8}$$

▶演習◀

[30]　2つの事象A，Bが $P(\mathrm{A})=0.3$，$P(\mathrm{B})=0.6$，$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0.1$ であるとき，$P(\mathrm{A}\mid\overline{\mathrm{B}})=$ $\boxed{}$ である。　（日本大）

[31]　4枚のカードのうち，1枚目と2枚目のカードは両面とも赤色，3枚目は両面とも白色，残りの1枚は片面が赤色でその裏は白色である。これら4枚のカードを順序も表裏もでたらめにして，1枚を取り出したら1つの面が赤色であった。その裏が白である確率を求めよ。

（自治医大）

基礎問 32. ▶乗法定理◀

1つの試行で起こりうる2つの事象A，Bについて，確率

$$P(\mathrm{A})=\frac{1}{3},\quad P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{1}{4},\quad P(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})=\frac{1}{2}$$

が与えられているとき，次の確率を求めよ。

(1)　$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$　　(2)　$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$　　(3)　$P(\mathrm{B})$

精講

1°　条件つき確率　$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\dfrac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}$　を変形すると

$$\boldsymbol{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})}$$

となる。これを確率の**乗法定理**という。

事象A，Bに時間的なずれがあるわけではないので

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})=P(\mathrm{B})P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$$

とすることもできる。

2°　乗法定理は3つ以上の事象についても成り立つ。

$$\begin{aligned}P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C})&=P\{(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cap\mathrm{C}\}\\&=P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})P_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}(\mathrm{C})\\&=P(\mathrm{A})P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})P_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}(\mathrm{C})\end{aligned}$$

といった具合である。

解　答　(1)　$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$　　……(答)

(2)　$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\overline{\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}})=1-P(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})=\dfrac{1}{2}$　　……(答)

(3)　加法定理より　$P(\mathrm{B})=P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})-P(\mathrm{A})+P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$$　　……(答)

研究

右のカルノー図より

$y=\dfrac{1}{4}$，$z=\dfrac{1}{6}$

これより，(1)，(2)，(3)を求めることもできる。

	B	$\overline{\mathrm{B}}$	
A	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$	y	$\frac{1}{3}$
$\overline{\mathrm{A}}$	z	$\frac{1}{2}$	

基礎問 33. ▶事象の独立◀

1枚の硬貨を3回投げる試行で，1回目に表が出る事象をE，少なくとも2回表が出る事象をF，3回とも同じ面である事象をGとする。

(1) 事象E，F，G，E∩F および E∩G のそれぞれが起こる確率を求めよ。

(2) 事象EとFは独立であるかどうかを調べよ。

(3) 事象EとGは独立であるかどうかを調べよ。　(宮崎医大)

精講

1° 次の例を考えてみる。

(例1) 硬貨を2回投げる。1回目に表が出るという事象をA，2回目に表が出るという事象をBとする。このとき，Bの確率はAが起ころうが，起こるまいが，影響されず $P(\mathrm{B})=\frac{1}{2}$ としてよいのは明らかであろう。

(例2) 4本のうち2本の当たりくじがあるくじ引きを考える。1回目に当たりくじをひくという事象をA，2回目に当たりくじを引くという事象をBとする。このとき，

Aが起こったときのBの起こる確率　$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{1}{3}$

Aが起こらなかったときのBの起こる確率　$P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=\frac{2}{3}$

であり，Bの起こる確率はAが起こるか起こらないかに影響されることがわかる。

(例1)のように，Bの確率がAの確率に影響されないとき，BはAから**独立**，(例2)のように影響されるときは**従属**という。

2° もう少し，独立の定義をはっきりさせておく。
Bの確率がAが起こるか起こらないかに影響されないとは

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=P(\mathrm{B})$$

ということである。$P(\mathrm{A})$，$P(\overline{\mathrm{A}})\neq 0$ のとき，乗法定理
$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ より

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=P(\mathrm{B}) \Longleftrightarrow P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})P(\mathrm{B})$$

である。

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}$$

であるから　$P_A(B)=P(B) \iff P_{\overline{A}}(B)=P(B)$

が導かれる。すなわち

$$P_A(B)=P(B),\quad P_{\overline{A}}(B)=P(B)$$
$$P_A(B)=P_{\overline{A}}(B),\quad P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

はすべて同値であり，どれを独立の定義としてもよい。第 4 の式は $P(A)=0, P(\overline{A})=0$ のときも意味をもつから，これを独立の定義とする。

3°　いま，事象Bが A から独立ということを　$P(A\cap B)=P(A)P(B)$ と定義したが，$A\cap B=B\cap A$ でもあるから，これは

$$P(B\cap A)=P(B)P(A)$$

でもあり，事象AがBから独立ということでもある。すなわち，AとBは互いに独立なのである。まとめると

事象 A と B が互いに独立 $\iff$ $\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A)P(B)}$

解　答　根元事象の個数は $2^3=8$　表を○，裏を×とすると

E＝{(○○○)，(○○×)，(○×○)，(○××)}

F＝{(○○○)，(○○×)，(○×○)，(×○○)}

G＝{(○○○)，(×××)}

(1)　$P(E)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$，$P(F)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$，$P(G)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$　……(答)

E∩F＝{(○○○)，(○○×)，(○×○)}

E∩G＝{(○○○)}　であるから

$P(E\cap F)=\frac{3}{8}$，$P(E\cap G)=\frac{1}{8}$　……(答)

(2)　$P(E\cap F)\neq P(E)P(F)$ より，EとFは独立でない。　……(答)

(3)　$P(E\cap G)=P(E)P(G)$ より，EとGは独立である。　……(答)

▶演習◀

[32]　1 回の試行によって起こる 2 つの事象A，Bに対して

$P(\overline{A}\cup\overline{B})=\frac{3}{4}$ で，$P_A(B)=\frac{1}{3}$ である。このとき，$P(A)=\boxed{}$

さらに，AとBが独立であれば $P(A\cup B)=\boxed{}$。　(日本大)

基礎問 34. くじ引きは公平

(1)　25本中に6本の当たりくじが入っているくじがある。

(i)　このくじを続けて3本引くとき，当たりくじがちょうど2本入っている確率は $\boxed{}$ である。

(ii)　このくじをはじめにAが1本引き，次にBが1本引くとき，Bの引いたくじが当たりくじである確率は $\boxed{}$ である。

(2)　20本中に $\boxed{}$ 本の当たりくじが入っているくじがある。このくじを続けて2本引くときに，そのうちの少なくとも1本が当たりくじである確率は $\dfrac{7}{19}$ である。　　　(共通1次)

精講

1°　まず，**“くじ引きは引く順序に関係なく公平”**であることを確認しておこう。

n 本のうち r 本の当たりくじがあるくじ引きを考える。$(n>r>0)$。1回目に当たりくじをひくという事象をA，2回目に当たりくじをひくという事象をBとすると

$$P(\mathrm{A})=\frac{r}{n}$$

Bについては(○○)，(×○)の2通りがあり

$$\begin{aligned} P(\mathrm{B})&=P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}) && \text{(加法定理)}\\ &=P(\mathrm{A})P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})+P(\overline{\mathrm{A}})P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B}) && \text{(乗法定理)}\\ &=\frac{r}{n}\cdot\frac{r-1}{n-1}+\frac{n-r}{n}\cdot\frac{r}{n-1}\\ &=\frac{r(r-1+n-r)}{n(n-1)}=\frac{r}{n} \end{aligned}$$

$$\therefore\quad P(\mathrm{A})=P(\mathrm{B})$$

2°　この方法で k 回目に当たりくじをひく確率を計算するのは大変だ。3回目を考えただけでも(○○○)，(○×○)，(×○○)，(××○)の場合分けが必要になる。では，どうするか。

n 本のくじを1列に並べた順列を考えるとよい。k 番目に当たりくじがくることと，k 回目に当たりくじをひくことが対応するから

○	×	○	×	……	○	……	×
1	2	3	4		k		n

k 回目に当たりくじを引く確率は

$$\frac{r(n-1)!}{n!}=\frac{r}{n}$$

ここで，くじはすべて区別がつくものとして，分母は異なる n 個のものの順列，分子ははじめに k 番目に当たりくじを置き（r 通り），残り $n-1$ 個を並べるとした。

他にも，○が r 個，×が $n-r$ 個の同じものを含む順列と考え

$$\frac{\dfrac{(n-1)!}{(n-r)!\,(r-1)!}}{\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}}=\frac{(n-1)!\,r!}{n!\,(r-1)!}=\frac{r}{n}$$

○の場所を決めればよいのだから　$\dfrac{{}_{n-1}C_{r-1}}{{}_nC_r}=\dfrac{r}{n}$

と考えることもできる。各自，納得のいく方法で理解すればよい。

解　答　(1)　(i)くじの引き方は，○○×，○×○，×○○の 3 通りがあり，これらは排反であるから

$$\frac{6}{25}\cdot\frac{5}{24}\cdot\frac{19}{23}\times3=\frac{57}{460}$$　……(答)

(ii)　くじ引きは引く順序に関係しないから　$\dfrac{6}{25}$　……(答)

(2)　r 本の当たりくじがあるものとして，余事象を考えると

$$\frac{20-r}{20}\cdot\frac{19-r}{19}=1-\frac{7}{19}$$

$\therefore\quad (r-4)(r-35)=0$

$0<r<20$　より　　$r=4$　(本)　……(答)

▶演習◀

[33]　10 本のくじがあり，1 等 1 本，2 等 2 本の当たりくじが入っている。3 本のくじを引いて

(1)　1 等が当たる確率は $\boxed{}$ であり，

(2)　1 本だけが当たりくじである確率は $\boxed{}$ であり，

(3)　1 等 1 本，2 等 1 本が当たる確率は $\boxed{}$ であり，

(4)　3 本ともはずれの確率は $\boxed{}$ である。　（立命館大）

基礎問 35. ▶復元・非復元抽出◀

袋のなかに赤球が4個，白球が6個，黒球が5個はいっている。この袋から2個の球をとり出すのに，次の2通りのしかたを考える。それぞれの場合について，とり出した2個の球の色が異なる確率を求めよ。

(1) 最初に1個をとり出し，袋に返してから2個目をとり出す場合。

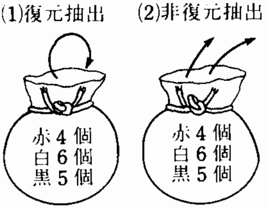
(2) 最初に1個をとり出し，袋に返さないで2個目をとり出す場合。　(弘前大)

精講

(1)は**復元抽出**で，(2)は**非復元抽出**である。復元抽出では，2個目の球のとり出し方は1個目の球のとり出した方に影響されないから，独立の定義より

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

である。



非復元抽出のときは，影響をうけるので，乗法定理

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)$$

を使う。

独立の定義を $P_{A_1}(A_2) = P(A_2)$ と考えれば，独立事象の乗法定理は従属事象の乗法定理の特別な場合とみてよい。

解答 (1回目の色，2回目の色)で，2個の球の色が異なるのは，(赤，白)，(赤，黒)，(白，黒)と逆の順序の(白，赤)，(黒，赤)，(黒，白)の6通りがある。

(1) $\left(\frac{4}{15}\cdot\frac{6}{15}+\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{15}+\frac{6}{15}\cdot\frac{5}{15}\right)\times 2=\frac{148}{225}$ ……(答)

(2) $\left(\frac{4}{15}\cdot\frac{6}{14}+\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{14}+\frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14}\right)\times 2=\frac{74}{105}$ ……(答)

研究

余事象を考えると場合分けが少ない。

(1) $1-\left\{\left(\frac{4}{15}\right)^2+\left(\frac{6}{15}\right)^2+\left(\frac{5}{15}\right)^2\right\}=\frac{148}{225}$

(2) $1-\left(\frac{4}{15}\cdot\frac{3}{14}+\frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14}+\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\right)=\frac{74}{105}$

基礎問　36．　▶ポリヤの壺◀

白球5個と赤球4個が入っている袋がある。この袋から1球を取り出す。それが白球であれば，取り出した白球にさらに2個の白球を加えてもとの袋に戻す。取り出した球が赤球であれば，2個の赤球を加えてもとの袋に戻す。2回目および3回目も同様に，白球が取り出されれば2個の白球を追加し，赤球が取り出されれば2個の赤球を追加してもとに戻す。

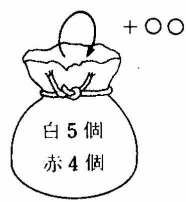
(1)　この3回の操作の過程で，白球が2回，赤球が1回取り出される確率を求めよ。

(2)　3回目に取り出された球が白球である確率を求めよ。

（豊橋技科大）

精講

同じ色の球を加えて袋にもどす非復元抽出の問題は**ポリヤの壺**として知られている。どちらの球をとり出しても，その次に取り出すときには，前と同じ色の球の出る確率がふえる。これは，1度取り出すと次に起こる確率がふえる伝染病のような現象のモデルとして扱われている。



(2)は何回目に取り出すかにかかわらずつねに $\frac{5}{9}$ $\left(\text{赤球が取り出される確率は } \frac{4}{9}\right)$ となる(➔研究)。

解答　(1)　球の取り出し方は(白，白，赤)，(白，赤，白)，(赤，白，白)の3通りあるから

$$\frac{5}{9}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{4}{13}+\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{13}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{7}{13}=\frac{140}{429} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　(白，白，白)，(白，赤，白)，(赤，白，白)，(赤，赤，白)の4通りがあり

$$\frac{5}{9}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{9}{13}+\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{13}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{7}{13}+\frac{4}{9}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{13}$$

$$=\frac{5}{9} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

研究

白球a個と赤球b個が入った袋がある。この袋から1球を取り出すとき，白球が出たらさらに白球をα個加えてもどし，赤球が出たらさらに赤球をβ個加えてもどすことにする。これをn回くり返すとき，n回目に白球が取り出される確率をP_nとおくことにする。

$\alpha=\beta=0$ のとき，さいころに代表される復元抽出であり

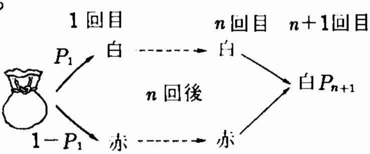
$$P_n=\frac{a}{a+b}$$

$\alpha=\beta=-1$ のとき，白球を当たり，赤球をはずれと考えればくじ引きの非復元抽出である。くじ引きは公平であったから

$$P_n=\frac{a}{a+b}$$

実は $\alpha=\beta$ でありさえすれば，つねに $P_n=\dfrac{a}{a+b}$ である。数学的帰納法でこれを示そう。

$n=1$ のとき，$P_1=\dfrac{a}{a+b}$ は明らか。



次に，nでの成立を仮定すると

$$P_{n+1}=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+\alpha}{a+b+\alpha}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b+\beta}$$

$$=\frac{a}{a+b}\left(\frac{a+\alpha}{a+b+\alpha}+\frac{b}{a+b+\beta}\right)=\frac{a}{a+b}\quad(\because\quad \alpha=\beta)$$

よって，$n+1$ のときも成り立つ。

▶演習◀

[34] 袋の中に白球と赤球がはいっている。この袋の中から無作為に1個の球を取り出して，それが白球だったならばそのまま袋の中にもどし，赤球だったならばそれを袋の中にもどした上あらたに1つの赤球を袋の中に加える。これを1回の操作とかぞえる。はじめに袋の中に白球。赤球がそれぞれ1個ずつはいっていたとして，この操作をn回くり返したあと，袋の中に2個の球，$n+2$個の球，3個の球がはいっている確率をそれぞれp_n，q_n，r_nとする。p_n，q_n，r_nを求めよ。　　（一橋大）

基礎問 37. 樹形図の活用（I）

1個のバクテリアが10分後に2個，1個，0個になる確率がそれぞれ$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$であるとする。1個のバクテリアが

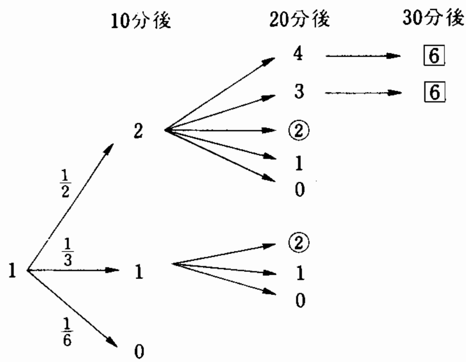
(1) 20分後に2個になっている確率

(2) 30分後に6個になっている確率

を求めよ。　（名古屋大-文系）

精講

状況の推移は樹形図で表すとよい。視覚的にすべての場合をみることができる。本問においては



解　答 (1) 10分後に2個になったバクテリアがさらに10分後も2個であるのは (1, 1) → (1, 1), (2, 0), (0, 2) の3通り。求める確率は

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{36} \quad \cdots\cdots(答)$$

(2) 20分後から30分後に4→6となるのは，(1, 1, 1, 1) → {2, 2, 2, 0}, {2, 2, 1, 1} の組合せを考えて

$${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{6}+{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times{}_2C_1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{96} \quad \cdots\cdots(答)$$

基礎問 38. ▶樹形図の活用(II)◀

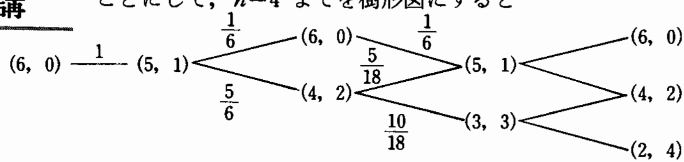
A，B 2つの箱がある。箱Aには1から6までの番号をつけた6個の球が入っており，箱Bは空である。いま，さいころを投げて，出た目と同じ番号の球を，それが入っている箱から他の箱に入れかえるという操作を行う。さいころをn回投げたときの箱Aの中の球の数をa_nとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　$a_2=6$ となる確率を求めよ。

(2)　$a_3=5$ となる確率を求めよ。

(3)　$\sum_{i=1}^{4} a_i$ のとり得る値をすべて求めよ。　　　　(山形大)

精講　球が箱Aにa個，箱Bにb個ある状態を$(a,\ b)$とかくことにして，$n=4$ までを樹形図にすると



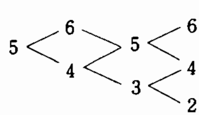
ここで，(4, 2) —— (5, 1) の確率$\frac{5}{18}$は，$(5,\ 1)\ \frac{5}{6}\ (4,\ 2)\ \frac{2}{6}\ (5,\ 1)$ を計算して，$\frac{5}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{18}$ としてある。

解　答　(1)　1回目と2回目が同じ目であればよいから

$1\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$　　……(答)

(2)　上の樹形図より　$\frac{1}{6}+\frac{5}{18}=\frac{4}{9}$　　……(答)

(3)　$a_1\sim a_4$のおこり得る状態を樹形図にすると右のようになる。よって$\sum_{i=1}^{4} a_i$のとり得る値は　22，20，18，16，14の5通りである。　　……(答)



基礎問 39．　▶ジャンケンの確率◀

ジャンケンを3人でして，負けた者から順に抜けてゆき，最後に残った1人を優勝者とする。このとき

(1)　1回で優勝者が決まる確率は $\boxed{}$ である。

(2)　1回終了後に2人残っている確率は $\boxed{}$ である。

(3)　3回終了後に3人残っている確率は $\boxed{}$ である。

(4)　ちょうど3回目で優勝者が決まる確率は $\boxed{}$ である。

ただし，各人がジャンケンでどれを出す確率もすべて同じで，$\dfrac{1}{3}$ であるとする。　（共通1次）

精講

ジャンケンの問題については

“だれ”が“どの手”で勝つか（負けるか）

と頭の中で念じながら計算していくとよい。

（例1）　2人が1回ジャンケンをすると，手はグー，チョキ，パーの3通りで，2人の出し方は　$3^2=9$　（通り）。

そのうち，引き分けは2人が同じものを出す3通り。残りはどちらかが勝つので，勝つのも負けるのも同じ確率となる。

引き分けの確率 $\dfrac{1}{3}$，　勝つ確率 $\dfrac{1}{3}$，　負ける確率 $\dfrac{1}{3}$

（例2）　3人が1回ジャンケンをすると，3人の手の出し方は $3^3=27$　（通り）

そのうち，引き分けは“3人とも同じ手”を出すか“3人とも違う手”を出すかのどちらかである。これは　$3+3!=9$　（通り）。残りは1人が勝つ，2人が勝つのどちらかであるが，2人が勝つのは1人が負けるということであり，1人が勝つのも1人が負けるのも同じ確率である。

引き分け $\dfrac{1}{3}$，　1人勝ち $\dfrac{1}{3}$，　2人勝ち $\dfrac{1}{3}$

解答　(1)　“だれ”が“どの手”で勝つかを考えて

$$\frac{3\cdot 3}{3^3}=\frac{1}{3}$$ ……（答）

(2)　“だれ”が“どの手”で負けるかを考えて

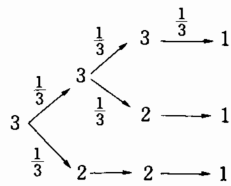
$$\frac{3\cdot 3}{3^3}=\frac{1}{3}$$ ……(答)

(3)　1回のジャンケンで3人が残る(引き分け)となるのは

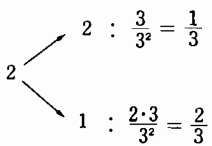
$$1-\{(1)+(2)\}=\frac{1}{3}$$

これが3回続くので　$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$ ……(答)

(4)　人数の変化を樹形図にすると右のようになる。



2人のジャンケンの確率は



したがって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{27}$$ ……(答)

▶演習◀

[35]　3人の人がジャンケンによって，1人だけ勝者を決めたい。3人はそれぞれグー，チョキ，パーを同じ確率で出すとする。あいこの場合は，もう一度ジャンケンをし，2人が勝った場合には，その2人でジャンケンをする。

(1)　1回目のジャンケンで，2人が勝つ確率を求めよ。

(2)　2回ジャンケンをしても，まだ勝者が1人に決まらない確率を求めよ。

(3)　n回ジャンケンを続けても，勝者が1人に決まらない確率を求めよ。

(横浜市大)

[36]　4人でジャンケンをし，負けたものが順次去って，残りでジャンケンをして，勝者が1人になるまで続けるものとする。

(1)　1回でゲームが終了する確率p_1および2回目の勝負がm人($m=2$, 3, 4)で行われる確率p_mを求めよ。

(2)　2回でこのゲームが終了する確率qを求めよ。　(京大)

基礎問 40．ゲームの優勝

5回戦の試合を甲，乙2チームで戦うものとする。第1回戦において両チームの勝つ確率は同じであるが，第2回戦以降においては，前回勝ったチームが再び勝つ確率が $\frac{2}{3}$ になるものとする。先に3回勝ったチームを優勝とし，引き分けはないものとする。

(1)　乙が第1回戦で勝ち，あと2回戦から4回戦まで連続して甲が勝つ確率を求めよ。

(2)　第1回戦において勝ったチームが優勝する確率を求めよ。

（福岡大）

精講　どちらの立場からみて，優勝なのかをはっきりさせることである。(1)は

乙の立場からみると　○×××

甲の立場からみると　×○○○

(2)は第1回戦はどちらが勝ってもよく，すなわち，このときの確率は1であり，このチームの第2回戦以後の勝敗を調べればよい。たとえば，○×○○　として優勝が決まるのは

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$$

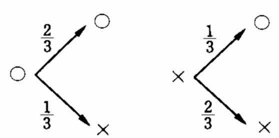
である。これを $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{27}$ としてはならない。

解答　(1)　甲の立場からみると

×○○○

であるから，求める確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{27}\ \cdots\cdots(\text{答})$$



(2)　(1)の方針をつらぬき，第1回戦において負けたチームが優勝する確率，すなわち，余事象を考えることにする。

考えられる状態は

×○○○，××○○○，×○×○○，×○○×○

の4通りがあり

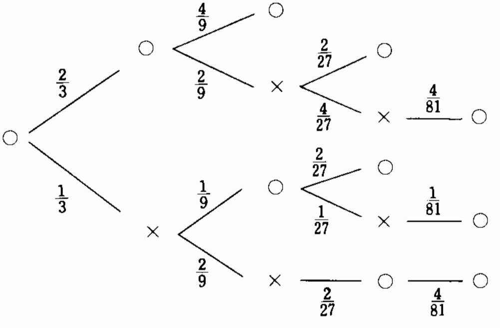
$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{12+8+2+2}{3^4}=\frac{8}{27}$$

よって，求める確率は

$$1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$$ ……(答)

研究　(2)　第1回戦において勝ったチームが優勝する状態を樹形図にして，確率を書きこんでいくと次のようになる。



求める確率は　$\frac{4}{9}+\frac{2}{27}+\frac{4}{81}+\frac{2}{27}+\frac{1}{81}+\frac{4}{81}=\frac{19}{27}$

【注】　解答のように，余事象を考えると場合分けは4通りで，計算が少なくすんでいることに注意。

▶演習◀

[37]　AチームとBチームが同じゲームを繰り返し，先に3回勝ったチームが優勝とする。このとき，次の確率を求めよ。ただし，AチームとBチームは力が同等とみなされ，引き分けはないものとする。

(1)　Aチームが初めから引き続いて2回勝った後で，Aチームが優勝する確率。

(2)　Aチームが最初に勝った後で，Aチームが優勝する確率。

（追手門学院大）

基礎問 41. ▶条件つき確率◀

原点から出発して数直線上を動く点Pがある。硬貨を投げて表が出たら点Pは右へ1だけ，裏が出たら左へ1だけ進む。ただし，点Pは座標 -1 の点に到達すると硬貨の表裏にかかわらずこの点に止まっているものとする。硬貨を n 回投げたときの点Pの座標を X_n とするとき，

(1)　$X_3=-1$，$X_3=0$ となる確率をそれぞれ求めよ。

(2)　$X_2 \neq -1$ という条件のもとで $X_5=-1$ となる確率を求めよ。

（姫路工大）

解答　(1)　表を○，裏を×，どちらでもよいときを△で表すと，$X_3=-1$ となるのは

○××　または　×△△

の2通りがある。

$$P(X_3=-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{5}{8} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

奇数回目にPが原点にくることはないから

$$P(X_3=0)=0 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$X_2 \neq -1$ となるのは，1回目に表が出たときであり

$$P(X_2 \neq -1)=\frac{1}{2}$$

$(X_2 \neq -1)\cap(X_5=-1)$ となるのは

○　○　×　×　×
○　×　○　×　×
○　×　×　△　△

の3通りがあり

$$P((X_2 \neq -1)\cap(X_5=-1))$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 1^2=\frac{3}{16}$$

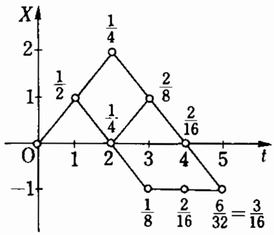
よって，求める条件つき確率は

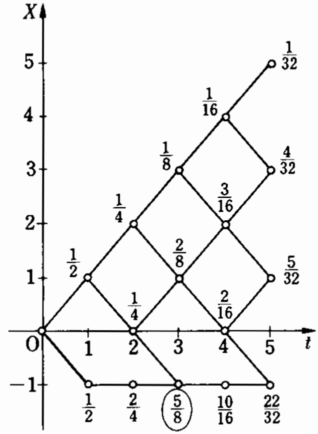
$$P_{X_2 \neq -1}(X_5=-1)=\frac{P((X_2 \neq -1)\cap(X_5=-1))}{P(X_2 \neq -1)}$$

$$=\frac{3}{16}\div\frac{1}{2}=\frac{3}{8} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

研究　5回目までの状態を樹形図にして，確率をかき込むと右図のようになる。

(2)を樹形図にすると下図のようになる。





また，(2)を直接計算すると．②の位置は2通りあり，③，④，⑤のとり方は○，×でそれぞれ2通りあるから $2^4=16$ 通りの根元事象があり，求める確率は $\dfrac{1+1+4}{16}=\dfrac{3}{8}$

②	③	④	⑤	
$X=2$	×	×	×	1通り
$X=0$	○	×	×	1通り
	×	△	△	4通り

▶演習◀

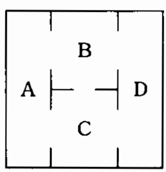
[38]　図のような4つの部屋A，B，C，Dがあり，1匹のねずみが1秒ごとに，表に与えられた確率で部屋を移動するものとする。

はじめにAにいたとして，次の確率を求めよ。

(1)　3秒後にDにいない確率。

(2)　4秒後にDにいる確率。

(3)　3秒後までに少なくとも1回はBにいたことがわかったとき，4秒後にDにいる確率。



〜へ ／ 〜から	A	B	C	D
A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
B	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
D	0	0	0	1

(名古屋大)

基礎問 42. ▶原因の確率◀

3つの箱A，B，Cがある。箱Aの中には赤球が3個，白球が2個入っている。箱Bの中には赤球が3個，白球が4個入っている。いま，A，Bからそれぞれ1球ずつ取り出し，色を確かめずに箱Cに入れた。次に答えよ。

(1) 箱Cに赤球がふくまれる確率を求めよ。

(2) 箱Cから1球を取り出したとき，それが赤球である確率を求めよ。

(3) 箱Cから1球を取り出したときにそれが赤球であった場合，この赤球が箱Aに入っていた赤球である確率を求めよ。

（九州工大）

精講

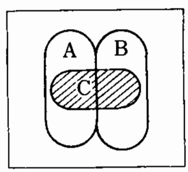
1° 本問3のように，ある事象が起こったという結果から，この結果をもたらした原因がどの事象によるものかという確率を考えることがある。このとき，この確率を**原因の確率**という。時間の流れから考えると，原因があって，結果が生じるのであるから，原因の確率というのは，時間の逆行であるが，条件つき確率として考えれば何んら難しいことはない。

2° 互いに排反な事象A，Bのどちらかを原因として，事象Cが起こったとしてみよう。Cが起こった原因がAである確率は

$$P_{C}(A)=\frac{P(C\cap A)}{P(C)}$$

$$=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}$$

$$=\frac{P(A)P_{A}(C)}{P(A)P_{A}(C)+P(B)P_{B}(C)}$$



となる。これを**ベイズの定理**(Bayes)という。

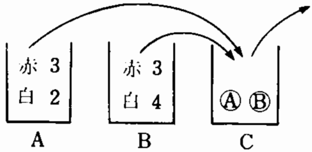
上の式で，C∩A＝A∩C というあたりまえの式が，時間の逆行を可能にしていることに注意せよ。

同じようにして，Cが起った原因がBである確率は

$$P_{C}(B)=\frac{P(B)P_{B}(C)}{P(A)P_{A}(C)+P(B)P_{B}(C)}$$

解答 (1) 余事象を考えると，
求める確率は

$$1-\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}=\frac{27}{35}$$ ……(答)



(2) 箱Cから赤球を取り出すのは

(ア) 箱Aから赤球を取り出し，その赤球を箱Cから出す

(イ) 箱Bから赤球を取り出し，その赤球を箱Cから出す

のどちらかであり，箱A，B，Cから赤球を取り出す事象をそれぞれ A，B，Cとすると

$$P(\mathrm{C})=P(\mathrm{A})P_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})+P(\mathrm{B})P_{\mathrm{B}}(\mathrm{C})$$
$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{18}{35}$$ ……(答)

(3) $$P_{\mathrm{C}}(\mathrm{A})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})}{P(\mathrm{C})}=\frac{P(\mathrm{A})P_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})}{P(\mathrm{C})}$$
$$=\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)\div\frac{18}{35}=\frac{7}{12}$$ ……(答)

研究

別解 (1) A，Bは独立ゆえ $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})P(\mathrm{B})$ であり，加法定理より

$$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{27}{35}$$

(2) 箱Cに赤球1個となるのは $\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{18}{35}$

箱Cに赤球2個となる場合も考えると，求める確率は

$$\frac{18}{35}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{7}\right)\times1=\frac{18}{35}$$

▶演習◀

[39] ほんとうのことをいう確率が80％の人が3人いる。いま硬貨を投げたところ，3人とも「表が出た」と証言した。ほんとうに表が出た確率はいくらか。 (甲南大)

III. 独 立 試 行

基礎問 43. ▶独立試行の定理◀

ある試行において，事象Eの起きる確率をp，起きない確率をq($q=1-p$)とする。この試行を独立に，次の(A)または(B)のどちらかが起きるまでくり返し行い，そのときの試行回数をXとする。

(A)　事象Eが2回起きる。

(B)　N回試行を行う。(ただし，$N \geqq 3$ とする)。

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$i \leqq N-1$ のとき，$X=i$ となる確率を求めよ。

(2)　$X=N$ となる確率を求めよ。　　　　　(奈良県医大)

精講

1°　2つの試行 T_1，T_2(サイコロ投げのように同じ試行のくり返しでもかまわない)があって，T_1 の次に T_2 が行われるものとする。このとき，T_1 の結果が T_2 に何んら影響をおよぼさないとき，これらの**試行は独立である**という。

2°　1つの試行Tを前の試行とは何んら関係なくn回くり返し，その中で事象Aが何回起こったかを考えよう。1回の試行で事象Aの起こる確率をpとする。たとえば，4回の独立試行においてAが1回起こる確率は $q=1-p$ とおくと

○×××	×○××	××○×	×××○
$p\cdot q^3$	$q\cdot p\cdot q^2$	$q^2\cdot p\cdot q$	$q^3\cdot p$

これらは排反ゆえ

$$p\cdot q^3+q\cdot p\cdot q^2+q^2\cdot p\cdot q+q^3\cdot p=4pq^3$$

ここでの $4pq^3$ の4は，4回の試行のうちどの回でAが起こるかの場合の数であり　${}_4C_1$　と理解される。

同じように考えて，n回の独立試行においてAがr回起こる確率 P_r は

$$\boldsymbol{P_r={}_nC_rp^rq^{n-r}\quad(0 \leqq r \leqq n,\ q=1-p)}$$

である。これを**独立試行の定理**という。

解　答 (1) $X=i(i\leqq N-1)$となるのは，(A)が生じたときであり，$i-1$回目までに事象Eが1回起き，i回目に2回目の事象Eが起きる確率を求めればよい。すなわち，

$${}_{i-1}C_1pq^{i-2}\cdot p=(i-1)p^2q^{i-2} \quad \cdots\cdots(答)$$

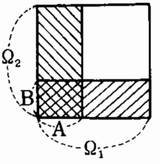
(2) $X=N$となるのは，$N-1$回目までに事象Eが1回起きているか1回も起きていないかのどちらかである(N回目はEが起きても起きなくてもよい)。

$${}_{N-1}C_1pq^{N-2}+q^{N-1}$$
$$=\{(N-1)p+q\}q^{N-2} \quad \cdots\cdots(答)$$

研究　2つの試行T_1，T_2の独立性は次のように定義される。T_1，T_2の標本空間をΩ_1，Ω_2とし，その中の任意の事象$A\subseteqq\Omega_1$，$B\subseteqq\Omega_2$を考える。このとき，

$$P(A\times B)=P(A\times\Omega_2)\cdot P(\Omega_1\times B)$$

が成り立つならば，試行T_1，T_2は独立であるという。



2つの試行の直積空間$\Omega_1\times\Omega_2$を考えて試行の独立を定義するわけだが，これは大学のレベルである。高校数学においては，“影響を与えない”という直観的な理解で十分である。

▶演習◀

[40]　1個のサイコロを投げて奇数の目が出たら2点，偶数の目が出たら1点とする。0点から始めてこの試行を繰り返して行うとき，得点の合計が7点となる確率を求めよ。　(中央学院大)

[41]　1回の試行で事象Aが起こる確率を$p(0<p<1)$とする。いま，9回の試行を行なうものとし，次の問いに答えよ。

(1) 事象Aがn回起こる確率を$X_n(n=0, 1, \cdots\cdots, 9)$で表す。$p=\dfrac{1}{3}$のとき，$X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7+X_8+X_9$の値を求めよ。

(2) (1)で定めたX_nに対して，$X_4<X_5+X_6$となるpの範囲を求めよ。

(3) 事象Aが1回目の試行から連続4回以上起こり，しかも連続8回以上は起こらない確率Qを求めよ。　(早大)

基礎問 44. ▶ゲームの優勝◀

Aチームと Bチームが対戦をくりかえすゲームがあり，毎回勝敗を決定し，引き分けはないものとする。どちらかが4勝すればゲームを打ち切り，4勝した方をそのゲームの勝者とする。

(1)　1回の対戦でAチームが勝つ確率を p として，6回以内にゲームの勝者が決定する確率を求めよ。

(2)　1回の対戦でAチームが勝つ確率がBチームのそれの2倍であるとき，このゲームでBチームが勝者となる確率を求めよ。

（九州歯大）

精講　ゲームの対戦回数は，4試合から7試合まで考えられる。勝者の立場から勝敗をながめると

4回目に勝者が決定　○○○○

5回目に勝者が決定　$\underbrace{\text{○○○×}}$○

6回目に勝者が決定　$\underbrace{\text{○○○××}}$○

7回目に勝者が決定　$\underbrace{\text{○○○×××}}$○

となる。ここで，$\underbrace{\text{○○○×}}$としたのは，$\underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots}$の範囲で○3個と×1個の順序は自由にとれるという意味である。つまり，この場合は

${}_4C_3=4$　通りの試合運びが考えられる。

解答　(1)　余事象を考える。6回までに勝者が決定しないのは，3勝3敗のときであり

$${}_6C_3p^3(1-p)^3=20p^3(1-p)^3$$

求める確率は　$1-20p^3(1-p)^3$　……(答)

(2)　Aが勝つ確率を p とすると　$p=2(1-p)$

$$p=\frac{2}{3}\qquad\therefore\quad \text{Bが勝つ確率}=\frac{1}{3}$$

Bが勝者となる確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\frac{2}{3}+{}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_6C_3\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left\{1+4\cdot\frac{2}{3}+10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+20\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\right\}$$

$$=\frac{379}{2187}$$

……(答)

研究

(1)　余事象を，7回目に勝者が決まる，と考えるとAが勝者となるかBが勝者となるかの2通りがあり

$$\underbrace{{}_6C_3p^3(1-p)^3\cdot p}_{〔Aが勝者〕}+\underbrace{{}_6C_3(1-p)^3p^3\cdot(1-p)}_{〔Bが勝者〕}$$

$$={}_6C_3p^3(1-p)^3$$

と計算される。

(2)　4勝すればゲームは打ち切りとなるのだが，7回まで試合を続けるものとしても勝者の決定には影響ない。

○○○○　を　○○○○△△△　としてよい。

すると，求める確率は，7回対戦して，4勝以上すればよいのだから

$${}_7C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^3+{}_7C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_7C_6\left(\frac{1}{3}\right)^6\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^7$$

$$=\frac{35\cdot 2^3+21\cdot 2^2+7\cdot 2+1}{3^7}=\frac{379}{2187}$$

▶演習◀

[42]　AチームとBチームがプロ野球の日本シリーズで優勝を競う場合を考える。試合はどちらかが4回勝つまで何回も続けるものとし，先に4回勝ったチームを優勝チームとする。各試合でAチームが勝つ確率は0.5，Bチームが勝つ確率は0.4，引分けになる確率は0.1とし，各試合における勝負の結果は互いに独立であるものとする。

(1)　Aチームが4勝0敗0引分けで優勝する確率を求めよ。

(2)　Aチームが4勝0敗2引分けで優勝する確率を求めよ。

(3)　引分けになる試合が1回もなくてAチームが優勝する確率を求めよ。

(大阪女大)

基礎問 45. ▶数直線上のランダム・ウォーク◀

数直線上の動点Aの最初の位置を原点とする。サイコロを投げて，奇数の目が出たときは -1，偶数の目が出たときは $+1$，Aを動かすとする。8回サイコロを投げたときのAの座標を X として，次の問いに答えよ。

(1) $X=n$(整数)となる確率を求めよ。

(2) 1回目でAが $+1$ に動き，$X=4$ となる確率を求めよ。

（東北学院大-工）

精講

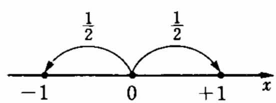
まずは目の出方を調べる。8回のサイコロ投げで奇数の目が x 回，偶数の目が y 回であったとすると

“$X=n$ となる”のは

$$\begin{cases} x+y=8 \\ -1\cdot x+1\cdot y=n \end{cases}$$

なる x，y を求めればよい。

解答 (1) 奇数の目の出方を x 回とすると偶数の目は $8-x$ 回出るから，



$$-x+(8-x)=n \qquad x=\frac{8-n}{2}$$

x は負でない整数ゆえ，n は偶数$(-8\leqq n\leqq 8)$である。

求める確率を $P(X)$ とすると

$$P(X=n)=\begin{cases} 0 & (n\text{ は奇数}) \\ {}_8\mathrm{C}_{\frac{8-n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^8 & (n\text{ は偶数}) \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 1回目は偶数が出る。残り7回のうち奇数が x 回出るとすると，$X=4$ となるためには

$$-x+(7-x)=3 \qquad \therefore \quad x=2$$

求める確率は

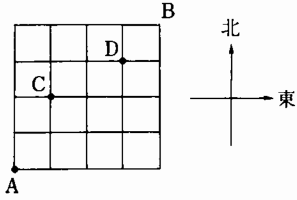
$$\frac{1}{2}\cdot{}_7\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{21}{2^8}=\frac{21}{256} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

基礎問 46. ▶平面上のランダム・ウォーク◀

図のような市街路をある人がA地点からB地点まで，次の規則にしたがって歩いて行く。

(i) 進行方向は東または北のみとする。

(ii) 東，北のいずれの進路も選べる地点においては，硬貨を投げて表が出れば東に，裏が出れば北に進む。



(1) C地点を通る確率を求めよ。

(2) C，Dのいずれの地点も通らない確率を求めよ。(北海学園大)

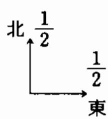
精講

AからCを通ってBに行く確率は，一旦Cを通ってしまえば，あとは必ずBにたどりつくので，

$$A \longrightarrow C \xrightarrow{1} B\text{の確率は，}A \longrightarrow C\text{の確率}$$

を計算すればよい。A ⟶ Cとなるのは，表が1回，裏が2回出るときである。

解答 C，Dを通るという事象をそれぞれC，Dとする。



(1) $P(\mathrm{C})={}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2^3}=\frac{3}{8}$ ……(答)

(2) $P(\overline{\mathrm{C}}\cap\overline{\mathrm{D}})=P(\overline{\mathrm{C}\cup\mathrm{D}})=1-\{P(\mathrm{C})+P(\mathrm{D})-P(\mathrm{C}\cap\mathrm{D})\}$

ここで，$P(\mathrm{D})={}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{20}{2^6}$

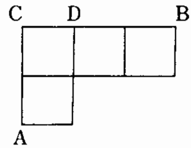
$P(\mathrm{C}\cap\mathrm{D})=\frac{3}{8}\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{9}{2^6}$

$\therefore\ P(\overline{\mathrm{C}}\cap\overline{\mathrm{D}})=1-\left(\frac{3}{8}+\frac{20}{2^6}-\frac{9}{2^6}\right)$

$=1-\frac{35}{64}=\frac{29}{64}$ ……(答)

基礎問　47．待ち合わせの２人

図のような街路のある町で，Ｐ君がＡ地点からＢ地点まで，Ｑ君がＢ地点からＡ地点まで，各々，最短の経路をたどって行くものとする。分岐点では，２つの進路のいずれかを，$\frac{1}{2}$の確率で選んで行くものとする。



(1)　Ｐ君もＱ君もともに図の街路区分 CD 間を通る確率はいくらか。

(2)　２人が同時刻に出発して同じ速さで進むとすれば，２人がどこかで出会う確率はいくらか。ただし，街路の１区分は全て同じ距離とする。　（日本福祉大）

精講　(2)　まず，どの地点で２人が出会うかを調べる。１人が歩く距離は５区画であるから，その中間地点の 2.5 区画のところで２人は出会う。それぞれの出会い方は排反であるから，これらの確率を計算して加えればよい。

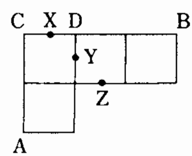
解　答　(1)　Ｐ君，Ｑ君が区間 CD を通る確率はそれぞれ

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

２人の進み方は独立であるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{32}$$　……(答)

(2)　２人が出会う地点は，右図のＸ，Ｙ，Ｚのいずれかである。各地点で出会う確率は



$$P(\mathrm{X})=\frac{1}{32}\quad(\because\ (1))$$

$$P(\mathrm{Y})=\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{2}\right\}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{64}$$

$$P(\mathrm{Z})=\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{2}\right\}\times\left\{\frac{1}{2}\cdot 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=\frac{9}{32}$$

$$\therefore\quad P(\mathrm{X})+P(\mathrm{Y})+P(\mathrm{Z})=\frac{1}{32}+\frac{3}{64}+\frac{9}{32}=\frac{23}{64}$$　……(答)

基礎問 48. ▶標本空間の設定◀

(1)　図1のような格子状の道をA点からB点まで，道のりが最短になるようにいくとき，C点を通る確率を次の2通りの場合について求めよ。

(ア)　どの道筋を選ぶ確率も等しいとき

(イ)　どの分岐点においても次に進む方向を選ぶ確率が等しいとき

(2)　図2のようにC点からB点までの格子の2辺と同じ道のりの道をもう一つ付け加えたとする。(1)の(ア)，(イ)の結果はどのように変わるか。

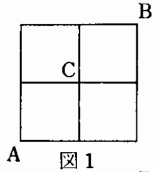


図1

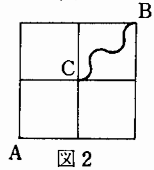


図2

（麻布大）

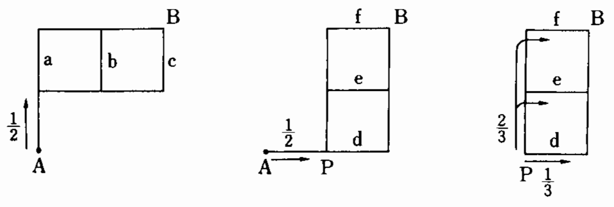
精講

(ア)，(イ)の違いを知ることが大切である。

(ア)　AからBへ行く道筋は→が2つ，↑が2つであるから $\dfrac{4!}{2!\,2!}=6$　(通り)の道筋が考えられる(➜基礎問20，21)。これらの道筋を等確率としているから，6個の根元事象からなる標本空間を考えている。歩く人からみるとAを出発するときには，すでにどの道筋でいくか決まっていることになる。

(イ)は硬貨を投げながら進むようなものだ。分岐点にきたときには東または北にそれぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で進むことになる。

違いを具体的にみておこう。



(ア)の立場で，Aにおける縦の道，横の道を選ぶ確率を計算してみよう。

縦の道を選んだとするとそれ以後は {a, b, c} の3通り，横の道のときも {d, e, f} の3通り。したがって，

「タテもヨコも確率 $\frac{1}{2}$」

で選ぶことになる。しかし，点Pではどうであろう。縦の道を選ぶとそれ以後は {e, 　} の2通り，横の道を選ぶとあとの道は自動的に決まり道は1通り。すなわち

「タテの確率は $\frac{2}{3}$，ヨコの確率は $\frac{1}{3}$」

で選ぶことなる。もちろん，(イ)の立場ではA，Pどちらにおいても「タテ，ヨコの確率は $\frac{1}{2}$」である。

このように“何を等確率とするか”，“どこに同様の確からしさ”を設定するかは極めて大切なことである。

解　答　(1)　(ア)　道筋の選び方は　$\frac{4!}{2!\,2!}=6$　通り

このうちCを通るものは　$2\times2=4$　通り

求める確率は　$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$　……(答)

(イ)　Cにくれば，あとは自動的にBにたどりつくから

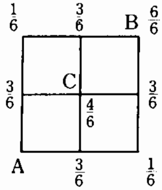
求める確率は　${}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$　……(答)

(2)　(ア)　$\dfrac{2\times3}{\dfrac{4!}{2!\,2!}+2}=\dfrac{3}{4}$　　(イ)　(1)と変わらず　$\frac{1}{2}$　……(答)

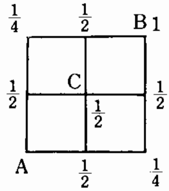
研究

各点における確率を示すと次のようになる。

(ア)



(イ)



基礎問 49. ▶残った硬貨，二項定理の利用◀

n を正の整数とする。n 枚の硬貨を同時に投げて表の出たものを取り去り，次に，硬貨が残っておればそれらを同時に投げて表の出たものを取り去ることにする。

(1) 全部なくなる確率を求めよ。

(2) r 枚残っている確率を求めよ。ただし，r は正の整数で，$1 \leqq r \leqq n$ とする。（弘前大）

精講

問題のように2回の試行をくり返すと

$$n\text{枚} \longrightarrow k\text{枚} \longrightarrow r\text{枚}$$

と硬貨はへっていく。k は $r \leqq k \leqq n$ の $n-r+1$ 通りが考えられ，これらは排反である。

しかし，これは，n 枚の硬貨を2回投げて，2回とも裏となったものが r 枚とも理解される。この方が計算がラクである。

解答 (1) n 枚の硬貨を2回投げると考えると，“全部なくなる”のは，“各硬貨が2回のうち少なくとも1回は表となる”ときであるから，求める確率は

$$\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^n=\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \cdots\cdots(答)$$

(2) “r 枚残る”のは“2回とも裏となる硬貨が r 枚”のときであり，残りの $n-r$ 枚は(1)と同じである。求める確率は

$${}_n\mathrm{C}_r\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^r\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-r}=\frac{{}_n\mathrm{C}_r\cdot 3^{n-r}}{4^n} \quad \cdots\cdots(答)$$

研究

題意通りに計算してみよう。

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k$ ［k 枚裏，残りは表，k 枚裏］

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot 1^{n-k}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1+\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (\because\ 二項定理)$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=r}^{n}\left\{{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\times{}_k\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{k-r}\right\}$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{k=r}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\,{}_k\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{2}\right)^k \quad (さあ，この計算にチャレンジ)$$

基礎問 50. ▶最大確率◀

1つのサイコロを続けて101回投げたとき，6の目がk回出る確率をP_kとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{P_k}{P_{k-1}}$ $(1 \leqq k \leqq 101)$ を簡単な式で表せ。

(2) (1)の結果を用いてP_kを最大にするkをすべて求めよ。

（福井大）

精講

確率P_kが最大となるkを求めるには

P_1, P_2, P_3, ……, P_k, ……

の変化を調べればよい。隣り合う項の大小比較は

$P_{k+1}-P_k$ あるいは $\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$

を調べればよい。

解答 (1)

$$\frac{P_k}{P_{k-1}}=\frac{{}_{101}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{101-k}}{{}_{101}C_{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{102-k}}=\frac{102-k}{k}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}$$

$$=\frac{102-k}{5k}$$ ……(答)

(2) $\dfrac{P_k}{P_{k-1}} \geqq 1$ となるのは $102-k \geqq 5k$ $\therefore$ $k \leqq 17$

$P_0<P_1<P_2<\cdots\cdots<P_{16}=P_{17}$, $P_{17}>P_{18}>\cdots\cdots>P_{101}$

よって，P_kを最大にするkは 16と17 ……(答)

▶演習◀

[43] A，B，C 3個のサイコロをこの順に振る試行をくり返す。1回の試行において，A，B，C 3個のサイコロの目の数をそれぞれx，y，zとし，これを並べたx，y，zの隣り合う少なくとも2つの数字が，小から大の順に連続した自然数になる事象をEとする。

(1) 事象Eの起こる確率を求めよ。

(2) 26回の試行のうち事象Eがちょうどn回起こる確率P_nは，nがどのような値のとき最大となるか。 （宮城教育大）

基礎問 51. ▶選択の優位◀

4問からなる問題Aと2問からなる問題Bとがある。AまたはBのどちらか一方だけを選択して解答する試験Ⅰと，AおよびBの両方を解答しなければならない試験Ⅱとがあって，そのどちらにおいてもAは2問以上，Bは1問以上解くことができれば合格である。

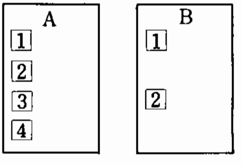
受験者はAについては4問のうち2問を，Bについては2問のうち1問を解くことができるものとして，次の問いに答えよ。

(1)　試験Ⅰにおいては，どちらを選択した方が合格する確率が大きいか。また，試験Ⅰに合格する確率は，Aを選択する確率をpとすれば，いくらであるか。

(2)　試験Ⅱにおいて，受験者4人のうち2人だけが合格する確率と，受験者6人のうち3人だけが合格する確率とではどちらが大きいか。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（岐阜薬大）

精講

Aについては4問のうち2問，Bについては2問のうち1問を解くことができるということは，A，Bどちらについても，各問を解く確率は$\frac{1}{2}$ということである。



試験Ⅰ　A，Bのうち一方
試験Ⅱ　A，Bの両方

解答　(1)　試験ⅠにおいてA，Bを選択して合格する確率をそれぞれP_A，P_Bとすると

$$P_A={}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{11}{16}$$

$$P_B={}_2C_1\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}=\frac{12}{16}$$

$P_A<P_B$ より，Bを選択する方が合格する確率が大きい。 ……(答)

また，Aを選択する確率をpとすると，試験Ⅰに合格する確率は

$$p\cdot P_A+(1-p)\cdot P_B$$
$$=\frac{11}{16}p+\frac{3}{4}(1-p)=\frac{3}{4}-\frac{1}{16}p$$ ……(答)

(2) 試験IIで合格する確率は $\frac{11}{16}\cdot\frac{3}{4}=\frac{33}{64}$

合格しない確率は $1-\frac{33}{64}=\frac{31}{64}$

4人のうち2人だけが合格する確率を P_2，6人のうち3人だけが合格する確率を P_3 とすると

$$P_2={}_4C_2\left(\frac{33}{64}\right)^2\left(\frac{31}{64}\right)^2$$

$$P_3={}_6C_3\left(\frac{33}{64}\right)^3\left(\frac{31}{64}\right)^3$$

$$\frac{P_2}{P_3}=\frac{\frac{4!}{2!\,2!}}{\frac{6!}{3!\,3!}\cdot\frac{33}{64}\cdot\frac{31}{64}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{64}{33}\cdot\frac{64}{31}=\frac{64}{55}\cdot\frac{32}{31}$$

$\frac{P_2}{P_3}>1$ より　$P_2>P_3$

4人のうち2人だけが合格する確率の方が大きい ……(答)

▶演習◀

[44] n 個の球が入っている袋がある。各球の色は白か赤のいずれかである。この袋から球を1個取り出し，色を見た後に，元に戻す試行を考える。この2つの事象A，Bをそれぞれ

A：2回の試行で，赤球が1回以上取り出される

B：4回の試行で，赤球が2回以上取り出される

とするとき，確率 $P(A)$，$P(B)$ の大小を比較せよ。 (香川大)

[45] 2個のサイコロを同時に投げて，出た目の和が4または7のとき，A君は得点2を得，それ以外は，B君が得点1を得る。さきに得点4を得た方を勝者として，ゲームは終了するものとする。このゲームはA君とB君のどちらが有利であるかを判定せよ。 (旭川医大)

Ⅳ. 確率と漸化式

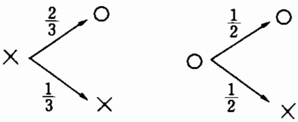
基礎問 52. ▶2項間漸化式◀

ある工作機械が2日連続して故障する確率は $\frac{1}{3}$，2日連続して故障しない確率は $\frac{1}{2}$ である。今日，この機械は故障した。

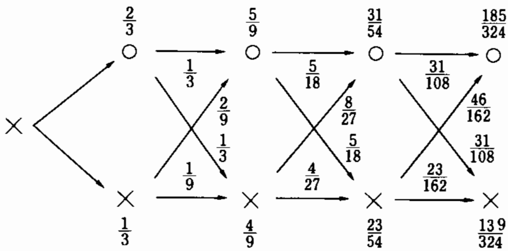
(1)　4日後この機械が故障しない確率を求めよ。

(2)　5日後この機械が故障しない確率を求めよ。　(山形大-教育)

精講　1°　まずは樹形図を使って直接解いてみる。○を故障しない，×を故障すると表すと，条件より



となる。これより樹形図の中に確率を記入していくと



よって，4日後この機械が故障しない確率 p_4 は　$p_4=\frac{185}{324}$

また，(2)の p_5 は

$$p_5=\frac{185}{324}\cdot\frac{1}{2}+\frac{139}{324}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1111}{1944}$$

2°　本問が「n 日後この機械が故障しない確率 p_n を求めよ」となるともう直接計算することはできない。では，どうするか。漸化式を立てて，一般解 p_n を求めることになる。$n=4$，5 であっても，直接計算す

るより，漸化式を解く方が早い。

3° 状況変化を扱った確率の問題では漸化式の利用が有効であるが，漸化式を立てるところでつまずく人もいる。漸化式を立てるときの最大のポイントは，最後の p_n から p_{n+1} の変化において

排反かつすべての場合を尽くす場合分け

をつくることにある。すなわち，

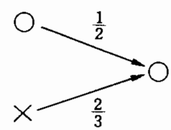
(ア) $\Omega=\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\cdots\cdots$　(イ) A_1，A_2，……は互いに排反であるとき，事象Bの起こる確率は

$$P(\mathrm{B})=P(\mathrm{A}_1)P_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B})+P(\mathrm{A}_1)P_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B})+\cdots\cdots$$

を利用するのである。これを**完全確率の公式**という。本問では

(ア) n 日後の機械は○または×

(イ) ○，×は互いに排反



ゆえ

$$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{1}{2}+(1-p_n)\cdot\frac{2}{3}$$

$$\therefore\quad p_{n+1}=-\frac{1}{6}p_n+\frac{2}{3}$$

4°　2項間漸化式　$a_{n+1}=pa_n+q\ (p\neq1)$ の解法

詳しくは『基礎・基礎解析問題精講』を見てもらうことにしてここでは，基本的な解法をさっと復習しておこう。

1次方程式　$\alpha=p\alpha+q$　を考える($p\neq1$ ゆえ，これは解をもつ)。漸化式とこれの差をつくると

$$\begin{array}{l} a_{n+1}=pa_n+q \\ \underline{\alpha\quad=p\alpha\ +q\ \ (-} \\ a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha) \end{array}$$

これより，数列 $\{a_n-\alpha\}$ は公比 p，初項 $a_1-\alpha$ の等比数列であり，この一般項は

$$a_n-\alpha=(a_1-\alpha)p^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=\alpha+(a_1-\alpha)p^{n-1}\quad\left(\alpha=\frac{q}{1-p}\right)$$

参考　$p=1$ のときは，$a_{n+1}-a_n=q$

これは数列 $\{a_n\}$ が公差 q の等差数列ということであるから，初項を a_1 とすると

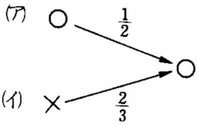
$$a_n=a_1+(n-1)q$$

解　答　n 日後に機械が故障しない確率を p_n とおく。

$n+1$ 日後に故障しないのは

　(ア)　n 日後に故障しなくて，
　　$n+1$ 日後も故障しない

　(イ)　n 日後に故障して，
　　$n+1$ 日後は故障しない



の2タイプがあり，これらは排反である。

$$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{1}{2}+(1-p_n)\cdot\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}p_n+\frac{2}{3}$$

これを変形して

$$p_{n+1}-\frac{4}{7}=-\frac{1}{6}\left(p_n-\frac{4}{7}\right)$$

$p_0=0$ より

$$p_n-\frac{4}{7}=-\frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

$$\therefore\quad p_n=\frac{4}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

(1)　$p_4=\dfrac{4}{7}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{6}\right)^4\right\}=\dfrac{185}{324}$　……(答)

(2)　$p_5=\dfrac{4}{7}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{6}\right)^5\right\}=\dfrac{1111}{1944}$　……(答)

▶演習◀

[46]　2つの袋A，Bの中に白玉と赤玉が入っている。Aから玉を1個取り出してBに入れ，よく混ぜたのちBから玉を1個取り出してAに入れる。これを1回の操作と数える。はじめに，Aの中に4個の白玉と1個の赤玉が，Bの中には3個の白玉だけが入っていたとして，この操作を n 回繰り返したあと，赤玉がAに入っている確率を p_n とする。

(1)　p_1 の値を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n で表せ。

(3)　p_n を n で表せ。　　　　　　　　　　　　　　　　　　(福岡教育大)

基礎問 53. ▶(確率の総和)＝1◀

A，B，Cの3つのランプがある。ランプは，①つねにどれかひとつが点灯しており，2つ以上が点灯していることはない。②どのランプも点灯して1秒後には必ず消え，その瞬間に残りの2つのうちのどちらか一方がいずれも $\frac{1}{2}$ の確率で点灯する。いまランプAが点灯したものとして，これから n 秒後にランプAが点灯する確率を $p(n)$，ランプBが点灯する確率を $q(n)$ とする。このとき

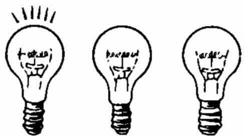
(1)　$p(n)=q(n-1)$　を示せ。

(2)　$2p(n)+p(n-1)=1$　を示せ。

(3)　$p(n)$ を求めよ。　　　　　　　　　　　　　（青山学院大）

精講

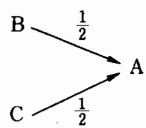
(1)　n 秒後にランプCが点灯する確率を $r(n)$ とすると，条件②よりB，Cは対等であるので $q(n)=r(n)$ としてよい。



A　　B　　C

(2)　条件①より　$p(n)+q(n)+r(n)=1$ である。言われるとあたりまえの式だが，気がつきにくい。

解答　(1)　$n-1$ 秒後にB，Cが点灯する確率は等しいから



$$p(n)=q(n-1)\cdot\frac{1}{2}+q(n-1)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad p(n)=q(n-1)$$

(2)　$p(n-1)+q(n-1)+q(n-1)=1$　を(1)に代入すると

$$2p(n)+p(n-1)=1$$

(3)　(2)は　$p(n)-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left\{p(n-1)-\frac{1}{3}\right\}$ と変形される。

$p(0)=1$ より　$p(n)-\frac{1}{3}=\left(p(0)-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$$\therefore\quad p(n)=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\qquad \cdots\cdots(答)$$

基礎問 54. ▶3項間漸化式◀

座標平面上で点Pを次の規則に従って移動させる。すなわち，1個のさいころを振り，出た目をaとするとき，$a\leqq 2$ ならばx軸の正の方向へaだけ，また $a\geqq 3$ ならばy軸の正の方向へ1だけ移動させる。いま原点を出発点として，さいころを繰り返し振り点Pを順次移動させるものとする。

このとき，自然数nに対し，点Pが$(n,\ 0)$に到着する確率をp_nとおき，$p_0=1$ とすると

$p_1=\boxed{}$,

$p_{n+1}=\boxed{}\,p_n+\boxed{}\,p_{n-1}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$

である。したがって，　$p_n=\boxed{}$

である。　　　　（福井医大）

精講　3項間漸化式　$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$　の解法

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

の変形を考える。展開すると

$$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$$

であり，与式と比較すると　$\begin{cases}\alpha+\beta=-p\\ \alpha\beta=q\end{cases}$

すなわち，α，βは2次方程式

$$t^2+pt+q=0\quad(\text{特性方程式という})$$

の解である。α，βは対称であるから，$\alpha\neq\beta$ のとき，与式は

$$\begin{cases}a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)\\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)\end{cases}$$

と2通りに変形される。数列$\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$，$\{a_{n+1}-\beta a_n\}$はそれぞれ公比β，αの等比数列であることを示しているから

$$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$$
$$a_{n+1}-\beta a_n=(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}$$

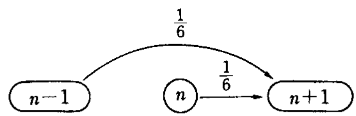
差をとって　$(\beta-\alpha)a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}-(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}$

$$\therefore\quad a_n=\frac{1}{\beta-\alpha}\{(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}-(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}\}$$

解 答 点(1, 0)に到着するのは，1の目が出たときであり

$$p_1=\frac{1}{6} \qquad \cdots\cdots(答)$$

次に，点$(n+1,\ 0)$に到着するには，点$(n,\ 0)$の位置で1の目が出るか，点$(n-1,\ 0)$で2の目が出るかの2通りが考えられるから



$$p_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}p_{n-1} \quad \cdots\cdots(1) \qquad \cdots\cdots(答)$$

$t^2=\frac{1}{6}t+\frac{1}{6}$ より $t=\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}$ これを使って(1)を変形すると

$$\begin{cases} p_{n+1}-\frac{1}{2}p_n=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}p_{n-1}\right) \\ p_{n+1}+\frac{1}{3}p_n=\frac{1}{2}\left(p_n+\frac{1}{3}p_{n-1}\right) \end{cases}$$

$p_0=1,\ p_1=\frac{1}{6}$ より

$$\begin{cases} p_{n+1}-\frac{1}{2}p_n=\left(p_1-\frac{1}{2}p_0\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \\ p_{n+1}+\frac{1}{3}p_n=\left(p_1+\frac{1}{3}p_0\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{cases}$$

2式をひいてまとめると

$$p_n=\frac{6}{5}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\} \qquad \cdots\cdots(答)$$

▶演習◀

[47] 2人がn個のコインを分け，じゃんけんをして勝った方は相手からコインを1個受け取るというゲームを行う。じゃんけんでは引き分けはないものとし，先にすべてのコインを得た方の人が勝ちとする。最初にk個のコインを持っていた人が勝つ確率を$p_k\ (0<k<n)$として，次の各問いに答えよ。

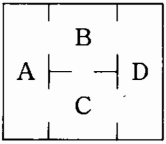
(1) $p_0=0,\ p_n=1$ として，$p_{k+1},\ p_k,\ p_{k-1}\ (0<k<n)$の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) $n=3$ のときのp_1とp_2を求めよ。

(3) 一般のnについて，p_kを求めよ。 (三重大)

基礎問 55. ▶連立漸化式◀

右図のように4つの部屋A，B，C，Dがあり，1匹のネズミが1秒ごとに，表に与えられた確率で部屋を移動するものとする。たとえばBから1秒後にAに移動する確率は$\dfrac{1}{6}$である。



〜から＼〜へ	A	B	C	D
A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
B	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
C	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{3}$
D	0	0	0	1

はじめにAにいたとして，次の問いに答えよ。

(1)　n秒後にAにいる確率をa_n，Bにいる確率をb_n，Cにいる確率をc_nとし，a_n，b_nをa_{n-1}，b_{n-1}で表せ。

(2)　b_nをnの式で表せ。　(名古屋大)

精講

1°　演習[38]で類題を扱っている。そこでの話は3秒後，4秒後のことであったので，状況変化を表にまとめた(➡解答)。これは樹形図の1つとみてよい。しかし，本問のようにn秒後となると，漸化式が使われる。

状況変化は樹形図か漸化式

2°　(1)では，一見a_n，b_n，c_nについての連立漸化式にみえるが，BとCは対等であるから，a_n，b_nについての連立漸化式におさまる。

3°　連立漸化式$\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n \\ b_{n+1}=ra_n+sb_n \end{cases}$の解法

1文字消去して3項間漸化式に変形すればよい。

$q=0$のときは，$a_{n+1}=pa_n$　となり，数列$\{a_n\}$は等比数列となるので，ここでは$q\neq 0$としておく。このとき，

$$b_n=\frac{a_{n+1}-pa_n}{q}$$

これを第2式に代入すると　$\dfrac{a_{n+2}-pa_{n+1}}{q}=ra_n+s\dfrac{a_{n+1}-pa_n}{q}$

$$\therefore\quad a_{n+2}-(p+s)a_{n+1}+(ps-qr)a_n=0$$

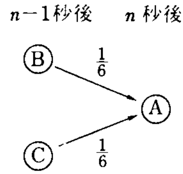
この漸化式は解けなければいけない。

解　答　(1)　n 秒後にAにいるのは

(ア)　$n-1$ 秒後にBにいて，Aにくる

(イ)　$n-1$ 秒後にCにいて，Aにくる

の2タイプがあり，これらは排反である。

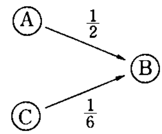


$$a_n=\frac{1}{6}b_{n-1}+\frac{1}{6}c_{n-1}$$

同じようにして，n 秒後にBにいる確率は

$$b_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{6}c_{n-1} \qquad \cdots\cdots(※)$$

ここで，BとCは対等であるから



$$b_n=c_n \qquad \therefore \quad \begin{cases} a_n=\dfrac{1}{3}b_{n-1} \\ b_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}+\dfrac{1}{6}b_{n-1} \end{cases} \qquad (答)$$

(2)　(1)より　$b_n=\dfrac{1}{6}b_{n-2}+\dfrac{1}{6}b_{n-1}$

(偶然，前問と同じ漸化式となったので，途中の計算は略)

$b_0=0$，$b_1=\dfrac{1}{2}$ より

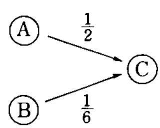
$$\begin{cases} b_{n+1}-\dfrac{1}{2}b_n=\left(b_1-\dfrac{1}{2}b_0\right)\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \\ b_{n+1}+\dfrac{1}{3}b_n=\left(b_1+\dfrac{1}{3}b_0\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

2式をひいてまとめると

$$b_n=\frac{3}{5}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\} \qquad \cdots\cdots(答)$$

研究

"$b_n=c_n$" は次のようにしても確認される。



$$c_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{6}b_{n-1}$$

(※)との差をつくり　$b_n-c_n=-\dfrac{1}{6}(b_{n-1}-c_{n-1})$

$$\therefore \quad b_n-c_n=(b_0-c_0)\left(-\frac{1}{6}\right)^n=0 \quad (\because \quad b_0=c_0=0)$$

基礎問 56. ▶無限試行の確率◀

A，B，C，Dの4人がゲームをするとき，親をだれにするかを，次の方法で決める。

A，B，C，Dの順に1個のサイコロを振り，最初に偶数の目を出したものが親になる。もし，Dまでいっても偶数の目が出なかったときは，親が決まるまでAから同じことをくり返す。

(1)　A，B，C，Dおのおのが，サイコロをn回振ったときに親になる確率p_A，p_B，p_C，p_Dを求めよ。

(2)　A，B，C，Dおのおのが親になる確率P_A，P_B，P_C，P_Dを求めよ。

（山形大-理・医・農）

精講

親になる確率を図示すると次のようになる。

	1回目	2回目	3回目
A	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^8\cdot\frac{1}{2}$
	↓	↓	↓
B	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$
	↓	↓	↓
C	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$
	↓	↓	↓
D	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4$

解　答　(1)　Aがサイコロをn回振ったときに親になるのは，4人が$n-1$回奇数を出して(サイコロは$4(n-1)$回振られている)，次にAが偶数を出すときであるから

$$p_A=\left(\frac{1}{2}\right)^{4(n-1)}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}$$

同じようにして

$$p_B=\left(\frac{1}{2}\right)^{4(n-1)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}$$

$$p_C=\left(\frac{1}{2}\right)^{4(n-1)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}$$

$$p_D=\left(\frac{1}{2}\right)^{4(n-1)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\left(\frac{1}{16}\right)^{n}$$

……(答)

(2) $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$の場合はすべて排反で，この試行は無限に続けられるから

$$P_A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^2+\cdots\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{8}{15} \quad \cdots\cdots(答)$$

同じようにして

$$P_B=\frac{4}{15},\ P_C=\frac{2}{15},\ P_D=\frac{1}{15} \quad \cdots\cdots(答)$$

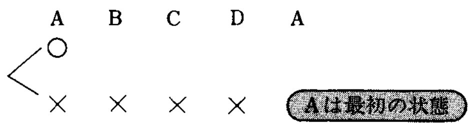
研究

(2) **無限試行**が生じるのは，何回か試行が行われたとき，**最初の状態にもどる**からである。ここに目をつけて解くこともできる。

右図より，

$$P_A=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^4 P_A$$

$$\therefore\ P_A=\frac{8}{15}$$



▶演習◀

[48] A，B，Cの3人で勝ち抜き戦を行う。3人の戦力は同等である。第1回戦でAとBが対戦し，その勝者が第2回戦でCと対戦する。もし，Cが敗ければAかBが連勝したことになり，優勝が決まるものとする。Cが勝てば，第1回戦の敗者が第3回戦でCと対戦する。以下これをくり返し，誰かが2連勝したところで優勝が決まるものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 第1回戦でBが勝ち，第2回戦でCが勝ち，第3回戦ではAが勝った場合をBCAのように表すことにする。このような表し方で，第1回戦から第7回戦までにAが優勝する場合をすべて書け(説明，証明は不要である)。

(2) 第n回戦までに優勝が決まらない確率を求めよ。

(3) 第n回戦までにCが優勝する確率をp_nとするとき，$\lim_{n\to\infty}p_n$の値を求めよ。 (神戸大)

基礎問 57. ▶区分求積と確率◀

1からn $(n\geqq 2)$までの番号のついたn個の箱がある。番号k $(k=1, 2, 3, \cdots, n)$の箱には，1と記入されたk枚のカードと-1と記入された$(n-k)$枚のカードが入っている。n個の箱から無作為に1つ選んで，その箱の中から無作為に1枚ずつカードを5回取り出す。ただし，1回ごとにカードをその箱にもどすことにする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 取り出したカードに記入されている5つの数の和をTとするとき，$0\leqq T\leqq 4$ となる確率P_nを求めよ。

(2) 定積分の定義を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_n$を求めよ。　　　(山形大)

精講

(2) ここでいう定積分の定義とは区分求積のことである。忘れていたら「微分・積分」の教科書を見直しておくこと。

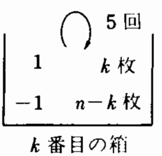
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$$

特に，$a=0$，$b=1$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$$

解　答 (1) $T=-5, -3, -1, 1, 3, 5$ ゆえ

$0\leqq T\leqq 4$ となるのは $T=1, 3$ のみ



$$P_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left\{{}_5C_3\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(\frac{n-k}{n}\right)^2+{}_5C_4\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{n-k}{n}\right)\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\frac{n-k}{n}\cdot 5\,\frac{2n-k}{n} \quad \cdots\cdots(答)$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}P_n=5\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(2-\frac{k}{n}\right)$$

$$=5\int_0^1 x^3(1-x)(2-x)dx$$

$$=5\left[\frac{x^5}{6}-\frac{3}{5}x^5+\frac{x^4}{2}\right]_0^1=\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots(答)$$