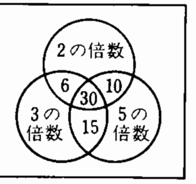
演習の解答

【1】(1)　2で割り切れないものは，4でも6でも割り切れないから，2, 3, 5のどれによっても割り切れないものの個数を求めればよい．



$$1000-\left[\frac{1000}{2}\right]-\left[\frac{1000}{3}\right]-\left[\frac{1000}{5}\right]$$
$$+\left[\frac{1000}{6}\right]+\left[\frac{1000}{10}\right]+\left[\frac{1000}{15}\right]-\left[\frac{1000}{30}\right]$$
$$=1000-500-333-200+166+100+66-33$$
$$=266$$
……(答)

(2)　千，百，十，一の位の数をそれぞれ x, y, z, u とおくと $x\neq 0$ より

$$4\times4\times3\times2=96$$
……(答)

3の倍数となるのは $x+y+z+u=6,\ 9$ のとき

$x+y+z+u=6$ となるのは　$\{x,\ y,\ z,\ u\}=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

$x+y+z+u=9$ となるのは　$\{x,\ y,\ z,\ u\}=\{0,\ 2,\ 3,\ 4\}$

のときであるから，$x\neq 0$ に注意すると

$$(3\times3\times2\times1)\times2=36$$
……(答)

【2】　4桁の最高位には0がこないから　$5\cdot{}_5P_3=5\cdot5\cdot4\cdot3=300$ ……(答)

次に 3210 より大きいものは

3 2 1○　となるのは○が 4, 5 の2個

$\left.\begin{array}{l}3\ 2\ 4○\\3\ 2\ 5○\end{array}\right\}$ となるのは　${}_3P_1\times2=6$

$\left.\begin{array}{l}3\ 4○○\\3\ 5○○\end{array}\right\}$ となるのは　${}_4P_2\times2=24$

$\left.\begin{array}{l}4○○○\\5○○○\end{array}\right\}$ となるのは　${}_5P_3\times2=120$

よって，　　$2+6+24+120=152$ ……(答)

【3】(1)　50円玉，10円玉の枚数をそれぞれ x, y とおくと

$$50x+10y=50n$$

x を決めると y は $y=5(n-x)$ と一意的に決まる．x は $0\leqq x\leqq n$ であるから，組 $(x,\ y)$ は $(n+1)$ 通り である．

(2)　　$100x+50y+10z=100n$

とおく．xを固定すると

$$50y+10z=50(2n-2x)$$

(1)より，組 $(y,\ z)$ は $2(n-x)+1$ 通り

$$\therefore\quad \sum_{x=0}^{n}\{2(n-x)+1\}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}(2n+1-2x)$$

$$=(2n+1)(n+1)-2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=(n+1)^2 \text{ 通り}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　　$500x+100y+50z+10u=10000$

とおく．xを固定すると

$$100y+50z+10u=100(100-5x)$$

(2)より，組 $(y,\ z,\ u)$ は $(101-5x)^2$ 通り．x は $0\leqq x\leqq 20$ の範囲で動くから

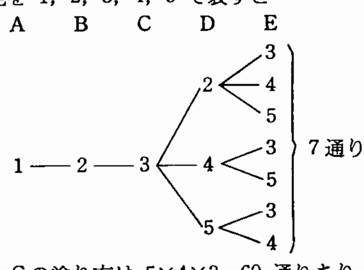
$$\sum_{x=0}^{20}(101-5x)^2=\sum_{x=0}^{20}(101^2-1010x+25x^2)$$

$$=10201\cdot 21-1010\cdot\frac{20\cdot 21}{2}+25\cdot\frac{20\cdot 21\cdot 41}{6}$$

$$=73871 \text{ 通り}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

【4】(1)　${}_5P_5=5!=120$ 通り　……(答)

(2)　5つの色を 1, 2, 3, 4, 5 で表すと



A, B, Cの塗り方は $5\times4\times3=60$ 通りあり，それぞれの塗り方に対してD, Eの塗り方は7通りあるから

$$60\times7=420 \text{ 通り}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

【5】

$3y$	$2z$	x
3	2	6
	4	4
	6	2
6	2	3
	4	1

5通り

よって，$(x,\ y,\ z)$ の組は　5　……(答)

【6】(1)　A家の息子をA，娘をaのように表し，残る人を×と表せば

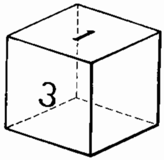
A	B	C	D
b	a	×	c
	c	a	×
		×	a
	×	a	c
c	a	b	×
		×	b
	×	a	b
		b	a
×	a	b	c
	c	a	b
		b	a

の11通り　……(答)

(2)　(1)の樹形図より　7通り　……(答)

【7】上面を1と固定する．下面は 2，4，6 の3通り（下面を2と考える）．次に，前面を3と固定する．後面は2通り（後面を4と考える）．最後に，左右の記入の仕方は2通り．

$\therefore\ 3\times2\times2=12$ 通り　……(答)



【8】$60=2^2\cdot3\cdot5=5\cdot4\cdot3={}_5\mathrm{P}_3$　$\therefore\ n=5,\ r=3$　……(答)

（研究）$(n,\ r)$ がこれ1組しかないのか？　が心配なら

$r>1$ より，$r=2$ のとき　${}_n\mathrm{P}_2=n(n-1)=60$　整数解なし．

$r=3$ のとき　${}_n\mathrm{P}_3=n(n-1)(n-2)=60$

$(n-5)(n^2+2n+12)=0$　$\therefore\ n=5$

$r=4$ のとき　${}_4\mathrm{P}_4=24,\ {}_5\mathrm{P}_4=120,\ \nearrow$（${}_n\mathrm{P}_4$ は単調増加）　解なし

よって，$r\geqq4$ では解なし

$$\therefore \quad n=5,\ r=3$$

【9】(1)　最高位には0はこないから

$$5\times5!=600$$ ……(答)

(2)　末位を0か5に決めて，次に最高位から並べていくと

$$5!+4\times4!=216$$ ……(答)

【10】(1)　集合をつくるときに，x_1 を含むか含まないかの2通りの選択がある．他も同様である．すべての要素を含まない場合，すなわち空集合になる場合を除くと

$$2^n-1$$ ……(答)

(2)　a_2，……，a_8 について，“含む，含まない”を考えて

$$2^7=128$$ ……(答)

【11】5つの母音字をまず並べ，3つの子音字を割り込ませると考えると，子音字は右のように5か所に割り込める．

∧ a ∧ e ∧ i ∧ o ∧ u

$$\therefore \quad {}_5P_5\times5\cdot4\cdot3=7200$$ ……(答)

（注）　子音字の直後は母音字がこなければいけないので，u の右には子音字はこない．

【12】1列に並べる仕方は

$$\frac{9!}{3!2!}=30240\ （通り）$$ ……(答)

AAA と3文字連続するのは，これを1つとみて

$$\frac{7!}{2!}=2520\ （通り）$$ ……(答)

両端にAがくるのは　$\dfrac{7!}{2!}=2520$

S がくるのは　$\dfrac{7!}{3!}=840$

であるから

$$2520+840=3360\ （通り）$$ ……(答)

【13】婚約者同志を1人とみて

$$(4-1)!\times2^4=96\ （通り）$$ ……(答)

【14】 (1)
$$(8-1)!=7!$$
……(答)

(2)　a，bの並び方は2通りあり，これを1つとみると
$$2\times 7!$$
……(答)

(3)　aとbの間にどの文字が入るかで6通り考えられるから
$$2\cdot 6\times 6!=12\cdot 6!$$
……(答)

【15】 白石8個と黒石7個を1列に並べる順列の数は
$$\frac{15!}{8!7!}$$
であるから，これらを輪に並べる方法は
$$\frac{15!}{8!7!}\times\frac{1}{15}=429\ (\text{通り})$$
……(答)

【16】 a_1，a_4，a_7，a_{10} をどれにするかで，${}_{10}C_4$
そのそれぞれに対し，a_2，a_5，a_8 を残りのどれにするかで，${}_6C_3$
残りの a_3，a_6，a_9 は自動的に決まる．
$${}_{10}C_4\cdot{}_6C_3=210\cdot 20=4200\ (\text{通り})$$
……(答)

【17】 男子のみ，女子のみの場合を全体から引く．
$${}_9C_3-({}_5C_3+{}_4C_3)=84-(10+4)$$
$$=70$$
……(答)

【18】 (1)
$$4^5=1024$$
……(答)

(2)　4種類の中から重複を許して5個を取り，大小の順に並べる．
$${}_4H_5={}_8C_5=56$$
……(答)

(3)　1つの数字だけが2回使われるから
$${}_4C_1\times\frac{5!}{2!}=240$$
……(答)

【19】 (1)　球，立方体，正三角錐の個数をそれぞれ x，y，z とすると
$$x+y+z=10,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$$
これを満たす整数解（x，y，z）の個数を求めればよい．
$${}_3H_{10}={}_{12}C_{10}=66$$
……(答)

(2)　はじめに球と立方体を1個ずつ入れて，残り8個のセットをつくればよい．　$x+y+z=8,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$
$$\therefore\ {}_3H_8={}_{10}C_8=45$$
……(答)

【20】 偶数が2個，奇数が1個となる組合せは

$${}_{10}C_2 \cdot {}_{10}C_1 = 450 \qquad \cdots\cdots(答)$$

積が偶数となる組合せは，積が奇数となるものを除いて

$${}_{20}C_3 - {}_{10}C_3 = 1020 \qquad \cdots\cdots(答)$$

積が4の倍数となる組合せは，奇数の個数が 0，1，2 で場合分けして

$${}_{10}C_3 + {}_{10}C_1 \cdot {}_{10}C_2 + {}_{10}C_2 \cdot {}_5C_1 = 795 \qquad \cdots\cdots(答)$$

積が8の倍数となる組合せについても奇数の個数で場合分けすると

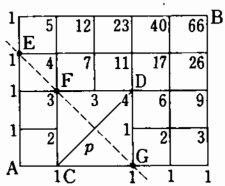
$${}_{10}C_3 + {}_{10}C_1 \cdot ({}_{10}C_2 - {}_5C_2) + {}_{10}C_2 \cdot {}_2C_1 = 560 \qquad \cdots\cdots(答)$$

［別解］ 4の倍数から8の倍数でないものを引いてもよい．

$$795 - (\underbrace{{}_{10}C_1 \cdot {}_5C_2}_{奇数1個} + \underbrace{{}_{10}C_2 \cdot {}_3C_1}_{奇数2個}) = 795 - 235 = 560$$

【21】 (1) A→C→D→Bの経路をとるから

$$1 \times 1 \times \frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ 通り} \qquad \cdots\cdots(答)$$

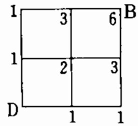


(2) A→E→B，A→F→B，A→G→B と場合分けして

$$1 \times \frac{6!}{5!} + \frac{3!}{2!} \times \frac{6!}{4!2!} + 1 \times \frac{6!}{2!4!}$$

$$= 6 + 3 \cdot 15 + 15 = 66 \text{ 通り} \qquad \cdots\cdots(答)$$

［別解］ (1)は右図のように，(2)は上図のように直接数え上げてもよい．



【22】 (1) $10^4 = 10000$ ……(答)

(2) ${}_{10}C_4 = 210$ ……(答)

(3) おのおのの x に対し $f(x) \neq x$ となるのは9通りであるから

$$10^4 - 9^4 = 10000 - 6561 = 3439 \qquad \cdots\cdots(答)$$

(4) Nの中より像となる2つの数を選ぶ．この2個の数からなる集合への M からの写像は全部で 2^4 通りで，1つの要素だけに写像されるものは2通りであるから

$${}_{10}C_2 \times (2^4 - 2) = 630 \qquad \cdots\cdots(答)$$

【23】 (1) ${}_5P_3 = 60$ ……(答)

(2) $f(xy) = f(x)f(y)$ において $y=0$ とおくと

$$f(0) = f(x)f(0)$$

$f(0)\fallingdotseq 0$ ならば，すべての x について　$f(x)=1$　……(答)

また，$y=1$ とおくと

$$f(x)=f(x)f(1)\qquad \therefore\quad f(x)\{f(1)-1\}=0$$

$f(1)\fallingdotseq 1$ ならば，すべての x について　$f(x)=0$　……(答)

上の 2 つでない場合；$f(0)=0$, $f(1)=1$ のときを考える．

$x=y=-1$ とおくと

$$f(1)=f(-1)f(-1)\qquad \therefore\quad f(-1)=\pm 1$$

2 個の写像が考えられ，上の場合と合わせて　4　……(答)

(3)　$g(x)-2x\in A$ より

$g(0)=-1$, 0, 1 の 3 通り

$g(-1)+2=0$, 1 の 2 通り

($\because$　$g(-1)+2=-1$ では $g(-1)=-3\in B$)

$g(1)-2=-1$, 0 の 2 通り

$\therefore$　$3\times 2\times 2=12$　……(答)

【24】 一般項 $\dfrac{7!(-2)^r}{p!q!r!}a^pb^qc^r$ であるから $a^3b^2c^2$ の係数は

$$\frac{7!(-2)^2}{3!2!2!}=840$$　……(答)

【25】 一般項 $\dfrac{5!a^q}{p!q!r!}x^{p-r}$ であるから，$p+q+r=5$, $p-r=3$

を解くと $(p,\ q,\ r)=(3,\ 2,\ 0)$, $(4,\ 0,\ 1)$

$$\frac{5!}{3!2!}a^2+\frac{5!}{4!}=45\qquad \therefore\quad a^2=4$$

$a>0$ のとき，x^4 の係数は負にならないから　$a<0$

$\therefore$　$a=-2$　……(答)

【26】 一般項 $\dfrac{10!}{p!q!r!}1^p(-x)^q(x^5)^r=\dfrac{10!}{p!q!r!}(-1)^qx^{q+5r}$

$p+q+r=10$, $q+5r=11$, $p\geqq 0$, $q\geqq 0$, $r\geqq 0$ より

$(p,\ q,\ r)=(3,\ 6,\ 1)$, $(7,\ 1,\ 2)$

$$\therefore\quad \frac{10!}{3!6!}-\frac{10!}{2!7!}=840-360=480$$　……(答)

【27】 (1)　一般項 $\dfrac{3!a^s}{p!q!r!s!}x^{3p+s}y^{3q+s}z^{3r+s}$

$p+q+s+r=3$, $3p+s=3q+s=3r+s=3$

かつ $p\geqq 0$, $q\geqq 0$, $r\geqq 0$, $s\geqq 0$ より

$$(p,\ q,\ r,\ s)=(0,\ 0,\ 0,\ 3),\ (1,\ 1,\ 1,\ 0)$$

$$\therefore\quad \frac{3!}{3!}a^3+3!=a^3+6 \qquad\cdots\cdots(答)$$

(2)　一般項 $\dfrac{4!\,a^s}{p!q!r!s!}x^{3p+s}y^{3q+s}z^{3r+s}$

$$\therefore\quad (p,\ q,\ r,\ s)=(0,\ 0,\ 0,\ 4),\ (1,\ 1,\ 1,\ 1)$$

$$\frac{4!}{4!}a^4+4!\,a=a^4+24a \qquad\cdots\cdots(答)$$

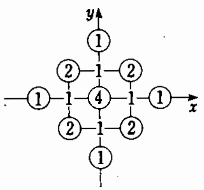
【28】

$$\int_0^1(ax+b)^n dx=\int_0^1(c_0+c_1x+\cdots\cdots+c_nx^n)\,dx$$

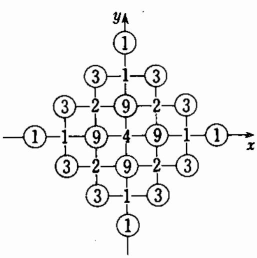
$$\left[\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}\right]_0^1=\left[c_0x+\frac{c_1}{2}x^2+\cdots\cdots+\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$$

$$\therefore\quad c_0+\frac{c_1}{2}+\cdots\cdots+\frac{c_n}{n+1}=\frac{(a+b)^{n+1}-b^{n+1}}{(n+1)a} \qquad\cdots\cdots(答)$$

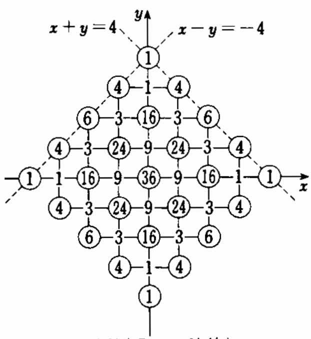
【29】



1秒後（○は2秒後）



2秒後（○は3秒後）



3秒後（○は4秒後）

(1)　上図からもわかるように，n 秒後には点Pは

$$x+y=n,\ n-2,\ n-4,\ \cdots\cdots,\ -n$$

$$x-y=n,\ n-2,\ n-4,\ \cdots\cdots,\ -n$$

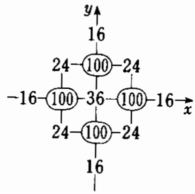
という $n+1$ 本ずつの直線の交点にあるから

$(n+1)^2$ 個　……(答)

(2)　4 秒後（○は 5 秒後）は右図のようであるから

$$p_4=\frac{36}{4^4}=\frac{9}{64},\quad p_5=0,\quad p_6=\frac{400}{4^6}=\frac{25}{256}$$

……(答)



［別解］ 点 $\mathrm{P}(x+y,\ x-y)$ が原点 (0, 0) に移る移り方を表にすると

$x+y$ $x-y$ の値	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
1 秒後						1	0	1					
2 秒後					1	0	2	0	1				
3 秒後				1	0	3	0	3	0	1			
4 秒後			1	0	4	0	6	0	4	0	1		
5 秒後		1	0	5	0	10	0	10	0	5	0	1	
6 秒後	1	0	6	0	15	0	20	0	15	0	6	0	1

$$p_4=\frac{6}{2^4}\cdot\frac{6}{2^4}=\frac{9}{64},\quad p_5=0,\quad p_6=\frac{20}{2^6}\cdot\frac{20}{2^6}=\frac{25}{256}$$

【30】 (1)　$5!=120$　……(答)

(2)　○，○，C，D，E の並べ方 $\dfrac{5!}{2!}=60$

$$\therefore\quad \frac{60}{120}=\frac{1}{2}$$　……(答)

(3)　○，○，○，C，Eの並べ方 $\dfrac{5!}{3!}=20$

ⒶⒷⒹ，ⒶⒹⒷの 2 通りが考えられ

$$\frac{20\times2}{120}=\frac{1}{3}$$　……(答)

(4)　AとBが隣り合う並べ方は　$4!\times2=48$

$$\therefore\quad 1-\frac{48}{120}=\frac{3}{5}$$　……(答)

［別解］ (2)　AがBより左にある順列とBがAより左にある順列は同数であるから，求める確率は $\dfrac{1}{2}$

(3)　ABD，ADB，BAD，DAB，BDA，DBA の順に並ぶ順列は同数ずつあるから $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

【31】(1) $\dfrac{{}_{10}C_3}{{}_{40}C_3}=\dfrac{10\cdot4\cdot3}{40\cdot19\cdot13}=\dfrac{3}{247}$ ……(答)

(2) $(1)\times4=\dfrac{12}{247}$ ……(答)

(3) $\dfrac{{}_4C_3\times10^3}{{}_{40}C_3}=\dfrac{4\cdot10^3}{40\cdot19\cdot13}=\dfrac{100}{247}$ ……(答)

【32】11文字をすべて区別すると，3文字の取り出し方は ${}_{11}C_3$ 通り

3文字すべてがkであるものは　1通り

3文字のうち2文字がkであるものは　${}_3C_2\times8=24$ 通り

3文字のうち2文字がiであるものは　${}_2C_2\times9=9$ 通り

求める確率は　$\dfrac{1+24+9}{{}_{11}C_3}=\dfrac{34}{165}$ ……(答)

【33】(1) $\dfrac{{}_6C_3}{6^3}=\dfrac{5\cdot4}{6^3}=\dfrac{5}{54}$ ……(答)

(2) U，N，I，Iの場所4か所，T，Yの場所2か所を決めた後，V，E，R，Sの場所を決める．2個あるIを区別して考えると

$$\frac{{}_{10}C_4\cdot2\times{}_6C_2\times4!}{10!}=\frac{1}{24}$$ ……(答)

【34】(1) $P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{12}$ ……(答)

(2) $P(E\cap\overline{F})=P(E)-P(E\cap F)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$ ……(答)

(3) $P(\overline{E}\cap\overline{F})=P(\overline{F})-P(E\cap\overline{F})=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{12}$ ……(答)

〔参考〕 $P(\overline{E}\cap\overline{F})=P(\overline{E\cup F})=1-P(E\cup F)$ としてもよい．

【35】(1) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-(P(A\cap B)$

$+P(B\cap C)+P(C\cap A))+P(A\cap B\cap C)$

$=p-q+r$ ……(答)

(2) $P((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A))$

$=P(A\cap B)+P(B\cap C)+P(C\cap A)$

$-3P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

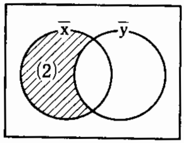
$=q-2r$ ……(答)

(3) $P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})$

$=1-P(A\cup B\cup C)$

$=1-p+q-r$ ……(答)

【36】 Xに誰か入るという事象をx，Yに誰か入るという事象をyとする．
否定の形のベン図は右図．



(1) $P(\overline{x})=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$ ……(答)

(2) $P(\overline{x}\cap y)=P(\overline{x})-P(\overline{x}\cap\overline{y})$

$=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3-\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{7}{27}$ ……(答)

(3) $P(\overline{x}\cup\overline{y})=P(\overline{x}\cap y)+P(\overline{y})=\dfrac{7}{27}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{15}{27}=\dfrac{5}{9}$ ……(答)

［別解］ x，yを部屋X，Yに入る，zをどちらにも入らず行き過ぎる，と置きかえれば

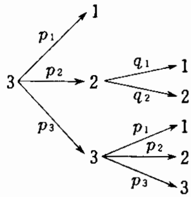
$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3y^2z+3y^2x+3z^2x+3z^2y+6xyz$$

の係数は行為x，y，zの総数に対応する．
（例 $3x^2y$ は部屋X，Yに2人，1人と入る入り方が3通りあることを示している.）

(1) $\dfrac{1+1+3+3}{3^3}=\dfrac{8}{27}$　(2) $\dfrac{1+3+3}{3^3}=\dfrac{7}{27}$

(3) $\dfrac{1+1+1+3+3+3+3}{3^3}=\dfrac{15}{27}=\dfrac{5}{9}$

【37】 “誰”が“どの手”でと考えて



(1) $p_1=\dfrac{{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{3^3}=\dfrac{1}{3}$ ……(答)

(2) $p_2=\dfrac{{}_3C_2\cdot{}_3C_1}{3^3}=\dfrac{1}{3}$

$p_3=1-(p_1+p_2)=\dfrac{1}{3}$

$q_1=\dfrac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{3^2}=\dfrac{2}{3}$

求める確率は　$p_2\cdot q_1+p_3\cdot p_1=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$ ……(答)

(3) $q_2=1-q_1=\dfrac{1}{3}$ より，求める確率は

$p_2\cdot q_2+p_3\cdot p_2=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$ ……(答)

【38】 (1) 赤白白の順で取り出せばよい．　$\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{35}$ ……(答)

(2) 負けが確定するのは1個，3個，5個のいずれかを取り出したとき，それぞれの確率を考えて

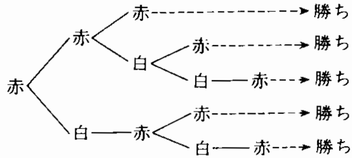
$$\frac{3}{7}+(1)+\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\times 2=\frac{3}{7}+\frac{4}{35}+\frac{2}{35}=\frac{3}{5}$$

赤 白 赤 白 白 （赤赤白白白もある）

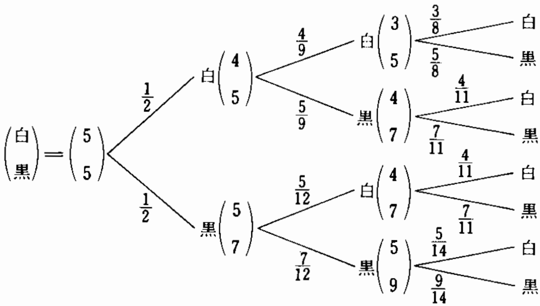
求める確率は $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$ （答）

［別解］ 右の樹形図より残りの赤玉の位置を考え

$$\frac{4+3+2+3+2}{{}_7C_4}=\frac{2}{5}$$



【39】

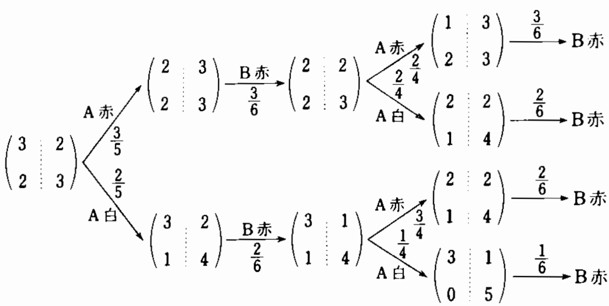


3 回目が白球である確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{11}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{14}=\frac{577}{1584}\quad\cdots\cdots(答)$$

3 回目が黒球である確率は $1-\frac{577}{1584}=\frac{1007}{1584}$ ……（答）

【40】 最初の状態を $\begin{pmatrix} A赤 & B赤 \\ A白 & B白 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ と表すと



(1) $\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{3}{6}+\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{6}=\dfrac{13}{30}$ ……（答）

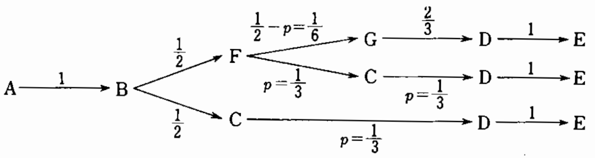
(2) $\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{3}{6}\left(\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{3}{6}+\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{6}\right)+\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{6}\left(\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{6}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{59}{360}$ ……（答）

(3) $\underbrace{\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\cdot\dfrac{{}_4C_2}{{}_7C_2}}_{(赤赤)}+\underbrace{\dfrac{3\cdot2}{{}_5C_2}\cdot\dfrac{{}_3C_2}{{}_7C_2}}_{(赤白)}+\underbrace{\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\cdot\dfrac{{}_2C_2}{{}_7C_2}}_{(白白)}=\dfrac{37}{210}$ ……（答）

【41】 (1) $P(\mathrm{F}\to\mathrm{J})+P(\mathrm{F}\to\mathrm{G})+P(\mathrm{F}\to\mathrm{C})=1$ より

$$P(\mathrm{F}\to\mathrm{G})=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$$ ……（答）

QがEに達する樹形図は



$$\therefore\quad P(\mathrm{A}\to\mathrm{E})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{18}$$ ……（答）

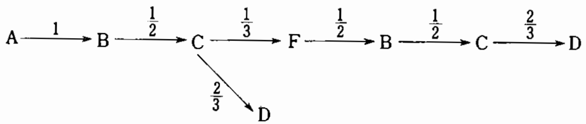
また，$P(\mathrm{A}\to\mathrm{E})=\dfrac{5}{24}$ となるのは

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-p\right)\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot p\cdot p+\frac{1}{2}\cdot p=\frac{5}{24}$$

$$\therefore\quad 12p^2+4p-1=0$$

$0<p<1$ より $$p=\frac{1}{6}$$ ……（答）

(2)



$$\therefore\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{13}{36}$$ ……（答）

【42】 事件Kが起こっている事象をX，AとBは事件が起こったといい，Cが起こらなかったという事象をYとおく．求める確率は

$$P_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X})=\frac{P(\mathrm{X}\cap\mathrm{Y})}{P(\mathrm{Y})}=\frac{P(\mathrm{X})P_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y})}{P(\mathrm{X})P_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y})+P(\overline{\mathrm{X}})P_{\overline{\mathrm{X}}}(\mathrm{Y})}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{9}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{8}{9}}=\frac{5}{9}$$ ……（答）

【43】取り出した球はもとにもどさないのでくじ引きの問題と同じである．白球を当たりくじと考えて，3回目に白球が取り出される確率は

$$\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$ ……（答）

また，3回目に白球であったとき，1回目も白球である確率は

$$\frac{9-1}{12-1}=\frac{8}{11}$$ ……（答）

【44】(1)（i）余事象を考え　$1-\frac{2}{6^2}=\frac{17}{18}$ ……（答）

（ii）①を満たす目の出方は 4×6 通り．余事象を考え

$$1-\frac{1}{4\cdot6}=\frac{23}{24}$$ ……（答）

(2)（i）②，④　（ii）②，③　（iii）③ ……（答）

【45】(1) $x=P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$，$x'=P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}$ より

$$y=\frac{P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})}{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}=\frac{P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}-1$$ ……（答）

(2) $x>0$，$x'>0$ より

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}\geqq2\sqrt{\frac{1}{xx'}}=2\sqrt{3}\ \left(\text{等号は } x=x'=\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき}\right)$$

$$\therefore\ \min y=2\sqrt{3}-1$$ ……（答）

(3) A，Bは互いに独立であるから

$$P(\mathrm{A})=P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\frac{\sqrt{3}}{3}\ (=P(\mathrm{B}))$$ ……（答）

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B})=\frac{1}{3}$$ ……（答）

$$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{2\sqrt{3}-1}{3}$$ ……（答）

【46】目の出方は36通り．$+1$，0，-1 となる確率はそれぞれ

$$\frac{15}{36}=\frac{5}{12},\ \frac{6}{36}=\frac{1}{6},\ \frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

3 回行い得点が 1 となるのは

$$1+1-1,\ 1+0+0$$

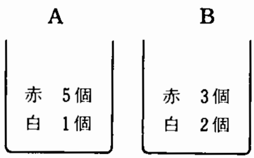
のときで順序も考えて

$$3\times\left(\frac{5}{12}\right)^2\cdot\frac{5}{12}+3\times\frac{5}{12}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{145}{576}$$

……(答)

	1	2	3	4	5	6
1	0					
2		0			+1	
3			0			
4				0		
5		−1			0	
6						0

【47】 (1)　(i)　$a\leqq 4,\ b\leqq 4$ より



$$\frac{b}{a}=\frac{2}{3}\iff(a,\ b)=(3,\ 2)$$

$$\therefore\quad {}_4C_3\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)\cdot{}_4C_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{2}{15}$$

……(答)

(ii)

$$\frac{b}{a}=\frac{3}{4}\iff(a,\ b)=(4,\ 3)$$

$$\therefore\quad \left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot{}_4C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{6}$$

……(答)

(2)　B から取り出される球が赤か白かで場合分けして

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{7}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{5}$$

……(答)

【48】 A の起こる回数が偶数となる確率を P, 奇数となる確率を Q とする.

$$P={}_nC_0p^0(1-p)^n+{}_nC_2p^2(1-p)^{n-2}+\cdots\cdots$$

$$Q={}_nC_1p^1(1-p)^{n-1}+{}_nC_3p^3(1-p)^{n-3}+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad P+Q=\{p+(1-p)\}^n=1$$

$$P-Q=\{(1-p)-p\}^n=(1-2p)^n$$

両辺を加えて, 整理すると

$$P=\frac{1}{2}\{1+(1-2p)^n\}$$

【49】 目の和が 4 となるのは (1, 3), (2, 2), (3, 1) の 3 通り.

ゆえに

$$P(\mathrm{A})=\frac{3}{6^2}=\frac{1}{12}$$

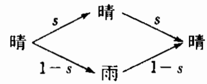
$$\therefore\quad p_n={}_{500}C_n\left(\frac{1}{12}\right)^n\left(\frac{11}{12}\right)^{500-n}$$

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{{}_{500}C_{n+1}}{{}_{500}C_n}\cdot\frac{1}{11}=\frac{500-n}{11(n+1)}>1 \text{ より}$$

$$n<\frac{489}{12}=40.75\qquad\therefore\quad n\leqq 40$$

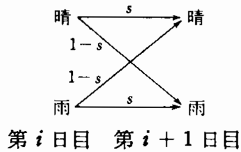
……(答)

【50】(1)　第１日目が晴で第３日目も晴となる確率 p_3 は右の樹形図より



$$p_3=s^2+(1-s)^2$$
$$=2s^2-2s+1 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　右の樹形図より



$$\begin{cases} p_{i+1}=sp_i+(1-s)q_i \\ q_{i+1}=(1-s)p_i+sq_i \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　(2)の漸化式より

$$\begin{cases} p_{i+1}+q_{i+1}=p_i+q_i \\ p_{i+1}-q_{i+1}=(2s-1)(p_i-q_i) \end{cases}$$

第１日目が晴であるから $p_1=1$，$q_1=0$

$$\therefore \begin{cases} p_{i+1}+q_{i+1}=p_1+q_1=1 \\ p_{i+1}-q_{i+1}=(p_1-q_1)(2s-1)^i=(2s-1)^i \end{cases}$$

よって，$p_{i+1}=\dfrac{1}{2}\{1+(2s-1)^i\}$，$q_{i+1}=\dfrac{1}{2}\{1-(2s-1)^i\}$　……(答)

【51】(1)　$\dfrac{b}{a}\leqq 1$ となる場合の数は $a=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 6$ それぞれについて数えると

$$1+2+3+4+5+6=21$$

$$\therefore\ \frac{21}{6\times 6}=\frac{7}{12} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$\left[\dfrac{b}{a}\right]$ を表にすると右のようになる．

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	0	1	1	2	2	3
3	0	0	1	1	1	2
4	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0	1

$$\text{期待値}=1\cdot\frac{12}{36}+2\cdot\frac{4}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{1}{36}$$
$$+5\cdot\frac{1}{36}+6\cdot\frac{1}{36}=\frac{41}{36}$$

……(答)

【52】

$$E(X)=1\times\frac{2}{6}+(2+3+4+5)\times\frac{1}{6}=\frac{8}{3}$$

$$\therefore\ E(Y)=E(2X+3)=2\cdot\frac{8}{3}+3=\frac{25}{3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

【53】(1)　題意より　$\displaystyle\sum_{n=2}^{k+1}P(X=n)=a\sum_{n=2}^{k+1}\frac{1}{n^3-n}=1$

ここで　$\displaystyle\sum_{n=2}^{k+1}\frac{1}{n^3-n}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{k+1}\left\{\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}$$

よって，　$a=\dfrac{4(k+1)(k+2)}{k(k+3)}$　……(答)

(2)　期待値 $E(X)=\displaystyle\sum_{n=2}^{k+1}nP(X=n)=a\sum_{n=2}^{k+1}\frac{1}{n^2-1}$

$$=\frac{a}{2}\sum_{n=2}^{k+1}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{4(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\times\frac{k(3k+5)}{2(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{3k+5}{k+3}$$　……(答)

(3)　期待値 $E(Y)=4E(X)-\log k=\dfrac{4(3k+5)}{k+3}-\log k$

これを $f(k)$ とおいて k で微分すると

$$f'(k)=\frac{16}{(k+3)^2}-\frac{1}{k}=\frac{-(k-1)(k-9)}{k(k+3)^2}$$

k	1		9	
f' f		$+$ $\nearrow$	0	$-$ $\searrow$

増減表から $k=9$ で $f(k)$ は最大となる．

求める k の値は 9　……(答)

【54】 (1)　ヘッセの公式より

$$h=\frac{|a+2b+3-5|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{a+2b-2}{\sqrt{14}}$$　……(答)

(2)　$a=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 6$ となる確率はどれも $\dfrac{1}{6}$ であるから

$$E(a^2)=\sum_{i=1}^{6}i^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{6\cdot7\cdot13}{6}=\frac{91}{6}$$

同じく　$E(b^2)=\dfrac{91}{6}$　$\therefore$　$E(a^2)=E(b^2)$

$$E(ab)=\sum_{i,\,j=1}^{6}i\cdot j\left(\frac{1}{6}\right)^2=\sum_{i=1}^{6}i\cdot\frac{1}{6}\left(\sum_{j=1}^{6}j\cdot\frac{1}{6}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{6}i\cdot\frac{1}{6}E(b)=E(a)\cdot E(b)\left(=\frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2}\right)$$

(a, b が独立であるとき，$E(ab)=E(a)\cdot E(b)$ となることは定理として研究の中で示してあるが，直接計算するとこのようになる)

(3)　$S=\pi(10^2-h^2)=\pi\left\{100-\dfrac{(a+2b-2)^2}{14}\right\}$

$$=\pi\left(\frac{698}{7}-\frac{a^2}{14}-\frac{2ab}{7}-\frac{2b^2}{7}+\frac{2a}{7}+\frac{4b}{7}\right) \quad \cdots\cdots(答)$$

(2)より求める期待値 $E(S)$ は

$$E(S)=\pi\left(\frac{698}{7}-\frac{1}{14}E(a^2)-\frac{2}{7}E(ab)-\frac{2}{7}E(b^2)+\frac{2}{7}E(a)+\frac{4}{7}E(b)\right)$$

$$=\pi\left\{\frac{698}{7}-\left(\frac{1}{14}+\frac{2}{7}\right)\frac{91}{6}-\frac{2}{7}\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{7}+\frac{4}{7}\right)\frac{7}{2}\right\}$$

$$=\frac{7879}{84}\pi \quad \cdots\cdots(答)$$

【55】 (1)　A，B それぞれが表を x 枚出す確率を表にすると

x(A)	0	1	2	3	4
${}_4C_x\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

x(B)	0	1	2	3
${}_3C_x\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

A が勝つ確率は

$$\frac{4}{16}\cdot\frac{1}{8}+\frac{6}{16}\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\right)+\frac{4}{16}\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\right)+\frac{1}{16}\cdot 1$$

$$=\frac{1+6+7+2}{32}=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots(答)$$

B が勝つ確率は

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{16}+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{16}+\frac{4}{16}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}\right)$$

$$=\frac{3+15+11}{8\cdot 16}=\frac{29}{128} \quad \cdots\cdots(答)$$

引き分けとなる確率は

$$1-\left(\frac{1}{2}+\frac{29}{128}\right)=\frac{35}{128} \quad \cdots\cdots(答)$$

〖参考〗 A が勝つ確率を求めるだけなら，A，B がまず 3 枚投げると考え，A の勝つ確率を p とすると，B の勝つ確率も p であり，引き分けとなる確率は $1-2p$ である．実際には，A はもう 1 枚投げるので A が勝つ確率は

$$p\cdot 1+(1-2p)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(2)　Aの期待金額は

$$150\times\frac{1}{2}-400\times\frac{29}{128}+0\times\frac{35}{128}=50\left(\frac{3}{2}-\frac{29}{16}\right)<0$$

したがって，Bの方が有利である．　……(答)

【56】 (1)　$k=0$ となるのは，3回とも同じ番号のボールを取ったときで

$$p_0=\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$$

$k\geqq 1$ のとき，最大番号と最小番号の差が k となるのは，全部で $n-k$ 通り考えられる．

最小番号　間は $k-1$ 個　最大番号

$$1,\ ②,\ \overbrace{3,\ \cdots\cdots,\ k,\ k+1}^{},\ \boxed{k+2},\ \cdots\cdots\ ,\ n-k,\ \cdots\cdots\ ,\ n$$

……

いま，その中の1つとして，最小番号2，最大番号 $k+2$ となるときをとると，3回の試行のうち2回の番号がわかったが，残り1回の試行の番号は

ア）　最大番号または最小番号に等しい

イ）　最大番号でも最小番号でもない

の2通りが考えられ，3回の番号の出る順序も考えると

$$p_k=\frac{(n-k)\cdot\{2\times 3+(k-1)\times 3!\}}{n^3}=\frac{6k(n-k)}{n^3}$$

よって，求める確率 p_k は

$$p_0=\frac{1}{n^2},\ \ p_k=\frac{6k(n-k)}{n^3}\quad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)\ \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned}E(X)&=0\cdot\frac{1}{n^2}+\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot\frac{6k(n-k)}{n^3}\\&=\frac{6}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k^2-\frac{6}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^3\\&=\frac{6}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}-\frac{6}{n^3}\cdot\frac{n^2(n-1)^2}{4}\\&=\frac{n^2-1}{2n}\end{aligned}$$

……(答)

【57】 (1)　3つの番号とも k 以下のときで

$$P(X\leqq k)=\left(\frac{k}{N}\right)^3$$

……(答)

(2)　$P(X=k)=P(X\leqq k)-P(X\leqq k-1)\quad (k\geqq 2)$

$$=\left(\frac{k}{N}\right)^3-\left(\frac{k-1}{N}\right)^3=\frac{3k^2-3k+1}{N^3}$$

$k=1$ のときは

$$P(X=1)=\frac{1}{N^3}$$ これは上式に含まれる．

よって，求める確率は

$$P(X=k)=\frac{3k^2-3k+1}{N^3} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)
$$E(X)=\sum_{k=1}^{N} k\cdot\frac{3k^2-3k+1}{N^3}$$
$$=\frac{1}{N^3}\left\{3\frac{N^2(N+1)^2}{4}-3\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}+\frac{N(N+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{(N+1)(3N-1)}{4N} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

【58】 硬貨を n 回投げて表が k 回出る確率は

$$ {}_nC_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{{}_nC_k}{2^n}$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}2^k\cdot\frac{{}_nC_k}{2^n}=\frac{(2+1)^n}{2^n}=\left(\frac{3}{2}\right)^n \quad (\because\ \text{二項定理}) \cdots\cdots(\text{答})$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{n}(2^k)^2\cdot\frac{{}_nC_k}{2^n}=\frac{(4+1)^n}{2^n}=\left(\frac{5}{2}\right)^n$$

$$\therefore\quad V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\left(\frac{5}{2}\right)^n-\left(\frac{9}{4}\right)^n \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

【59】 (1)
$$m(r)=\frac{0\cdot r+1\cdot(n-r)}{n}=\frac{n-r}{n} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$m(r^2)=\frac{0^2\cdot r+1^2\cdot(n-r)}{n}=\frac{n-r}{n}$$ であるから

$$V(r)=m(r^2)-(m(r))^2=\frac{n-r}{n}-\left(\frac{n-r}{n}\right)^2=\frac{(n-r)r}{n^2} \quad \cdots(\text{答})$$

(2) 最小値 b は $b=V(0)=V(n)=0$

また，$(n-r)r=-\left(r-\dfrac{n}{2}\right)^2+\dfrac{n^2}{4}$ より最大値 a は

$$a=\begin{cases} V\left(\dfrac{n}{2}\right)=\dfrac{1}{4} & (n\text{ が偶数のとき}) \\ V\left(\dfrac{n\pm1}{2}\right)=\dfrac{n^2-1}{4n^2} & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

【60】 (1) $a_ib_i=1$（銅貨はともに表）となる確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，$a_ib_i=0$ となる確率は $1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ であるから

$$P_2(0)=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16},\ \ P_2(1)={}_2\mathrm{C}_1\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8},\ \ P_2(2)=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$

……（答）

(2)　$P_n(k)={}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot\frac{3^{n-k}}{4^n}$　……（答）

(3)　二項分布の公式から　$E_n=n\cdot\frac{1}{4}=\frac{n}{4}$　……（答）

【61】 (1)　n 回目にはじめて事象Aが起こる確率は

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)\leqq 0.01$$

両辺の常用対数をとると

$$(n-1)(\log 3-2\log 2)-2\log 2\leqq -2$$

$$n-1\geqq\frac{2\log 2-2}{\log 3-2\log 2}=\frac{1.398}{0.125}=11.184$$

$\therefore\ \ n\geqq 12.184\qquad\therefore\ \ n=13$　……（答）

(2)　$E(S)=4\cdot\frac{1}{4}=1$　……（答）

【62】 (1)　でたらめに○をつけて正解となる確率は　$\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

正解者数を X とすると

$$P(130\leqq X\leqq 175)=\sum_{r=130}^{175}{}_{1600}\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{10}\right)^r\left(\frac{9}{10}\right)^{1600-r}$$

……（答）

(2)　二項分布の公式から

平均　$m=1600\cdot\frac{1}{10}=160$，標準偏差　$\sigma=\sqrt{1600\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}}=12$

解答者の人数が多いので　$Z=\frac{X-160}{12}$ は標準正規分布に従う．

$$\begin{aligned}P(130\leqq X\leqq 175)&=P(-2.5\leqq Z\leqq 1.25)\\&=P(0\leqq Z\leqq 2.5)+P(0\leqq Z\leqq 1.25)\\&=0.494+0.394\\&\fallingdotseq 0.89\end{aligned}$$

……（答）

【63】 (1)　身長を X とおくと，X は $\mathrm{N}(165,\ 6^2)$ に従う．$Z=\frac{X-165}{6}$ とおくと

$$\begin{aligned}P(159\leqq X\leqq 171)&=P(-1\leqq Z\leqq 1)\\&=2\phi(1)=0.682\qquad\therefore\ \ 68.2\%\end{aligned}$$

……（答）

(2)　$P(X \geqq 180) = P(Z \geqq 2.5) = 0.5 - \Phi(2.5)$
$= 0.5 - 0.494 = 0.006$　……(答)

【64】 体重Xは正規分布 $N(59.8,\ 6.9^2)$ に従うから，25人からなる標本平均$\overline{X}$は，平均値 59.8，標準偏差 $\dfrac{6.9}{\sqrt{25}} = 1.38$ の正規分布に従う．

また，n人からなる標本平均は $N\left(59.8,\ \dfrac{6.9^2}{n}\right)$ に従うから，信頼度95%で誤差が0.5kg以内となるには

$$P(|\overline{X} - 59.8| \leqq 0.5) = 0.95$$

$$P\left(\frac{|\overline{X} - 59.8|}{\frac{6.9}{\sqrt{n}}} \leqq \frac{0.5}{6.9}\sqrt{n}\right) = 0.95$$

$$\therefore\quad 1.96 \leqq \frac{0.5}{6.9}\sqrt{n} \qquad n \geqq 731.59\cdots\cdots$$

よって，nは732とすればよい．
（答）　59.8，1.38，正規，732

【65】 $\overline{p} = \dfrac{20}{1000} = \dfrac{1}{50}$ より $1.96\sqrt{\dfrac{\overline{p}(1-\overline{p})}{1000}} = \dfrac{1.96 \times 7\sqrt{10}}{5000} = 0.00867\cdots\cdots$

よって，不良率pは

$$0.02 - 0.00867 < p < 0.02 + 0.00867$$

1.1% から 2.9%　……(答)

【66】「A型の薬の有効率はB型の薬と同じである」と仮定する．
効き目のある人の人数をXとすると，Xは
正規分布 $N(200 \times 0.6,\ 200 \times 0.6 \times 0.4) = N(120,\ 48)$
に従う．$Z = \dfrac{X - 120}{\sqrt{48}} = \dfrac{X - 120}{4\sqrt{3}}$ は $N(0, 1)$ に従うので $X = 134$ では

$$|Z| = \frac{134 - 120}{4\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{6} \fallingdotseq 2.02 > 1.96$$

よって，A型の薬はB型の薬より優れているといえる．　……(答)

〔確率・統計標問（改訂）〕　土師・亀田　ISBN4-01-031372-2　108008