第3章 確　率　分　布

目　標　われわれは偶然に依存したいろいろな値をとる変数を考えることが多い．さいころの目の数をXとすると，Xは1，2，……，6という値をとる偶然性に支配された変数である．また偶然現象の結果を数値で表現して変数として扱うと便利なことも多い．それら変数の偶然的性質は分布表で表現されるが，その分布の特性を示すものとして，最も重要なものが**期待値**である．また，分布のバラツキ具合を表すものとして分散，標準偏差も考えられる．これらによって確率変数の性質が調べられる．

この章では，次のテーマを扱う．

I．期待値　　**II．分散・標準偏差**

III．連続確率分布

I．期　待　値

1°　**確率分布**　試行の結果によって値が決まる偶然性に支配された変数Xがあって，そのおのおのに確率が決まっているとき，変数Xを**確率変数**といい，Xの値と確率との対応関係を**確率分布**という．

確率変数とその分布を示すには次のように**確率分布表**としてまとめるとよい．

X	x_1　x_2　……　x_n
確　率	p_1　p_2　……　p_n

ここで，$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_n = 1$ である．

（例）　さいころを投げて1の目が出ると1000円，2，3の目が出ると500円，4，5，6の目のときは100円が賞金として与えられるとする．

このとき，賞金X円はさいころを投げるという試行の結果によって決まる値であり，確率変数は 1000，500，100 の3通りとなる．

$$P(X=1000)=\frac{1}{6},\quad P(X=500)=\frac{1}{3},\quad P(X=100)=\frac{1}{2}$$

であるから確率分布表は次のようになる．

X	1000	500	100
確　率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

2°　**期待値**　確率変数Xのとる値が x_1，x_2，……，x_n でそれぞれの確率が

$$P(X=x_1)=p_1,\ P(X=x_2)=p_2,\ \cdots\cdots,\ P(X=x_n)=p_n$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i=p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1\right)$$

であるとき，

$$\boldsymbol{E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n}$$

をXの**期待値**（または**平均値**）という．特に，賞金のように確率変数Xが金額を表すとき，$E(X)$ を**期待金額**という．

3°　**期待値の公式**　X，Y を確率変数，a，b を定数とするとき，期待値 $E(X)$ は次の性質を満たす．

1)　$\boldsymbol{E(aX+b)=aE(X)+b}$

2)　$\boldsymbol{E(X+Y)=E(X)+E(Y)}$

3)　$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$ **が独立のとき，**$\boldsymbol{E(XY)=E(X)E(Y)}$

3)を使う問題にはめったに出会わないが，1)，2)はよく使う．証明も一度はしておこう（☞標問 **65**，**66**）．

標問 63.　〈期待値 $E(X)$〉

A，B 2つのさいころを投げ，出た目の差の絶対値をXとする．Aのさいころではどの目の出る確率も $\frac{1}{6}$ であるが，Bのさいころでは，1，3，5 の目の出る確率がいずれも $\frac{1}{9}$ で，2，4，6 の目の出る確率がいずれも $\frac{2}{9}$ であるとする．

(1)　確率変数Xの確率分布を求めて表にせよ．

(2)　確率変数Xの平均値（期待値）を求めよ．　　　（東北大）

精講　確率変数 $X=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 5$ であるが，これら6通りの確率をすぐに計算しようとは思わないで，2つのさいころの目から考えられる $6\times6=36$ 通りを表にしてみるとよい．この表から $X=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 5$ がどのような目のときに起こるのかが一目瞭然となる．

また，求めた確率分布表において，(確率の総和)$=1$ となっているかどうかの検算は習慣としよう．

解答　(1)　A，Bのさいころの目によってできる X の表は右のようになる．

A＼B	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

A，Bの目が $i,\ j$ となる確率を $p(i,\ j)$，Bの目が j となる確率を b_j とすると

$$p(i,\ j)=\frac{1}{6}\times b_j$$

である．ただし，j が奇数のとき $b_j=\dfrac{1}{9}$，j が偶数のとき $b_j=\dfrac{2}{9}$ である．

$$P(X=0)=\sum_{i=1}^{6}p(i,\ i)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}b_i=\frac{1}{6}$$

$$P(X=1)=\sum_{i=1}^{5}p(i,\ i+1)+\sum_{i=2}^{6}p(i,\ i-1)=\frac{1}{6}(2-b_1-b_6)=\frac{5}{18}$$

$$P(X=2)=\sum_{i=1}^{4}p(i,\ i+2)+\sum_{i=3}^{6}p(i,\ i-2)=\frac{1}{6}(1+b_3+b_4)=\frac{2}{9}$$

$$P(X=3)=\sum_{i=1}^{3}p(i,\ i+3)+\sum_{i=4}^{6}p(i,\ i-3)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}b_i=\frac{1}{6}$$

$$P(X=4)=\sum_{i=1}^{2}p(i,\ i+4)+\sum_{i=5}^{6}p(i,\ i-4)=\frac{1}{6}(1-b_3-b_4)=\frac{1}{9}$$

$$P(X=5)=p(1,\ 6)+p(6,\ 1)=\frac{1}{6}(b_1+b_6)=\frac{1}{18}$$

よって，確率分布表は次のようになる

X	0	1	2	3	4	5
確　率	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

……(答)

(2)　平均値 $E(X)=0\cdot\dfrac{1}{6}+1\cdot\dfrac{5}{18}+2\cdot\dfrac{2}{9}+3\cdot\dfrac{1}{6}+4\cdot\dfrac{1}{9}+5\cdot\dfrac{1}{18}$

$$=\frac{35}{18} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

研究　期待値を $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ で定義したが，この意味を考えておこう．確率変数が賞金のように金額を表すとき，期待値のことをふつう期待金額というが，次のくじ引きを例として“期待金額”を数学的に表現してみよう．

10本くじがあり，1等10万円が1本，2等5万円が2本，3等1万円が3本，残りははずれとする．このくじ1本の平均の値打ちはいくらか．

賞金総額が (10万)×1+(5万)×2+(1万)×3=23万(円)

であるから，これをくじの本数10で割って，くじ1本の値打ちは2.3万円と考えるのは妥当であろう．つまり

$$\frac{(10\text{万})\times1+(5\text{万})\times2+(1\text{万})\times3}{10}=2.3\text{万}\ (\text{円})$$

であり，これを書き直すと

$$(10\text{万})\times\frac{1}{10}+(5\text{万})\times\frac{2}{10}+(1\text{万})\times\frac{3}{10}+(0\text{万})\times\frac{4}{10}=2.3\text{万}$$

左辺=(賞金とその確率の積の和) となっている．したがって，期待値が

$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ (積の和) と定義されるのがうなずけるであろう．

また，くじを引いてはもどすことをくり返して得られる賞金の列 $X_1, X_2,$ …を考えると，ほぼ100回に10回は1等，20回は2等，30回は3等，残りははずれという割合で現れるであろう．この平均は

$$\frac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n} \to 2.3\ \text{万円}$$

であり，期待値とは確率変数がとる値の平均の極限ともいえる．

▶演　習◀

【51】　2つのさいころA，Bを投げて出る目の数をそれぞれ a，b とする．

(1)　$\dfrac{b}{a}\leqq 1$ である確率を求めよ．

(2)　a，b の目が出たとき得点 $\left[\dfrac{b}{a}\right]$ を与えることにする．得点の期待値を求めよ．ただし，$[x]$ は実数 x をこえない最大の整数である．

(関西大)

標問 64. 〈正解の期待値〉

「正しければ○，誤りならば×を解答欄に記せ」という形式の問題が5題出題された．しかしどれも全然わからないので，でたらめに○か×を各欄に記した．正解には○が2個，×が3個あった．

(1) 偶然に3問以上が正しく答えられていた確率はいくらか．

(2) 当てずっぽうの答えに○が2個あった場合，3問以上正しく答えられていた確率はいくらか．

(3) 当てずっぽうの答えに○が2個あった場合，正解数の期待値は何個か．

(名古屋保健衛生大)

解答 (1) 3問，4問，5問をそれぞれ正しく答えた場合に分けて

$$ {}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^5 $$

$$ =(10+5+1)\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots(答) $$

(2) ○が2個，×が3個の並べ方は

$$ \frac{5!}{2!3!}=10 \text{ 通り} $$

このうち1つの正解例として「○○×××」を考えると

5問正解　1通り

4問正解　あり得ない

3問正解　「○$\underset{\smile\smile}{\times\bigcirc}$××」といったものでミスの箇所（$\smile\smile$の部分）を考えると ${}_2C_1\times{}_3C_1=2\times3=6$ 通り

$$ \therefore \quad \frac{1}{10}+\frac{6}{10}=\frac{7}{10} \quad \cdots\cdots(答) $$

(3) (2)の場合分けを続けて

2問正解　あり得ない，1問正解　${}_3C_1=3$,（不要ではあるが，0問正解はあり得ない）

$$ \therefore \quad 5\times\frac{1}{10}+3\times\frac{6}{10}+1\times\frac{3}{10}=\frac{26}{10}=2.6 \text{ 個} \quad \cdots\cdots(答) $$

標問 65.　〈$E(aX+b)$, $E(XY)$〉

A，B 2つの袋のどちらにも，番号1の札が1枚，番号2の札が2枚，番号3の札が3枚，計6枚の札が入っている．A，B 2つの袋からそれぞれ1枚の札を取り出すとき，取り出される札の番号をX，Y，取り出される札の番号の積をZとする．このとき，次の(1)，(2)，(3)に答えよ．

(1)　Zの確率分布を求めよ．

(2)　Zの期待値 $E(Z)$ を求めよ．

(3)　平面上の3点 (0, 0)，(X, 4)，(4, Y) を頂点とする三角形の面積を S とする．$Z=XY$ であることを用いて，S の期待値 $E(S)$ を求めよ．　　(鹿児島大)

精講

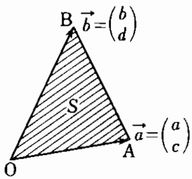
(3)　3点 (0, 0)，(a, c)，(b, d) を頂点とする三角形の面積Sが

$$S=\frac{1}{2}|ad-bc|$$

となるのは準公式として覚えておくべきである．

（ヒント：$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

「代数・幾何標準問題精講」の標問 25 を参照）



解答　(1)　$Z=XY$ の値を表にすると右のようになる．$X=1$, 2, 3 である確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$，$\frac{2}{6}$，$\frac{3}{6}$ であり，これは Y についても同様である．

X ＼ Y	1	2	3
1	1	2	3
2	2	4	6
3	3	6	9

$$P(Z=1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36},\quad P(Z=2)=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}\times 2=\frac{1}{9}$$

他の場合も同様で，求める確率分布は次のようになる．

Z	1	2	3	4	6	9
確　率	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

……(答)

(2)　$E(Z)=1\times\frac{1}{36}+2\times\frac{1}{9}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{9}+6\times\frac{1}{3}+9\times\frac{1}{4}$

$$=\frac{1+8+18+16+72+81}{36}=\frac{49}{9} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　$S=\frac{1}{2}|XY-16|=\frac{1}{2}(16-Z)$ であるから

$$E(S)=E\left(\frac{1}{2}(16-Z)\right)=\frac{1}{2}(16-E(Z))=\frac{95}{18} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

研究

1°　確率変数の１次式の期待値　$\boldsymbol{E(aX+b)=aE(X)+b}$（もちろん，ここで a, b は定数であり，Xは確率変数である）証明は期待値の定義にあてはめるとよい．

$$E(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i$$

$$=a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+b\sum_{i=1}^{n}p_i$$

ここで，確率の総和 $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ であることを使えば

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

この結果を本問の(3)で使っている．

2°　X, Yは独立ゆえ，(2)は $E(Z)=\boldsymbol{E(XY)=E(X)E(Y)}$ として計算してもよい（☞ 標問 66. 研究）．$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{2}{6}+3\times\frac{3}{6}=\frac{1+4+9}{6}=\frac{7}{3}$，同じく，$E(Y)=\frac{7}{3}$ であるから $E(Z)=\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{49}{9}$．

▶演　習◀

【52】　6個の数字 1, 1, 2, 3, 4, 5 を記入したさいころを振って出る目の数をXとするとき，$Y=2X+3$ の期待値 $E(Y)$ を求めるとその値は$\boxed{}$である．　　（小樽商大）

【53】　2, 3, ……, $k+1$ の k 個の値をとる確率変数Xの確率分布を

$$P(X=n)=\frac{a}{n^3-n}$$

とするとき，次の(1), (2), (3)に答えよ．

(1)　a を定めよ．

(2)　Xの期待値（平均値）を求めよ．

(3)　$Y=4X-\log k$ とするとき，確率変数Yの期待値を最大にするようなkの値を求めよ．　　（九　大）

標問 66. 〈$E(X+Y)$〉

さいころを何回か振る．最初に出た目の数を a_1，2 回目に出た目の数を a_2，……，k 回目に出た目の数を a_k とする．

$X_k=\dfrac{a_1}{7}+\dfrac{a_2}{7^2}+\cdots\cdots+\dfrac{a_k}{7^k}$ とし，X_k の期待値を E_k とする．

さいころは，どの目も同じように出るものとする．

(1) $E_2=$ (ア) $\boxed{}$ であり，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}E_k=$ (イ) $\boxed{}$ である．

(2) $X_2>\dfrac{1}{2}$ である確率は (ウ) $\boxed{}$ であり，$X_3>\dfrac{1}{2}$ である確率は (エ) $\boxed{}$ である． （上智大）

精講 (1) “和の期待値は期待値の和 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$” と $E(aX)=aE(X)$ を使う．

各 a_i の期待値 $E(a_i)=\displaystyle\sum_{i=1}^{6}i\cdot\frac{1}{6}=\frac{6\cdot7}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$ であるから

$$E_2=E\left(\frac{a_1}{7}+\frac{a_2}{7^2}\right)=\frac{1}{7}E(a_1)+\frac{1}{7^2}E(a_2)$$

$$=\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}\right)\cdot\frac{7}{2}=\frac{4}{7}$$

$$E_k=E\left(\frac{a_1}{7}+\frac{a_2}{7^2}+\cdots\cdots+\frac{a_k}{7^k}\right)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{7^i}\cdot\frac{7}{2}$$

$$\longrightarrow\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7}}=\frac{7}{12}\quad(k\to\infty)$$

(2) $X_2=\dfrac{a_1}{7}+\dfrac{a_2}{7^2}>\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\quad 7a_1+a_2>\dfrac{49}{2}=24.5$

これを満たすのは $a_1\geqq4$ または（$a_1=3$，$a_2\geqq4$）のときである．

この確率は $\quad\dfrac{3}{6}+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3}{6}=\dfrac{7}{12}$

また $X_3=\dfrac{a_1}{7}+\dfrac{a_2}{7^2}+\dfrac{a_3}{7^3}>\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\quad 49a_1+7a_2+a_3>\dfrac{343}{2}=171.5$

$a_1\geqq4$ または（$a_1=3$，$a_2\geqq4$）または（$a_1=3$，$a_2=3$，$a_3\geqq4$）となる確率を考えて

$$\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{43}{72}$$

解答　(1) (ア) $\frac{4}{7}$　(イ) $\frac{7}{12}$　(2) (ウ) $\frac{7}{12}$　(エ) $\frac{43}{72}$

研究

1°　$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ を証明しておこう．

確率変数X，Yの確率分布は右表のものとする．

$$P(X=x_i)=p_i,\quad P(Y=y_j)=q_j$$
$$P(X=x_i,\quad Y=y_j)=r_{ij}$$

ただし，$1\leqq i\leqq m$，$1\leqq j\leqq n$ である．

X \ Y	y_1	y_2	……	y_n	計
x_1	r_{11}	r_{12}	……	r_{1n}	p_1
x_2	r_{21}	r_{22}	……	r_{2n}	p_2
⋮	⋮	⋮		⋮	
x_m	r_{m1}	r_{m2}		r_{mn}	p_m
計	q_1	q_2		q_n	1

期待値の定義から

$$E(X+Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i+y_j)r_{ij}$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_ir_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}y_jr_{ij}$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left(x_i\sum_{j=1}^{n}r_{ij}\right)+\sum_{j=1}^{n}\left(y_j\sum_{i=1}^{m}r_{ij}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}x_ip_i+\sum_{j=1}^{n}y_jq_j$$
$$=E(X)+E(Y)$$

また，確率変数が3つ以上の場合，すなわち

$$E(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_n)$$

が成り立つことも帰納法により証明される．

2°　高校数学の範囲を出るが，期待値のもう1つの性質として

"X，Y が独立なら，$E(XY)=E(X)E(Y)$"

がある．うるさいことをいうと確率変数の独立を定義していないので（事象・試行の独立は定義済み)，少々気はひけるが，

$$P(\{X=x_i\}\cap\{Y=y_j\})=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$$

がすべての i，j について成立するときX，Yは独立という，ということを認めて証明してみよう．証明は簡単．

$$E(XY)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jr_{ij}$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jp_iq_j\quad(\because\ X,\ Y\text{は独立ゆえ }r_{ij}=p_iq_j)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}x_ip_i\sum_{j=1}^{n}y_jq_j=E(X)E(Y)$$

3°　本問(1)を数列の公式を使いながら直接計算すると次のようになる．

さいころのおのおのの目の出る確率は $\frac{1}{6}$ であるから

$$E_2=\sum_{i,j=1}^{6}\left(\frac{i}{7}+\frac{j}{7^2}\right)\frac{1}{6^2}=\frac{1}{6^2}\left(\sum_{i=1}^{6}\frac{6i}{7}+\sum_{j=1}^{6}\frac{6j}{7^2}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}\right)i=\frac{1}{6}\cdot\frac{8}{7^2}\cdot\frac{6\cdot7}{2}=\frac{4}{7}$$

同じようにして

$$E_k=\sum_{i,j,\cdots,l=1}^{6}\left(\frac{i}{7}+\frac{j}{7^2}+\cdots\cdots+\frac{l}{7^k}\right)\frac{1}{6^k}$$
$$=\frac{1}{6^k}\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{6^{k-1}}{7}i+\frac{6^{k-1}}{7^2}i+\cdots\cdots+\frac{6^{k-1}}{7^k}i\right)$$
$$=\frac{1}{6^k}\left(\frac{6^{k-1}}{7}+\frac{6^{k-1}}{7^2}+\cdots\cdots+\frac{6^{k-1}}{7^k}\right)\cdot\frac{6\cdot7}{2}$$
$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{7^k}\right)\cdot\frac{6\cdot7}{2}$$
$$\longrightarrow\frac{7}{2}\cdot\frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}}=\frac{7}{12}\quad(k\to\infty)$$

4°　本問(2)は X_k の定義から $\frac{1}{2}$ を7進法に直してみると，$7\times\frac{1}{2}=\frac{7}{2}=3+\frac{1}{2}$

から　$\frac{1}{2}=\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}=\frac{3}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7^2}=\cdots\cdots=\frac{3}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\cdots\cdots$

$$\therefore\quad X_2>\frac{1}{2}\iff a_1\geqq4\ \text{または}\ (a_1=3,\ a_2\geqq4)$$

とすぐにわかる．X_3 については小数第3位まで考えればよい．

▶演　習◀

【54】　さいころを2回振り，出た目の数をそれぞれ a, b とする．このとき，

平面　$x+2y+3z=5$　$\cdots\cdots(*)$　と

球　$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-1)^2\leqq10^2$

との共通部分の面積を S とする．

(1)　点 $(a,\ b,\ 1)$ から平面$(*)$へ下ろした垂線の長さ h を求めよ．

(2)　期待値について次の等式を示せ．

$$E(a^2)=E(b^2),\quad E(ab)=E(a)\cdot E(b)$$

(3)　S の期待値 $E(S)$ を求めよ．　　　　（名古屋市大）

標問 67.　〈期待金額〉

100円払ってさいころを1回振る．1，2の目が出たらくじを1本，3，4の目が出たらくじを2本，5，6の目が出たらくじを3本引くことができる．

くじには当たりくじ1本とはずれが3本入っており，くじは1本ずつ引き，そのつど引いたくじはもとにもどすとする．

当たりくじのとき60円，はずれくじのとき30円の金を得る．

(1)　得る金額が100円を越える確率を求めよ．

(2)　得る金額の期待値を求めよ．　(名古屋市大)

精講　(2)は“**和の期待値は期待値の和**”を使えばよい．これを直接定義式から求めようとすると，次の表を参考として，確率変数 30，60，90，120，150，180 とその確率との積和を計算する．

1 回	30	60				
2 回		30＋30	30＋60	60＋60		
3 回			30＋30＋30	30＋30＋60	30＋60＋60	60＋60＋60
得る金額	30円	60円	90円	120円	150円	180円

解答　(1)　得る金額が100円を越えるのは，くじを2本引いて2本とも当たり，またはくじを3本引いて1本以上当たりとなるときである．

求める確率は　$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^3\right\}=\frac{41}{192}$　……(答)

(2)　k 本目のくじでの期待値を E_k 円とする．

1本目のくじはどの目が出ても引ける．

$$E_1=60\times\frac{1}{4}+30\times\frac{3}{4}=\frac{75}{2}$$

2本目のくじは3～6の目が出たとき，3本目のくじは5～6の目が出たときに引けるから

$$E_2=\frac{4}{6}E_1=\frac{2}{3}E_1,\quad E_3=\frac{2}{6}E_1=\frac{1}{3}E_1$$

求める期待値は $E_1+E_2+E_3=2E_1=75$ 円　……(答)

標問 68.　〈有利・不利〉

(1)　さいころを1回または2回振り，最後に出た目の数を得点とするゲームを考える．1回振って出た目を見た上で，2回目を振るか否かを決めるのであるが，どのように決めるのが有利であるか．

(2)　上と同様のゲームで，3回振ることも許されるとしたら，2回目，3回目を振るか否かの決定は，どのようにするのが有利か．

（京　大）

精講　(1)　1回目が1なら2回目は必ず振る．2でも多分振るだろう．6，5なら2回目は振らないだろう．数学的には，1回目の目の数と，2回目の期待値（平均値）を比較するのが合理的である．

(2)　2回目のさいころを振った後で，3回目を振るか否かは(1)と同じ状況にあるので(1)の判断に従う．問題となるのは1回目を振った後で，2回目をどうするかであるが，これは(1)の判断で2回目，3回目のさいころを振るか否かの決定をしながらゲームを進めたときの期待得点と1回目終了時点での得点を比較すればよい．

解答　(1)　さいころを1回振ったときの期待値は

$$\sum_{k=1}^{6} k\times\frac{1}{6}=\frac{6\cdot 7}{2}\times\frac{1}{6}=3.5$$

よって，1回目に出た目が

1，2，3 のとき振る，4，5，6 のとき振らない．　……(答)

(2)　1回目を振った後，(1)の判断をしながらゲームを進めたときの2回目以後の期待値は（2回目で止めるときの期待値）+（3回目で止めるときの期待値）と計算して

$$\left(4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}=\frac{17}{4}=4.25$$

2回目を振った後では(1)の判断に従うので，ゲームの進め方は，

$$\begin{cases}\text{1回目に出た目が　5, 6 のとき振らない. 1〜4 のとき振る.}\\ \text{2回目に出た目が　4, 5, 6 のとき振らない. 1, 2, 3 のとき振る.}\end{cases}$$

……(答)

研究　有利，不利を現在の得点と未来の期待得点との比較で計ることは妥当な考え方であろう．

ある判断のもとにゲームを進めたときの期待得点の最大値を考えるとして次のようにしてもよい．

(1)　1回目に1からkまでの目が出たときはもう1度振り，$k+1$ から6までの目のときは振らないとすると，期待得点Eは

$$E=(1+2+\cdots\cdots+6)\times\frac{k}{6}\cdot\frac{1}{6}+\{(k+1)+\cdots\cdots+6\}\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{12}(-k^2+6k+42)=-\frac{1}{12}(k-3)^2+\frac{17}{4}$$

$k=3$ で最大となる．したがって，1，2，3の目のときは振り，4，5，6の目のときは振らない．

(2)　1回目に1からlまでの目が出たときは2回目を振り，2回目の目が1からkまでのときは3回目を振るとすると

$$E=(1+2+\cdots\cdots+6)\times\frac{l}{6}\cdot\frac{k}{6}\cdot\frac{1}{6}+\{(k+1)+\cdots\cdots+6\}\times\frac{l}{6}\cdot\frac{1}{6}$$

$$+\{(l+1)+\cdots\cdots+6\}\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{l}{72}\{-(k-3)^2+51\}+\frac{1}{12}(-l^2-l+42)$$

$$\leqq\frac{51}{72}l+\frac{1}{12}(-l^2-l+42)$$　（等号成立は $k=3$ のとき）

$$=\frac{1}{24}\left\{-2\left(l-\frac{15}{4}\right)^2+\frac{897}{8}\right\}$$

よって，$l=4$，$k=3$ で最大となる．したがって，1回目の目が1～4のときは振り，5，6 のときは振らない．2回目の目が 1，2，3 のときは振り，4，5，6 のときは振らない．

▶演　習◀

【55】　Aが100円硬貨を4枚，Bが50円硬貨を3枚投げ，硬貨の表が出た枚数の多い方を勝ちとし，同じ枚数のときは引き分けとする．硬貨の表，裏の出る確率はすべて $\frac{1}{2}$ であるものとする．

(1)　Aの勝つ確率，Bの勝つ確率，引き分けの確率を求めよ．

(2)　もし，勝った方が相手の投げた硬貨を全部もらえるとしたら，AとBとどちらが有利か．　　（東　大）

標問 69.　〈復元・非復元抽出〉

n枚（$n\geqq 2$）のカードに1からnまでの番号をつけて，箱の中に入れておく．A，B 2人がいて，この箱から無作為に，初めにAが1枚，次にBが1枚カードを取り出すものとし，取り出されたカードの番号をそれぞれ a，b とする．

このとき，Aが得る点数は，

$a>b$ なら a，$a=b$ なら 0，$a<b$ なら $-a$

であるとして，次の問いに答えよ．

(1)　Aが取り出したカードをもとにもどしてからBが取り出す場合のAの得点Xの確率分布と期待値を求めよ．

(2)　Aが取り出したカードをもとにもどさずにBが取り出す場合のAの得点Yの期待値とXの期待値とではどちらが大きいか．　（新潟大）

精講

1°　(1)は復元抽出（さいころ型），(2)は非復元抽出（くじ引き型）である．それぞれの確率を計算するとき，根元事象の個数が n^2，$n(n-1)$ と違ってくるところに注意（(2)においては注意というよりは“着目”）する．

2°　期待値を求めさせる問題には標問 65，66 のように公式を利用するものもあるが，定義の積和の計算をさせるものが圧倒的に多い．しかも，単純な数値計算というのではなく数列の和の公式を使うものが目立つ．この中にはべき級数とからむものもある（標問 71 参照）．

3°　知っておかなければいけない和の公式としては

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1),\quad \sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

があり，また，知っておくと便利なものとして次のものがある．

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

解答　(1)　$X=a$ となるのは，Aが a を出して，Bが $1\sim(a-1)$ のどれかを出したときであるから

$$\overbrace{1 \cdots\cdots a-1}^{a-1\text{ 個}}\ a\ \overbrace{a+1 \cdots\cdots n}^{n-a\text{ 個}}$$

$$P(X=a)=\frac{1}{n}\cdot\frac{a-1}{n}=\frac{a-1}{n^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$X=0$ となるのはBがAと同じカードを引くとき，$X=-a$ となるのは上と同じように考えて

$$P(X=0)=\frac{1}{n} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$P(X=-a)=\frac{n-a}{n^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

よって，求める期待値 $E(X)$ は

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{a=1}^{n}a\frac{a-1}{n^2}+\sum_{a=1}^{n}(-a)\frac{n-a}{n^2}\\&=\frac{1}{n^2}\sum_{a=1}^{n}\{2a^2-(n+1)a\}\\&=\frac{1}{n^2}\left\{\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)^2\right\}\\&=\frac{(n+1)(n-1)}{6n}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　Y の確率分布は

$$P(Y=a)=\frac{a-1}{n(n-1)},\ P(Y=0)=0,\ P(Y=-a)=\frac{n-a}{n(n-1)}$$

であり，(1)の分布の分母と比較すると

$$E(Y)=\frac{n}{n-1}E(X)>E(X)$$

$$\therefore\ E(Y)>E(X) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

▶演　習◀

【56】　箱の中に1から n までの番号が1つずつつけられた n 個のボールがある．ここからボールを1つ取り出してもとにもどす試行を3回行う．このとき取り出したボールの最大番号と最小番号との差を確率変数 X とする．

(1)　$X=k$ となる確率 p_k $(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ を求めよ．

(2)　X の平均値 $E(X)$ を求めよ．　　　　（福井医大）

標問 70. ——$\langle P(X=k)=P(X\leqq k)-P(X\leqq k-1)\rangle$

袋の中に1から10までの数字1つずつを書いた同じ形のカードが10枚ある．この袋から勝手にカードを2枚取り出し，書いてある数字の大きい方をXとする．

(1)　kを10以下の自然数とするとき，$X\leqq k$ となる確率を求めよ．

(2)　Xの期待値を求めよ．　　（琉球大）

解答　(1)　10枚のカードから2枚のカードを取り出す取り出し方は${}_{10}C_2$ 通りあり，そのうち，数字の大きい方がk以下であるのは，1からkまでのk枚のカードから2枚のカードを取り出すときで，${}_kC_2$通りの取り出し方がある．

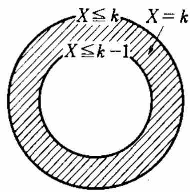
よって，求める確率は

$$P(X\leqq k)=\frac{{}_kC_2}{{}_{10}C_2}=\frac{k(k-1)}{90}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$P(X=k)=P(X\leqq k)-P(X\leqq k-1)$ $(k\geqq 2)$

$$=\frac{1}{90}k(k-1)-\frac{1}{90}(k-1)(k-2)$$

$$=\frac{1}{45}(k-1)$$



これは $k=1$ のときも含む．

よって，求める期待値 $E(X)$ は

$$E(X)=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{45}k(k-1)=\frac{1}{45}\cdot\frac{9\cdot10\cdot11}{3}=\frac{22}{3}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

▶演　習◀

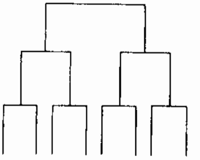
【57】 ある町にN台の自動車があり，これに1からNまでの登録番号がついている．この登録番号の中から無作為に1つの番号を取り出し，それを記録してからもとにもどす．同様にして次つぎに合計3つの番号を記録し，その最大番号を確率変数Xで表す．

(1)　$X\leqq k$ となる確率 $P(X\leqq k)$ を求めよ．ただし，$1\leqq k\leqq N$ とする．

(2)　$X=k$ となる確率 $P(X=k)$ を求めよ．

(3)　Xの期待値 $E(X)$ をNの式で表せ．　　（浜松医大）

標問 71. 〈トーナメント〉



2^n 人の選手がトーナメント(図のような組合せの試合方式）で優勝を争う．選手Aは他のどの選手にも確率 p で勝つものとし，A以外の選手の力は互角であるとする．トーナメントの組合せはくじで決める．このとき次を求めよ．

(1)　Aが優勝する確率

(2)　Aが行う試合の数の期待値

(3)　A以外の特定の選手Bが優勝する確率　（横浜市大）

解答　(1)　第1試合で 2^n 人の選手は半分の 2^{n-1} 人に減り，第2試合でまた半分が減り 2^{n-2} 人となる．これを続けて最後1人となり優勝者が決まるまでには試合が n 回行われる．

よって，Aが優勝する確率は　p^n　……(答)

(2)　Aが行う試合数 X が k である確率は

$k \leqq n-1$ のとき，第 $k-1$ 試合まで勝って，第 k 試合で負けるから

$$P(X=k)=p^{k-1}\cdot(1-p)$$

$k=n$ のとき，第 $n-1$ 試合まで勝ち続けるから

$$P(X=n)=p^{n-1}$$

求める期待値を $E(X)$ とおくと

$$\begin{aligned}E(X)&=(1-p)\sum_{k=1}^{n-1}kp^{k-1}+np^{n-1}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}kp^{k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}kp^{k}+np^{n-1}\\&=1+p+p^2+\cdots\cdots+p^{n-1}\\&=\frac{1-p^n}{1-p}\end{aligned}$$　……(答)

(3)　Aが優勝しない確率は $(1-p^n)$ で，A以外の残り (2^n-1) 人の優勝する確率はすべて等しいから，求める確率は　$\dfrac{1-p^n}{2^n-1}$　……(答)

標問 72.　〈赤球の個数〉

袋の中に赤球3個と白球1個が入っている．この袋の中から1球を取り出し，代わりに白球1個を袋に返す．このような操作を n 回（$n \geqq 2$）くり返す．

(1)　n 回くり返した後に袋の中に赤球2個が残っている確率を求めよ．

(2)　n 回くり返した後に袋の中に赤球1個が残っている確率を求めよ．

(3)　n 回くり返した後に袋の中に残っている赤球の個数の期待値を求めよ．（千葉大）

精講

(1)　n 回後に赤球2個が残っているには，n 回のうち赤球が取り出されるのは1回だけということである．

$$\underbrace{\text{白}\quad\text{白}\quad\cdots\cdots\quad\text{白}}_{(k-1)\text{回}}\quad\underset{k\text{回目}}{\text{赤}}\quad\underbrace{\text{白}\quad\text{白}\quad\cdots\cdots\quad\text{白}}_{(n-k)\text{回}}$$

(2)　n 回のうち2回赤球が取り出される確率を求めることになるが，k 回目に2回目の赤球が取り出されるには $k-1$ 回目の後には赤球が2個残っている状態であるから(1)が利用できる．

解答　(1)　k 回目に1回だけ赤球が取り出される確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^{n-k}=\frac{3\cdot 2^{n-k}}{4^n}$$

であるから，求める確率は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3\cdot 2^{n-k}}{4^n}=\frac{3}{4^n}\sum_{k=0}^{n-1}2^k=\frac{3(2^n-1)}{4^n}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　k 回目に2回目の赤球が取り出される確率は，$k-1$ 回目の後は赤球が2球となっているわけで，(1)を使うと

$$\frac{3(2^{k-1}-1)}{4^{k-1}}\cdot\frac{2}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}=\frac{6(2^{k-1}-1)3^{n-k}}{4^n}$$

求める確率は

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{6}{4^n}\left\{\frac{3^n}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k-3^n\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}=\frac{6}{4^n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{3^n}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k-3^n\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}$$

（$\because$　$k=1$ のとき 0）

$$=\frac{6}{4^n}\left\{\frac{3^n}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}-3^n\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right\}$$

$$=\frac{6}{4^n}\left(3^n-2^n-\frac{3^n}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{4^n}(3^n-2^{n+1}+1)$$ ……(答)

(3)　n 回目に赤球 3 個が残っている確率は $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ である．

よって，求める期待値は

$$1\cdot\frac{3}{4^n}(3^n-2^{n+1}+1)+2\cdot\frac{3}{4^n}(2^n-1)+3\cdot\frac{1}{4^n}$$

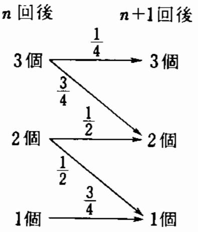
$$=\frac{3^{n+1}}{4^n}$$ ……(答)

研究　本問は状況変化の問題であるから漸化式の利用も考えられる．n 回くり返した後に，赤球 3 個，2 個，1 個残っている確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とすると

$$p_{n+1}=\frac{1}{4}p_n$$ ……①

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{3}{4}p_n$$ ……②

$$r_{n+1}=\frac{3}{4}r_n+\frac{1}{2}q_n$$ ……③



(1)　$p_1=\frac{1}{4}$ であるから，①は $p_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$ と解ける．

したがって，②は

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1},\quad q_1=\frac{3}{4}$$

(上式)$\times 4^{n+1}$　　$4^{n+1}q_{n+1}=2\cdot 4^n q_n+3$

$$4^{n+1}q_{n+1}+3=2(4^n q_n+3)$$

この変形により $\{4^n q_n+3\}$ は初項 $4q_1+3=6$ 公比 2 の等比数列とわかる．

$$4^n q_n+3=6\cdot 2^{n-1}\qquad \therefore\quad q_n=\frac{3(2^n-1)}{4^n}=3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

(2)　(1)を代入した漸化式を次のように変形すれば解ける．

$$r_{n+1}+6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=\frac{3}{4}\left(r_n+6\left(\frac{1}{2}\right)^n-3\left(\frac{1}{4}\right)^n\right),\quad r_1=0$$

Ⅱ．分散・標準偏差

1°　**分散**　分布のチラバリぐあい（**散布度**）を示す1つの目安である．確率変数 X が x_1，x_2，……，x_n と変わるときの確率が p_1，p_2，……，p_n であり平均が $E(X)$ と表されるとき，確率変数 X の分散は次のように定義される．

$$V(X)=E((X-E(X))^2)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i$$

2°　**分散の基本的性質**

(1)　$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

(2)　$V(aX+b)=a^2V(X)$　（a，b は定数）

(3)　確率変数 X，Y が独立のとき，$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

3°　**標準偏差**　分散の正の平方根を標準偏差といい，$D(X)$ あるいは σ という記号で表す．

$$D(X)=\sigma=\sqrt{V(X)}$$

標問 73.　〈分散 $V(X)$〉

$k=1$，2，……，n のいずれかの値をとる確率変数 X について，$X=k$ となる確率が $a\left(1-\dfrac{1}{2k}\right)$ であるとする（a は定数）．次のものを n と a の式で表せ．

(1)　$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

(2)　X の平均 $E(X)$

(3)　X の分散 $V(X)$　　（奈良県医大）

精講　定義の確認といった程度の問題である．
(1)は“**確率の総和＝1**”という基本事項に気づくかどうかというところ．意外に気づかない人が多い．

(3)　分散の計算で定義式 $E((X-E(X))^2)$ を使うことはめったにない．

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

をここでも使おう．

解答 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a\left(1-\frac{1}{2k}\right)=a\left(n-\frac{1}{2}S\right)=1$

$$\therefore\quad S=2n-\frac{2}{a} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $\displaystyle E(X)=\sum_{k=1}^{n} k\cdot a\left(1-\frac{1}{2k}\right)=a\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)$

$$=a\left(\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{2}\right)=\frac{1}{2}an^2 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $\displaystyle E(X^2)=\sum_{k=1}^{n} k^2\cdot a\left(1-\frac{1}{2k}\right)=a\sum_{k=1}^{n}\left(k^2-\frac{k}{2}\right)$

$$=a\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{4}\right)=\frac{an(n+1)(4n-1)}{12}$$

$\therefore\quad V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$$=\frac{1}{12}an(n+1)(4n-1)-\frac{1}{4}a^2n^4 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

研究 分散の最重要公式 $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$ つまり

(分散)$=$(X^2 の平均)$-$(Xの平均)^2

を証明しておこう. $m=E(X)$ とおくと

$$V(X)=E((X-m)^2)=E(X^2-2mX+m^2)$$
$$=E(X^2)-2mE(X)+m^2$$
$$(\because\quad E(X+Y)=E(X)+E(Y),\ E(aX+b)=aE(X)+b)$$
$$=E(X^2)-2m^2+m^2=E(X^2)-m^2$$
$$=E(X^2)-(E(X))^2$$

▶演　習◀

【58】 硬貨を n 回投げて, 表が k 回出たら 2^k 円もらう. もらう金額をX円とすると, 平均 $E(X)=\boxed{}$, 分散 $V(X)=\boxed{}$ である.

(東海大)

【59】 変量 $x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n$ はいずれも 0 または 1 とする. 0 が r 個, 1 が $n-r$ 個あるとき, $x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n$ の平均を $m(r)$, 分散を $V(r)$ とおく.

(1) $m(r)$ と $V(r)$ を求めよ.

(2) $r=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n$ での $V(r)$ の最大値 a および最小値 b を求めよ.

(筑波大)

標問 74.　〈標準偏差〉

1, 2, 3, 4, 5 の数字を書いたカードが1枚ずつある．これをよくきって同時に2枚取り出すという試行を独立にくり返すとき，2枚の数字の平均を$\overline{X}$とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) 確率変数$\overline{X}$の確率分布表をつくれ．

(2) この表にもとづいて$\overline{X}$の平均mと標準偏差Sを求めよ．

(3) $|\overline{X}-m|<1.5S$ となる確率を求めよ．　(九州東海大)

精講　(1) 5枚の中から2枚を抜き取る取り出し方は ${}_5C_2=10$ 通り．組合せ1つ1つを考えながら確率分布表をつくっていけばよい．

(2) 平均，分散 ($=S^2$) とも定義式にあてはめればよい．

解答　(1)

$\overline{X}$	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
確　率	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

……(答)

(2) $m=(1.5+2+4+4.5)\cdot\dfrac{1}{10}+(2.5+3+3.5)\cdot\dfrac{2}{10}=3$　……(答)

$$S^2=\text{分散}=\left\{(3.5-3)^2\cdot\frac{2}{10}+(4-3)^2\cdot\frac{1}{10}+(4.5-3)^2\cdot\frac{1}{10}\right\}\times 2=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\quad S=\frac{\sqrt{3}}{2}$$　……(答)

(3) $1.5S=1.5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1.29\cdots\cdots$ ゆえ，$|\overline{X}-m|<1.5S$ となるのは $\overline{X}=2,\ 2.5,\ 3,\ 3.5,\ 4$ のときであり，求める確率は

$$\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$$　……(答)

研究　分布のチラバリぐあいを表すのに分散，標準偏差が使われる．常識的に考えると“期待値（平均）$E(X)$ からのチラバリ”を表すのなら $E(X-E(X))$ がよいように思われるが，これは正負が打ち消し合って0となるので意味がない．それで $E((X-E(X))^2)$として分散を考え，$\sqrt{(\text{分散})}$=標準偏差　が必要となるのである．

標問 75.　⟨$V(aX+b)$⟩

Xを確率変数とし，$X=x_k$ となる確率を p_k とする．
$Y=ax_k+b$（a，b は定数で，$a\neq 0$）となる確率が p_k であるとき，確率変数Yを $Y=aX+b$ とかく．ただし，
$k=1, 2, \cdots\cdots, N$ とし，$\sum_{k=1}^{N} p_k=1$ とする．

(1) Xの平均値と分散をそれぞれ，$E(X)$，$V(X)$，Y の平均値と分散をそれぞれ $E(Y)$，$V(Y)$ とする．

(ア) $E(Y)=aE(X)+b$　　(イ) $V(Y)=a^2V(X)$

であることを示せ．

(2) 正しい硬貨を5回投げて，表の出た回数と裏の出た回数の差の絶対値を X_0 とする．確率変数 X_0 の平均値と分散を求めよ．

(3) (2)の X_0 から出発して，$3X_n=X_{n-1}+4$（$n=1, 2, \cdots\cdots$）によって定義される確率変数の列 $X_0, X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n, \cdots\cdots$ がある．X_n の平均値と分散を求めよ．　（高知医大）

解答　(1) (ア) $E(Y)=\sum_{k=1}^{N}(ax_k+b)p_k$

$$=a\sum_{k=1}^{N}x_kp_k+b\sum_{k=1}^{N}p_k=aE(X)+b$$

(イ) $V(Y)=\sum_{k=1}^{N}(ax_k+b-E(Y))^2p_k=\sum_{k=1}^{N}(ax_k-aE(X))^2p_k$

（∵ (ア)）

$$=a^2\sum_{k=1}^{N}(x_k-E(X))^2p_k=a^2V(X)$$

(2) 5回中n回表が出る確率は

$${}_5C_n\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

確率分布表は右のようになる．

X_0	1	3	5
確率	$5\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$5\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$E(X_0)=1\cdot\frac{5}{2^3}+3\cdot\frac{5}{2^4}+5\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{15}{8}$$ ……(答)

$$V(X_0)=\left(1-\frac{15}{8}\right)^2\cdot\frac{5}{2^3}+\left(3-\frac{15}{8}\right)^2\cdot\frac{5}{2^4}+\left(5-\frac{15}{8}\right)^2\cdot\frac{1}{2^4}$$

$$=\frac{95}{64} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　(1)より平均値 $E(X_n)$ は，$3E(X_n)=E(X_{n-1})+4$　という漸化式で表される．これを変形し

$$3(E(X_n)-2)=E(X_{n-1})-2$$

$$\therefore\quad E(X_n)-2=(E(X_0)-2)\left(\frac{1}{3}\right)^n=-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \left(\because\quad E(X_0)=\frac{15}{8}\right)$$

$$\therefore\quad E(X_n)=2-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

分散は，$V(X_n)=\frac{1}{9}V(X_{n-1})$，$V(X_0)=\frac{95}{64}$ より

$$V(X_n)=\frac{95}{64}\left(\frac{1}{9}\right)^n \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

研究

1°　**分散の公式**　X，Yを確率変数，a，b を定数とするとき

(1)　$V(aX+b)=a^2V(X)$

(2)　X，Yが独立のとき，$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

(1)は本問(1)(イ)でとりあげたものであり知っておいてほしい．(2)を証明する．

X，Yが独立であるから，$E(XY)=E(X)E(Y)$ が使える．

$$\begin{aligned}V(X+Y)&=E((X+Y)^2)-(E(X+Y))^2\\&=E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)-(E(X)+E(Y))^2\\&=E(X^2)-(E(X))^2+2(E(XY)-E(X)E(Y))+E(Y^2)-(E(Y))^2\\&=V(X)+V(Y)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

2°　**確率変数の標準化**　確率変数 X の平均値が $E(X)$，標準偏差が $\sigma(X)$ であるとき，確率変数として $Z=\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ をとってみると

$$E(Z)=\frac{1}{\sigma(X)}(E(X)-E(X))=0,$$

$$V(Z)=\frac{1}{(\sigma(X))^2}V(X)=\frac{V(X)}{V(X)}=1$$

であり，Zの平均値は0，分散は1，ということは標準偏差も1である．このZを，“Xの標準化した確率変数”といい，ZをつくることをXを標準化するという．すなわち，標準化とは，平均値 $E(X)$ を中心とし標準偏差 $\sigma(X)$ を単位とする尺度に確率変数をとり直すことであり，これは後で役に立つ．

標問 76. 〈チェビシェフの不等式〉

確率変数Xの確率分布が次の表のように与えられている．

X	x_1 x_2 …… x_n	計
確　率	p_1 p_2 …… p_n	1

またXの期待値をm，分散を σ^2 とすれば，次の不等式が成立することを示せ．($\sigma \geqq 0$)

確率 $P(|X-m|>k\sigma) \leqq \frac{1}{k^2}$（ただし，$k$は任意の正の定数）

（武蔵工大）

解答 $\sum'$ を $|x_i-m|>k\sigma$ を満たす i についての総和とすれば

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i \geqq \sum{}'(x_i-m)^2p_i$$
$$>\sum{}'(k\sigma)^2p_i=k^2\sigma^2\sum{}'p_i$$

$\sigma>0$ のとき

$$P(|X-m|>k\sigma)=\sum{}'p_i<\frac{1}{k^2}$$

$\sigma=0$ のとき，各 i について，$x_i=m$ または $p_i=0$ であるから

$$P(|X-m|>k\sigma)=0$$

いずれにせよ，$P(|X-m|>k\sigma) \leqq \frac{1}{k^2}$

研究

1° 解答の流れからわかるように，$|X-m|>k\sigma$ となる確率を計算する限りにおいては問題文にある等号は不要である．

2° この不等式はチェビシェフの不等式と呼ばれるもので，通常は $\sigma>0$ として，

$$P(|X-m| \geqq k\sigma) \leqq \frac{1}{k^2} \text{ あるいは } P(|X-m|<k\sigma) \geqq 1-\frac{1}{k^2}$$

の形で表すことが多い（ここで，kはもちろん正の定数）．

3° これは平均値からのバラツキぐあいをみる不等式であるが，数学的確率と統計的確率を結ぶ"大数の法則"の証明にも使われる重要なものである．

Ⅲ. 連続確率分布

確率変数が離散的なものだけを扱ってきたが，人の身長，物の長さ，待ち時間，電話の通話継続時間など確率変数が連続的な値をとることも多い（しかし，これは高校の教科書では扱わないことが多い）．このような確率変数を連続型の確率変数という．（標問 **77〜79** は，参考までに読むだけでよい）．

1°　確率密度関数　任意の実数 a，b に対して

$$P(a \leqq X \leqq b)=\int_a^b f(x)dx \quad \left(f(x) \geqq 0,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1\right)$$

となる $f(x)$ が存在するとき，この確率分布を**連続型確率分布**，Xを**連続型確率変数**という．また，$f(x)$ を**確率密度関数**という．

2°　平均・分散　確率変数Xが確率密度関数 $f(x)$ をもつとき，平均（期待値）$E(X)$，分散 $V(X)$，標準偏差 σ を次のように定義する．

1)　**平均**：　$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

2)　**分散**：　$V(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2f(x)dx$

3)　**標準偏差**：　$\sigma=\sqrt{V(X)}$

離散型確率変数のときと全く同様に，定義されていることが理解されよう．

標問 77.　〈確率密度関数〉

確率変数Xは区間 $[0,\ 1]$ の任意の値をとることができ，その確率密度関数は $k\sin \pi x$ であるという．

このとき，k の値および $P(0 \leqq X \leqq 0.5)$ を求めよ．

（滋賀医大）

解答　$\int_0^1 k\sin \pi x dx=\left[-\dfrac{k}{\pi}\cos \pi x\right]_0^1=\dfrac{2k}{\pi}=1$

$$\therefore\ k=\frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$P(0 \leqq X \leqq 0.5)=\int_0^{0.5}\frac{\pi}{2}\sin \pi x dx=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{\cos \pi x}{\pi}\right]_0^{0.5}=\frac{1}{2}$$

$\cdots\cdots$(答)

標問 78. 〈平均値 $E(X)$〉

ある電話局管内の電話の1回の通話時間（単位を分とする）は，確率変数Xで表され，その確率密度関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\begin{cases} ae^{-\frac{x}{3}} & (0\leqq x<180) \\ 0 & (x\geqq 180) \end{cases}$$

である．ただし，aは定数である．一方，通話料は
$3(n-1)\leqq x<3n$（$n=1, 2, \cdots\cdots$）の通話時間に対して$10n$円である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 定数aの値を求めよ．

(2) 1回の通話時間の平均値を定積分で表し，その値（単位を分とする）を求めよ．

(3) 1回の通話料が$10n$円（$n=1, 2, \cdots\cdots, 60$）である確率を定積分で表し，その値を求めよ．

(4) 1回の通話料の平均値を級数で表し，その値（単位を円とする）を求めよ．　（大阪府大）

解答 (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_0^{180} ae^{-\frac{x}{3}}dx=a\left[-3e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^{180}=1$

$\therefore\ 3a(1-e^{-60})=1\qquad \therefore\ a=\dfrac{1}{3(1-e^{-60})}$ ……(答)

(2) 平均値 $\displaystyle E(X)=\int_0^{180} x\cdot ae^{-\frac{x}{3}}dx$

$\displaystyle =a\left[-3xe^{-\frac{x}{3}}\right]_0^{180}+3\int_0^{180} ae^{-\frac{x}{3}}dx$ （部分積分）

$=\dfrac{-540e^{-60}}{3(1-e^{-60})}+3\cdot 1$

$=\dfrac{3(e^{60}-61)}{e^{60}-1}$ （≒3分） ……(答)

(3) $\displaystyle P(3(n-1)\leqq x<3n)=\int_{3(n-1)}^{3n} ae^{-\frac{x}{3}}dx$

$=a\left[-3e^{-\frac{x}{3}}\right]_{3(n-1)}^{3n}=-3a(e^{-n}-e^{-n+1})$

$=\dfrac{(e-1)e^{-n}}{1-e^{-60}}$ ……(答)

(4) 求める平均値は

$$\sum_{n=1}^{60} 10n \cdot \frac{(e-1)e^{-n}}{1-e^{-60}} = \frac{10(e-1)}{1-e^{-60}} \sum_{n=1}^{60} ne^{-n}$$

$\sum_{n=1}^{60} ne^{-n}$ はべき級数であるから，$S=\sum_{n=1}^{60} ne^{-n}$ とおくと

$$S = e^{-1}+2e^{-2}+3e^{-3}+\cdots\cdots+60e^{-60}$$

$$\underline{e^{-1}S = \qquad e^{-2}+2e^{-3}+\cdots\cdots+59e^{-60}+60e^{-61}} \ (-$$

$$(1-e^{-1})S = e^{-1}+e^{-2}+e^{-3}+\cdots\cdots+e^{-60}-60e^{-61}$$

$$= \frac{e^{-1}(1-e^{-60})}{1-e^{-1}} - 60e^{-61}$$

$$\therefore \quad S = \frac{e(1-e^{-60})}{(e-1)^2} - \frac{60e^{-60}}{e-1}$$

よって，求める値は　$10\left(\frac{e}{e-1} - \frac{60}{e^{60}-1}\right)$　(≒16 円)　……(答)

標問 79. 〈分散 $V(X)$〉

区間 $\left[-\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right]$ のすべての値をとる確率変数 X の確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{m}x + \dfrac{1}{2} & \left(-\dfrac{m}{2} \leqq x \leqq 0 \text{ のとき}\right) \\ -\dfrac{1}{n}x + \dfrac{1}{2} & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{n}{2} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

により与えられている．X の平均値が $\frac{2}{3}$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) m，n の値を求めよ．

(2) X の分散を求めよ．

(3) t の 2 次方程式 $t^2-4t+2X+1=0$ の 2 つの解がともに正である確率を求めよ．　(静岡大)

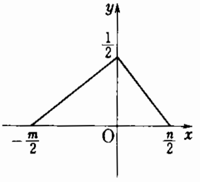
精講

(1) **"確率の総和＝1"** が決め手となる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\frac{m}{2}}^{\frac{n}{2}} f(x)\,dx = 1$$

(2)　分散 $V(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(x))^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-(E(x))^2$

解答　(1)　確率密度関数 $y=f(x)$ のグラフは右図のようになるから



$$\int_{-\frac{m}{2}}^{\frac{n}{2}}f(x)dx=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+\frac{m}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\therefore\quad \frac{m+n}{8}=1 \qquad \therefore\quad m+n=8 \cdots\cdots ①$$

また，Xの平均値が $\frac{2}{3}$ であることより

$$\int_{-\frac{m}{2}}^{\frac{n}{2}}xf(x)dx=\int_{-\frac{m}{2}}^{0}x\left(\frac{1}{m}x+\frac{1}{2}\right)dx+\int_{0}^{\frac{n}{2}}x\left(-\frac{1}{n}x+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3m}+\frac{x^2}{4}\right]_{-\frac{m}{2}}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3n}+\frac{x^2}{4}\right]_{0}^{\frac{n}{2}}$$

$$=\frac{n^2-m^2}{48}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\quad (n-m)(n+m)=32 \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②より　$m=2,\ n=6$　……(答)

(2)　分散 $V(X)=\int_{-1}^{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2f(x)dx$

$$=\int_{-1}^{3}x^2f(x)dx-\left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad \text{（これは分散の公式）}$$

$$=\int_{-1}^{0}x^2\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx+\int_{0}^{3}x^2\left(-\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)dx-\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$=\frac{13}{18}$$　……(答)

(3)　2つの解が正となる条件は，解の和が4であるから

$$\begin{cases}(\text{判別式})\geqq 0\\ 2X+1>0\end{cases} \qquad \therefore\quad -\frac{1}{2}<X\leqq\frac{3}{2}$$

求める確率は

$$P\left(-\frac{1}{2}<X\leqq\frac{3}{2}\right)=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)dx+\int_{0}^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{3}{4}$$

……(答)