第3章 確 率 分 布

I. 期待値・分散

基礎問 58. ▶期待値 $E(X)$◀

つぼの中に 10 個の(同質同大の)玉が入っている。このうちの 1 個には 100 円，2 個には 50 円，3 個には 25 円，4 個には 0 円と書かれている。このつぼの中の玉をよくかき混ぜて 2 個の玉を同時に取り出すとき，取り出した玉に書かれた金額の合計を X で表す。

(1) X の取りうる値をすべて書け。

(2) X の確率分布を求めよ。

(3) X の期待値 $E(X)$ を求めよ。 (大阪女大)

精講

1° われわれは偶然に依存した変数を考えることが多い。たとえば，さいころの目の数を X とすると X は 1，2，……，6 と偶然に支配されて変わる。この変数 X のおのおのの値に確率が決まっているとき，変数 X を**確率変数**という。X の値と確率との対応関係を**確率分布**という。

確率変数とその分布を示すには次のような**確率分布表**を用いるとよい。

X	x_1 x_2 …… x_n
確率	p_1 p_2 …… p_n

求めた確率分布表においては，$\sum_{k=1}^{n} p_k=1$ (確率の総和$=1$)である。検算で利用するとよい。

2° 確率分布が上の表のように与えられているとき，X の**期待値** (Expectation) は

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} x_kp_k=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$$

と定義される。期待値は**平均値**，また，X が金額を表すときなどは**期待**

金額ともよばれる。

定義の意味を説明しておこう。賞金つきのくじ引きを考える。10本くじがあり，1等10万円が1本，2等5万円が2本，3等1万円が3本，残りははずれとする。賞金10万円，5万円，1万円，0円がこの場合の確率変数Xであり，確率分布は

X	10万	5万	1万	0
確率	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

である。ある人がくじを引くとき“いくらもらえる”と期待できるであろうか。この **“期待金額”** を数学的に表現できないものか。

賞金総額は

$$(10\text{万})\times 1+(5\text{万})\times 2+(1\text{万})\times 3+0\times 4=23\text{万}\ (\text{円})$$

であるから，これをくじの本数10で割って，くじ1本の値打ちは2.3万円。この2.3万円をこのくじ引きの期待金額と考えるのは妥当な考え方であろう。今，

$$\frac{(10\text{万})\times 1+(5\text{万})\times 2+(1\text{万})\times 3+0\times 4}{10}=2.3\text{万}\ (\text{円})$$

と計算したが，これは

$$(10\text{万})\cdot\frac{1}{10}+(5\text{万})\cdot\frac{2}{10}+(1\text{万})\cdot\frac{3}{10}+0\cdot\frac{4}{10}=2.3\text{万}\ (\text{円})$$

としても同じである。賞金額と確率の積の和を計算すればよいわけだ。すなわち

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k \quad (\text{確率変数と確率の積の和})$$

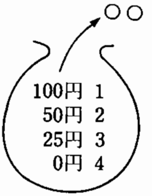
である。

解 答 (1) $X=\{150,\ 125,\ 100,$
$75,\ 50,\ 25,\ 0\}$ ……(答)

(2) $X=150\ (=100+50)$ のとき

$$\frac{{}_1C_1\cdot{}_2C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{2}{45}$$

$X=125\ (=100+25)$ のとき



$$\frac{{}_1C_1\cdot{}_3C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$$

$X=100$ $(=100+0$ または $50+50)$

$$\frac{{}_1C_1\cdot{}_4C_1+{}_2C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{4+1}{45}=\frac{1}{9}$$

$X=75$ $(=50+25)$

$$\frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$$

$X=50$ $(=50+0$ または $25+25)$

$$\frac{{}_2C_1\cdot{}_4C_1+{}_3C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{8+3}{45}=\frac{11}{45}$$

$X=25$ $(=25+0)$

$$\frac{{}_3C_1\cdot{}_4C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{12}{45}=\frac{4}{15}$$

$X=0$ $(=0+0)$

$$\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$$

よって，Xの確率分布は次の表のようになる。

X	150	125	100	75	50	25	0
$P(X)$	$\frac{2}{45}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{11}{45}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

……(答)

(3) $E(X)=\dfrac{1}{45}(150\cdot2+125\cdot3+100\cdot5+75\cdot6+50\cdot11+25\cdot12+0\cdot6)$

$=\dfrac{2475}{45}=55$ (円) ……(答)

▶演習◀

[49] 1 から 15 までの 15 個の自然数 1, 2, …, 15 の各数字を記入したカードが 1 枚ずつ合計 15 枚はいっている箱がある。この箱の中から無作為に 1 枚のカードを取り出し，その数字をXとして $Y=|X-5|$ とおく。

(1) Yの確率分布を求めよ。

(2) Yの期待値 $E(Y)$ を求めよ。 (新潟大)

基礎問 59.　▶期待金額◀

A，Bの2人が3回ゲームを行い，2回勝った者を優勝とする。AがBに勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分ける確率は $\frac{1}{6}$ である。

(1)　優勝者が決まらない確率を求めよ。

(2)　Aが優勝すればAに2000円，Bが優勝すればBに3000円，優勝者が決まらない場合はA，Bそれぞれに1000円ずつの賞金が与えられるとき，A，Bそれぞれの賞金の期待金額を求めよ。

（琉球大）

精講

優勝者が決まらない確率を求めるには，△を引き分けとして

(ア)　△△△，A△△，B△△，AB△

を考えるか

(イ)　AまたはBが優勝者となる余事象

を考えればよい。(2)のことを合わせると，本問では(イ)の方がよい。

(ア)で計算すると

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3+{}_3C_1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2+{}_3C_1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^2+3!\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{6}=\frac{13}{54}$$

解　答　(1)　1回のゲームでAが勝つ確率は $\frac{1}{2}$

Aが優勝する確率は　　${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

1回のゲームでBが勝つ確率は　$1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}$

Bが優勝する確率は　　${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{6}{27}+\frac{1}{27}=\frac{7}{27}$

したがって，優勝者が決まらない確率は

$1-\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{27}\right)=\frac{13}{54}$　　……(答)

(2)　Aの期待金額：$2000\cdot\frac{1}{2}+1000\cdot\frac{13}{54}=1240\frac{20}{27}$（円）　　……(答)

Bの期待金額：$3000\cdot\frac{7}{27}+1000\cdot\frac{13}{54}=1018\frac{14}{27}$（円）　　……(答)

基礎問 60. ▶$E(ax+by)$◀

1 から 10 までの数字を 1 つずつ記入したカード 10 枚の中から，同時に 2 枚を引きぬくとき，それらに記入されている数字のうち大きい方をX，小さい方をYとする。

(1) XおよびYの確率分布を求めよ。

(2) X，Yおよび $3X+6Y+1$ の期待値を求めよ。

（大阪教育大）

精講

X，Yを確率変数，a，bを定数とするとき，期待値は次の性質を満たす。

① $\boldsymbol{E(aX+b)=aE(X)+b}$

② $\boldsymbol{E(X+Y)=E(X)+E(Y)}$

③ **X，Yが独立ならば，$E(XY)=E(X)E(Y)$**

証明は研究で扱うことにして，①，②を使うと(2)は

$$E(3X+6Y+1)=3E(X)+6E(Y)+1$$

を求めればよい。

解　答　(1)　$X=k\ (2\leqq k\leqq 10)$となるのは，Yのとり方が 1，2，……，$k-1$ の $k-1$ 通りあるから

$$P(X=k)=\frac{k-1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{k-1}{45}\quad(2\leqq k\leqq 10)\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

$Y=k\ (1\leqq k\leqq 9)$となるのは，Xのとり方が，$k+1$，$k+2$，……，10 の $10-k$ 通りあるから

$$P(Y=k)=\frac{10-k}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{10-k}{45}\quad(1\leqq k\leqq 9)\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$$E(X)=\sum_{k=2}^{10}k\frac{k-1}{45}=\frac{1}{45}\sum_{k=1}^{10}k(k-1)=\frac{22}{3}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{9}k\frac{10-k}{45}=\frac{1}{45}\sum_{k=1}^{9}(10k-k^2)$$

$$=\frac{450-285}{45}=\frac{11}{3}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

$$\therefore\quad E(3X+6Y+1)=3E(X)+6E(Y)+1$$

$$=22+22+1=45\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

研究

1° $E(aX+b)=aE(X)+b$ の証明

Xの確率分布を $P(X=x_k)=p_k$ とすると

$$E(aX+b)=\sum_{k=1}^{n}(ax_k+b)p_k$$
$$=a\sum_{k=1}^{n}x_kp_k+b\sum_{k=1}^{n}p_k$$

確率の総和 $\sum_{k=1}^{n}p_k=1$ より

$$E(aX+b)=a\sum_{k=1}^{n}x_kp_k+b$$
$$\therefore\ E(aX+b)=aE(X)+b$$

2° $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ の証明

$P(X=x_i)=p_i$, $P(Y=y_j)=q_j$

$P(X=x_i,\ Y=y_j)=r_{ij}$ のとき

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	計
x_1	r_{11}	r_{12}	$\cdots$	r_{1n}	p_1
x_2	r_{21}	r_{22}	$\cdots$	r_{2n}	p_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	r_{m1}	r_{m2}	$\cdots$	r_{mn}	p_m
計	q_1	q_2	$\cdots$	q_n	1

$$E(X+Y)=\sum_{i,j}(x_i+y_j)r_{ij}$$
$$=\sum_{i,j}x_ir_{ij}+\sum_{i,j}y_jr_{ij}$$
$$=\sum_{i=1}^{m}x_ip_i+\sum_{j=1}^{n}y_jq_j$$
$$=E(X)+E(Y)$$

ここで，$\sum_{i,j}$ は i，j についての和 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}$ を表す。

また，確率変数が3つ以上になった場合でも

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$$

は成立する。

3° $E(XY)=E(X)E(Y)$ の証明

確率変数 **X，Y が独立**とは，X，Yのとりうる任意の値 x，y に対して，事象 $\{X=x\}$，$\{Y=y\}$ が独立のとき，すなわち

$$P(X=x,\ Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$$

が成り立つことをいう。ここで，$\{X=x\}\cap\{Y=y\}$ を簡単に $\{X=x,\ Y=y\}$ と書いている。

このとき，$P(X=x,\ Y=y)=r_{ij}=p_iq_j$ ゆえ

$$E(XY)=\sum_{i,j}x_iy_j\cdot(p_iq_j)=\sum_{i=1}^{m}x_ip_i\sum_{j=1}^{n}y_jq_j$$
$$=E(X)E(Y)$$

基礎問 61. ▶どちらが有利？◀

次の2種類のゲームがある。

A：サイコロを2回投げ，出た目の数の和の2倍の賞金(ドル)をもらう。

B：サイコロを1回投げ，出た目の数をXとする。Xが奇数のとき，賞金 3(ドル) をもらう。Xが偶数のとき，さらに4回まで投げることができるが，n回目($n=1$, 2, 3, 4)ではじめてXと同じ目が出れば賞金 $6n^2$(ドル)をもらって終わる。ただし，4回ともX以外の目ならば賞金はもらえないで終わる。

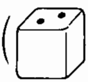
いま，15(ドル)払ってA，Bどちらかのゲームをするとき

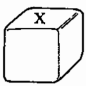
(1) 損をしない確率が大きいのは，A，Bのどちらか。

(2) 賞金の期待値の大きいのはA, Bのどちらか。（名古屋市大-医）

精講

まず，ルールを理解しよう。

ゲームA：2( + ) $=2(Y_1+Y_2)$

ゲームB： 

$\begin{cases} X\text{が奇数} \longrightarrow 3X \\ X\text{が偶数} \longrightarrow 6n^2 \text{ または } 0 \ (n=1,\ 2,\ 3,\ 4) \end{cases}$

(1) 損をしない確率とは，賞金が15ドル以上となる確率である。

(2) ゲームAの期待値は $E\{2(Y_1+Y_2)\}=2\{E(Y_1)+E(Y_2)\}$ が使える。ゲームBについてはコツコツ計算するしかない。

解答 (1) ゲームAについて，1回目に出た目の数を Y_1, 2回目を Y_2 とすると，賞金 $2(Y_1+Y_2)$ は右の表のようになる。

Y_1 \ Y_2	1	2	3	4	5	6
1	4	6	8	10	12	14
2	6	8	10	12	14	16
3	8	10	12	14	16	18
4	10	12	14	16	18	20
5	12	14	16	18	20	22
6	14	16	18	20	22	24

損をしない確率は

$P\{2(Y_1+Y_2)\geqq 15\}$

$=\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$

ゲームBについて，確率分布表をつくると

賞金	$3\cdot1$	$3\cdot3$	$3\cdot5$	$6\cdot1^2$	$6\cdot2^2$	$6\cdot3^2$	$6\cdot4^2$	0
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4$

損をしない確率は

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left\{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}\right\}=\frac{887}{12\cdot216}<\frac{5}{12}$$

よって，損をしない確率はAの方が大きい。　……(答)

(2)　賞金の期待値は

ゲームA：$E\{2(Y_1+Y_2)\}=2\left(\frac{7}{2}+\frac{7}{2}\right)=14$

ゲームB：$E=(3+9+15)\cdot\frac{1}{6}$

$$+\frac{1}{2}\left(6\cdot\frac{1}{6}+24\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+54\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+96\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}\right)$$

$$=\frac{3115}{216}>14$$

よって，賞金の期待値はBの方が大きい。　……(答)

研究　本問を解いてみて，AとBのゲームではどちらを選択するのが有利なのであろうか。実は有利という言葉は人の価値観がともなうものであって，数学的には定義されない。しかし，入試では次のような問題もある。このときには期待値をもって比較するのが慣習となっている。

▶演習◀

[50]　Aが100円硬貨を4枚，Bが50円硬貨を3枚投げ，硬貨の表が出た枚数の多い方を勝ちとし，同じ枚数のときは引き分けとする。硬貨の表，裏の出る確率はすべて$\frac{1}{2}$であるものとする。

(1)　Aの勝つ確率，Bの勝つ確率，引き分けの確率を求めよ。

(2)　もし，勝った方の相手が投げた硬貨を全部もらえるとしたら，AとBとどちらが有利か。　(東大)

基礎問 62. ▶分散 $V(X)$◀

箱の中に数字 0 を記入したカードが 1 枚，1 を記入したカードが 2 枚，2 を記入したカードが 3 枚，3 を記入したカードが 4 枚，計 10 枚のカードがはいっている。この中から同時に 2 枚のカードをとり出すとき，カードに記入されている数字の和を X とする。

(1)　X の確率分布を求めよ。

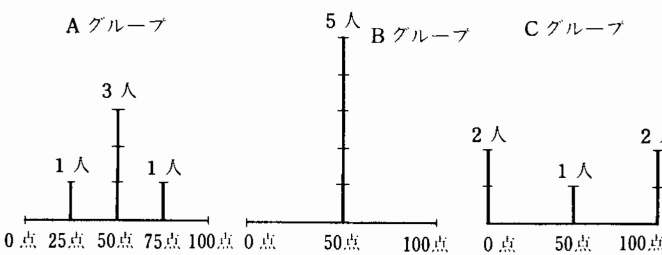
(2)　X の期待値(平均値)と分散を求めよ。　(北海学園大)

精講

1°　分散とは何か。 5 人ずつからなる 3 つのグループにある試験をして次の結果を得た。

	Aグループ	Bグループ	Cグループ
100 点			2 人
75 点	1 人		
50 点	3 人	5 人	1 人
25 点	1 人		
0 点			2 人

平均点をみると，どのグループも 50 点である。だからといって，3 つのグループは似たようなものだといえるだろうか。その内訳をみると B と C とではあまりにも点のとり方が違いすぎる。点のバラツキ具合を示す尺度はないものか。グラフにすると



となる。バラツキ具合の尺度(散布度)として，平均点からの距離の平均をとってみよう。平均 $E(X)$ を m とおくなら　$E(|X-m|)$ を調べるわけである。これは**平均偏差**とよばれる。

$$E_A(|X-50|)=\frac{25\times2+0\times3}{5}=10$$

$$E_B(|X-50|)=\frac{0\times5}{5}=0$$

$$E_C(|X-50|)=\frac{50\times4+0\times1}{5}=40$$

したがって，Bはバラツキが全くなく同質の人の集まり，Cはバラツキが一番大きい個性豊かな人の集まりということになる。

これとは別の尺度もとれる。$|X-m|$ の平均ではなく，$(X-m)^2$ の平均をとるのだ。これはXの**分散**(Variance)とよばれ，これの正の平方根はXの**標準偏差**(Deviation)とよばれる。標準偏差 $D(X)$ は σ とも表される。すなわち

分散：$\boldsymbol{V(X)=\sigma^2=E\{(X-m)^2\}}$

標準偏差：$\boldsymbol{D(X)=\sigma=\sqrt{V(X)}}$

上の例でみると

$$V_A(X)=\frac{25^2\times2+0^2\times3}{5}=250, \qquad \sigma_A=5\sqrt{10}$$

$$V_B(X)=\frac{0^2\times5}{5}=0, \qquad \sigma_B=0$$

$$V_C(X)=\frac{50^2\times4+0^2\times1}{5}=2000, \qquad \sigma_C=20\sqrt{5}$$

やはり，Cのバラツキが一番大きいことが数字にあらわれている。

平均偏差は直感的にはわかりやすいが，統計量としては分散や標準偏差のほうがすぐれている。

2° 分散 $V(X)$ は次のように計算されることが多い。

$\boldsymbol{V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2}$ (重要公式)

(2乗の平均)−(平均の2乗) というわけだ。証明しておこう。

$m=E(X)$ とおくと

$$\begin{aligned}V(X)&=E\{(X-m)^2\}\\&=E(X^2-2mX+m^2)\\&=E(X^2)-2mE(X)+m^2\\&=E(X^2)-2m^2+m^2\\&=E(X^2)-m^2\\&=E(X^2)-\{E(X)\}^2\end{aligned}$$

解　答　(1)　$1 \leqq X \leqq 6$ である。

$$P(X=1)=\frac{{}_1C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{2}{45}$$

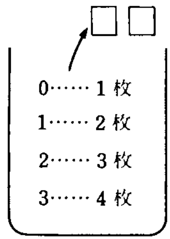
$$P(X=2)=\frac{{}_2C_2+{}_1C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{4}{45}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_2C_1 \cdot {}_3C_1+{}_1C_1 \cdot {}_4C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{10}{45}$$

$$P(X=4)=\frac{{}_2C_1 \cdot {}_4C_1+{}_3C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{11}{45}$$

$$P(X=5)=\frac{{}_3C_1 \cdot {}_4C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{12}{45}$$

$$P(X=6)=\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{6}{45}$$



確率分布表にまとめると

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{2}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{11}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{6}{45}$

……(答)

(2)　期待値　$E(X)=\frac{1}{45}(1 \cdot 2+2 \cdot 4+3 \cdot 10+4 \cdot 11+5 \cdot 12+6 \cdot 6)$

$=4$　……(答)

$$E(X^2)=\frac{1}{45}(1^2 \cdot 2+2^2 \cdot 4+3^2 \cdot 10+4^2 \cdot 11+5^2 \cdot 12+6^2 \cdot 6)$$

$$=\frac{800}{45}=\frac{160}{9}$$

$\therefore$　分散　$V(X)=\frac{160}{9}-4^2=\frac{16}{9}$　……(答)

▶演習◀

[51]　つぼの中に，4 個の白いボールと 6 個の赤いボールが入っている。いま，つぼの中から 4 個のボールを取り出したとき，その中に含まれる赤いボールの個数をXとする。このとき，確率変数Xの期待値と分散を求めよ。　(旭川医大)

基礎問 63. ▶$E(aX+bY)$, $V(aX+bY)$◀

1つのさいころを3回振って出る目を順に X_1, X_2, X_3 とし

$X=\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}$ とおく。

(1) Xの期待値 $E(X)$, 分散 $V(X)$ を求めよ。

(2) 期待値 $E\{(X_1-X)^2+(X_2-X)^2+(X_2-X)^2\}$ を求めよ。

(富山大)

精講 期待値 $E(X)$ についての性質は基礎問58でふれた。ここでは分散 $V(X)$ の性質をあげておこう。

X, Yを確率変数, a, bを定数とすると

① $\boldsymbol{V(aX+b)=a^2V(X)}$

② **X, Y が独立ならば, $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$**

証明は研究で扱うことにして, ①, ②を使うと

$$V\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right)=\frac{V(X_1+X_2+X_3)}{3^2}$$

$$=\frac{V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)}{3^2} \quad (\because\ X_1,\ X_2,\ X_3 \text{ は独立})$$

となる。

解答 (1) $i=1$, 2, 3 に対して

$$E(X_i)=\frac{1}{6}(1+2+\cdots+6)=\frac{7}{2}$$

$$E(X_i^2)=\frac{1}{6}(1^2+2^2+\cdots+6^2)=\frac{91}{6}$$

$$V(X_i)=E(X_i^2)-\{E(X_i)\}^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$$

したがって,

$$E(X)=E\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right)=\frac{E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)}{3}$$

$$=E(x_i)=\frac{7}{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

X_1, X_2, X_3 は独立であるから

$$V(X)=V\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right)=\frac{V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)}{9}$$

$$=\frac{V(X_i)}{3}=\frac{35}{36}$$ ……(答)

(2)　$E\{(X_1-X)^2+(X_2-X)^2+(X_3-X)^2\}$

$$=E\{X_1^2+X_2^2+X_3^2-2(X_1+X_2+X_3)X+3X^2\}$$
$$=E(X_1^2+X_2^2+X_3^2-3X^2)$$
$$=3\{E(X_i^2)-E(X^2)\}$$

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=\frac{35}{36}+\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{119}{9}$$

したがって，与式$=3\left(\frac{91}{6}-\frac{119}{9}\right)=\frac{35}{6}$ ……(答)

研究

1°　$V(aX+b)=a^2V(X)$ の証明

$$V(aX+b)=E\{(aX+b-E(aX+b))^2\}$$
$$=E\{(aX+b-(aE(X)+b))^2\}$$
$$=E\{(aX-aE(X))^2\}$$
$$=a^2E\{(X-E(X))^2\}$$
$$=a^2V(X)$$

2°　$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ の証明

X，Y は独立であるから，$E(XY)=E(X)E(Y)$ が使える。

$$V(X+Y)=E((X+Y)^2)-(E(X+Y))^2$$
$$=E(X^2+2XY+Y^2)-\{E(X)+E(Y)\}^2$$
$$=[E(X^2)-\{E(X)\}^2]+[E(Y^2)-\{E(Y)\}^2]$$
$$=V(X)+V(Y)$$

▶演習◀

[52]　確率変数Xのとる値は 15，20，25，30，35，40，45 であり，それぞれの値をとる確率は順に $\frac{1}{10}$，$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{10}$ である。

$Y=\frac{1}{5}(X-30)$ とおくとき，Yの平均 $E(Y)=$□，

分散 $V(Y)=$□，したがってXの平均 $E(X)=$□，

分散$V(X)=$□である。　(東京慈恵会医大)

II. 連続確率分布

基礎問 64. ▶確率密度関数◀

ある人が会社に通勤するのに要する時間を x とする。x の変域を $20 \leqq x \leqq 50$ とし，x の確率密度関数を $f(x)=kx+\dfrac{17}{10}$ とする。

(1) k の値を求めよ。

(2) a，b が，$20 \leqq a \leqq b \leqq 50$ であるとき，

$$P(a \leqq x \leqq b)=\int_a^b f(x)dx$$

の値を a，b で示せ。

(3) $P(t \leqq x \leqq t+10)=\dfrac{1}{3}$ を満たす t の値を求めよ。ただし，t，$t+10$ はいずれも x の変域内とする。 (岩手医大)

精講

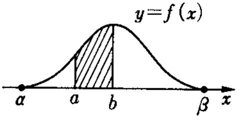
1° 今までは，確率変数が離散的なものだけを扱ってきたが，人の身長，物の長さ，待ち時間，電話の通話時間など確率変数が連続的に変わるものも多い。このような連続変量Xのことを**連続的確率変数**という。

連続的確率変数Xのとり得る全範囲が区間 $[\alpha,\ \beta]$ であるとしよう。このとき，Xが $a \leqq X \leqq b$ $(\alpha \leqq a \leqq b \leqq \beta)$ である確率 $P(a \leqq X \leqq b)$ が

$$\boldsymbol{P(a \leqq X \leqq b)=\int_a^b f(x)dx}$$

で与えられ 関数 $f(x)$ が

$$\boldsymbol{f(x) \geqq 0,\quad \int_\alpha^\beta f(x)dx=1}$$



を満たすとき，$f(x)$ をXの**確率密度関数**といい，曲線 $y=f(x)$ をXの**確率分布曲線(確率密度曲線)**という。

すなわち，Xが $a \leqq X \leqq b$ となる確率は，曲線 $y=f(x)$ と x 軸とではさまれた $a \leqq x \leqq b$ 間の面積ということになる。

離散的な確率分布と連続的な確率分布の性質，用語を比較すると次のようになる。

離散的確率変数 X		連続的確率変数 X
$X=k$	……	$a\leqq X\leqq b$
$P(X=k)=p_k$	……	$P(a\leqq X\leqq b)=\int_a^b f(x)dx$
$0\leqq p_k\leqq 1$	……	$0\leqq \int_a^b f(x)dx\leqq 1$
$\sum_{k=1}^{n} p_k=1$	……	$\int_\alpha^\beta f(x)dx=1$
確率分布表	……	確率分布曲線

解　答　(1)　$\int_{20}^{50}f(x)dx=1$ より

$$\int_{20}^{50}\left(kx+\frac{17}{10}\right)dx=\left[\frac{k}{2}x^2+\frac{17}{10}x\right]_{20}^{50}$$

$$=\frac{2100}{2}k+17\cdot 3=1$$

$\therefore\quad 1050k+50=0\qquad\therefore\quad k=-\frac{1}{21}$　……(答)

(2)　$P(a\leqq x\leqq b)=\int_a^b\left(-\frac{x}{21}+\frac{17}{10}\right)dx$

$$=\left[-\frac{x^2}{42}+\frac{17}{10}x\right]_a^b=-\frac{b^2-a^2}{42}+\frac{17}{10}(b-a)$$　……(答)

(3)　$20\leqq t<t+10\leqq 50$ より，$20\leqq t\leqq 40$

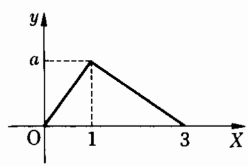
(2)において，$a=t$，$b=t+10$ とすると

$$P(t\leqq x\leqq t+10)=-\frac{20t+100}{42}+17=\frac{1}{3}$$

これを解いて　$t=30$　……(答)

▶演習◀

[53]　右の図のような確率密度曲線について，次の問いに答えよ。ただし，Xを確率変数とする。



(1)　aの値を求めよ。

(2)　$0\leqq X\leqq x$ $(0\leqq x\leqq 3)$ となる確率を $F(x)$ とするとき，$F(x)$ のグラフをかけ。

（岩手医大）

基礎問 65. ▶平均値◀

確率変数Xの確率密度関数$f(x)$が

$$f(x)=a\sin x \quad (0\leqq x\leqq \pi)$$

で与えられるとき，aの値およびXの平均値を求めよ。(旭川医大)

精講　連続的確率変数Xの期待値(平均値)$E(X)$はXの確率密度関数が$f(x)$で，$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=1$ のとき

$$\boldsymbol{E(X)=\int_{\alpha}^{\beta}xf(x)dx}$$

で与えられる。離散的なものの期待値は

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k$$

であったから，$\Sigma \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}=\int(\quad)dx$ と拡張されたものになっている。

解答　$\int_0^{\pi}f(x)dx=\Big[-a\cos x\Big]_0^{\pi}=1$ より

$2a=1$　　$\therefore$　$a=\dfrac{1}{2}$　　……(答)

平均値 $E(X)=\int_0^{\pi}xf(x)dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}x\sin xdx$

$$=\frac{1}{2}\Big[-x\cos x+\sin x\Big]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$　　……(答)

▶演習◀

[54]　閉区間 [0, a] ($a>0$) のすべての値をとる確率変数Xの確率密度関数を $f(x)=b(4-x)x$ とする。

(1)　Xの平均値が $\dfrac{a}{2}$ のとき，a，bの値を求めよ。

(2)　tの方程式 $4t^2-12t+9(X-1)=0$ の2つの解がともに正となるXの確率を求めよ。　(都立大)

基礎問　66.

確率変数Xが区間［0, 10］の任意の値をとることができ，その確率密度関数が $f(x)=kx(10-x)$（k は定数）で与えられているとする。

このとき，k の値は $\boxed{(ア)\quad}$ であり，確率 $P(3\leqq X\leqq 7)$ は $\boxed{(イ)\quad}$ となる。

また，平均値と標準偏差を計算するとそれぞれ $\boxed{(ウ)\quad}$，$\boxed{(エ)\quad}$ となる。

（旭川医大）

精講

連続的確率変数Xの確率密度関数 $f(x)$ が $\alpha\leqq x\leqq\beta$ で定義されるとき $\left(\text{すなわち }\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=1\right)$，平均値を $E(X)$ とすると

$$\text{分散}\quad \boldsymbol{V(X)=\int_{\alpha}^{\beta}\{x-E(X)\}^2f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{=\int_{\alpha}^{\beta}x^2f(x)dx-\{E(X)\}^2}$$

$$\text{標準偏差}\quad \boldsymbol{\sigma=\sqrt{V(X)}}$$

である。

解答　$\displaystyle\int_0^{10}f(x)dx=k\frac{10^3}{6}=1$　より　$k=\dfrac{3}{500}$　……(ア)

よって，$\displaystyle P(3\leqq X\leqq 7)=\frac{3}{500}\int_3^7 x(10-x)dx$

$$=\frac{3}{500}\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_3^7=\frac{71}{125}\quad\text{……(イ)}$$

平均値 $\displaystyle E(X)=\int_0^{10}xf(x)dx=\frac{3}{500}\left[\frac{10}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^{10}=5$　……(ウ)

また，$\displaystyle E(X^2)=\int_0^{10}x^2f(x)dx$

$$=\frac{3}{500}\left[\frac{10}{4}x^4-\frac{x^5}{5}\right]_0^{10}=30$$

分散　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=30-5^2=5$

よって，標準偏差　$\sigma=\sqrt{V(X)}=\sqrt{5}$　……(エ)