第5章 総合問題

標問 94. 〈順列〉

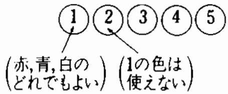
赤球3個，青球3個，白球2個の中から5個の球を取り出して1列に並べる．次の並べ方はそれぞれ何通りあるか．

(1) 同色の球が隣り合わない並べ方．

(2) どの色の球も少なくとも1個入っている並べ方．（大分大）

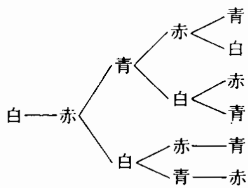
解答 (1) 左端が赤のとき，2番目からは2通りの選択が可能ゆえ

$$2^4=16 \text{ 通り}$$



左端が青のときも，同じく16通り．

左端が白のときは，2番目が赤なら右のような樹形図となり6通り．2番目が青のときも同じく6通り．



よって，求める並べ方は

$$16\times2+6\times2=44 \text{ 通り} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 色の取り方は次の5通り

白	赤	青	並べ方
1	1	3	$\dfrac{5!}{3!}\times2=40$
1	3	1	
1	2	2	$\dfrac{5!}{2!2!}=30$
2	1	2	$\dfrac{5!}{2!2!}\times2=60$
2	2	1	

$$\therefore \quad 40+30+60=130 \text{ 通り} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

研究 (1) 白球も3個あると考えると，題意を満たす並べ方は

$$3\times2^4=48 \text{ 通り}$$

このうち白球3個を使う並べ方は白◯白◯白で4通り

$$\therefore \quad 48-4=44 \text{ 通り}$$

標問 95. 〈カードの並べ方〉

数字1の書いてあるカード，数字2の書いてあるカード，……，数字nの書いてあるカードが，それぞれ1枚ずつある．これらのカードを左から右に全部並べる順列について，次の問い(1)，(2)に答えよ．

(1) 数字1のカードが左からi_1番目，数字2のカードが左からi_2番目，……，数字pのカード（$p \leqq n$）が左からi_p番目に並ぶような並べ方は何通りあるか．ただし，i_1，i_2，……，i_pは相異なるn以下の正の整数を表す．

(2) 整数 $p(1 \leqq p \leqq n)$ を1つ定める．数字pのカードより左側にp以下の数字のカードが並ばないような並べ方は何通りあるか．

（神戸大）

解答 (1) 数字 $1 \sim p$ のカードの置かれる位置は決まっているから，$p+1 \sim n$ の残り $n-p$ 枚のカードの位置を決めればよい．

$(n-p)!$ 通り ……(答)

(2) 数字 $1 \sim p$ のカードの位置の決め方は

${}_nC_p$ 通り

その位置の取り方でpを左端に決めると$1 \sim p-1$のカードの並べ方は

$(p-1)!$ 通り

残り $n-p$ 枚のカードの並べ方は

$(n-p)!$ 通り

であるから，求める並べ方は

$${}_nC_p \cdot (p-1)! \cdot (n-p)! = \frac{n!}{p} \text{ 通り} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

研究 (2) まず，pのカードを置き，$1 \sim p-1$のカードをその右側に並べる．この並べ方は$(p-1)!$通り．

次に$p+1 \sim n$の$n-p$枚のカードを1枚ずつ並べていく．$p+1$のカードの置き方はすでに並んでいるp枚のカードの間，両端合わせて$p+1$通り，$p+2$のカードも同じく考えて$p+2$通り，……と考え

$$(p-1)!(p+1)(p+2)\cdots\cdots n = \frac{n!}{p}$$

標問 96.　〈組分け・分配〉

12冊の異なる本を次のように分ける方法は何通りあるか．

(1)　5冊，4冊，3冊の3組に分けるのは，□通り．

(2)　4冊ずつ3人の子供に分けるのは，□通り．

(3)　4冊ずつ3組に分けるのは，□通り．

(4)　8冊，2冊，2冊の3組に分けるのは，□通り．

（東京理大）

精講　(1)　12冊からまず5冊を選び，次に残り7冊から4冊を選ぶ．すると，最後は3冊残るから，組分けが確定する．

$$_{12}C_5\cdot{}_7C_4=792\cdot35=27720$$

(2)　3人の子供をA，B，Cとする．12冊からAに分ける4冊を選び，残り8冊からBに分ける4冊を選ぶ．すると，4冊残るのでこれをCに分ければ，分配が確定する．

$$_{12}C_4\cdot{}_8C_4=495\cdot70=34650$$

(3)　(2)において，A，B，Cを区別しない分け方である．求める総数をxとすると，このどの1通りに対しても，A，B，Cに分けるには 3! 通りの分け方がある．

$$\therefore\quad x\times3!={}_{12}C_4\cdot{}_8C_4$$

$$x=\frac{_{12}C_4\cdot{}_8C_4}{3!}=\frac{34650}{6}=5775$$

［別解］　12冊のうちの特定な1冊と同じ組になる3冊の選び方は $_{11}C_3$

残り8冊のうち，特定な1冊と同じ組となる3冊の選び方は　$_7C_3$

$$\therefore\quad {}_{11}C_3\cdot{}_7C_3=165\cdot35=5775$$

(4)　(3)と同じに考えて

$$\frac{_{12}C_8\cdot{}_4C_2}{2!}=\frac{495\cdot6}{2}=1485$$

［別解］　8冊の組の作り方は　　$_{12}C_8$

残り4冊のうち特定な1冊と同じ組となる1冊の選び方は　$_3C_1$

$$\therefore\quad {}_{12}C_8\cdot{}_3C_1=495\cdot3=1485$$

解答　(1) 27720　(2) 34650　(3) 5775　(4) 1485

標問 97. 〈部分集合の取り出し方〉

$S=\{1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n\}$，ただし $n\geqq 2$ とする．2つの要素からなるSの部分集合をk個取り出し，そのうちのどの2つも交わりが空集合であるようにする方法は何通りあるか．

次に，この数（つまり何通りあるかを示す数）を $f(n,\ k)$ で表したとき，

$$f(n,\ k)=f(n,\ 1)$$

を満たすようなnとk（ただし，$k\geqq 2$）をすべて求めよ．

（東 大）

解答 $f(n,\ k)=\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_2\cdot{}_{n-4}\mathrm{C}_2\cdots\cdots{}_{n-2(k-1)}\mathrm{C}_2}{k!}$

$$=\frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot\frac{(n-2)!}{2!(n-4)!}\cdot\frac{(n-4)!}{2!(n-6)!}\cdots\cdots\frac{(n-2k+2)!}{2!(n-2k)!}\cdot\frac{1}{k!}$$

$=\dfrac{n!}{2^k(n-2k)!k!}$ 通り ……（答）

次に，$f(n,\ k)=f(n,\ 1)$ $(k\geqq 2)$ のとき

$$\frac{n!}{2^k(n-2k)!k!}=\frac{n!}{2(n-2)!}$$

$$\therefore\quad \frac{(n-2)!}{(n-2k)!}=2^{k-1}k!$$

両辺を $(2k-2)!$ で割ると

$${}_{n-2}\mathrm{C}_{2(k-1)}=\frac{2^{k-1}k!}{(2k-2)!}=\frac{k}{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2k-3)}$$

左辺は整数ゆえ　$k\geqq 2k-3$　　$\therefore$　$k\leqq 3$

$k=2$ のとき，${}_{n-2}\mathrm{C}_2=2$

$(n-2)(n-3)=4$，$n^2-5n+2=0$

これを満たす自然数nは存在しない．

$k=3$ のとき，${}_{n-2}\mathrm{C}_4=1$

$(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)=4!$

$\therefore$　$n-2=4$，$n=6$

よって，　$n=6$，$k=3$ ……（答）

標問 98.　〈正方形の移動〉

m, n を整数として，xy 平面上に8点 A(m, n)，B$(m+1, n)$，C$(m+1, n+1)$，D$(m, n+1)$，O$(0, 0)$，P$(1, 0)$，Q$(1, 1)$，R$(0, 1)$ がある．正方形 ABCD をその辺に関する対称移動をくり返して正方形 OPQR に重ねる．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 対称移動の回数を最小にするような経路は何通りあるか．

(2) 頂点A，B，C，Dがそれぞれ頂点O，P，Q，Rのどれに重なるかは，途中の経路によらず一定であることを証明せよ．

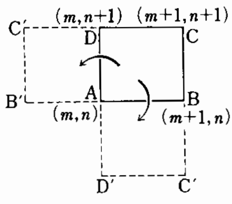
(愛知教育大)

精講　(1) 正方形 ABCD の中心 $\left(m+\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2}\right)$ が $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ に移動する最小回数を考えればよい．（☞ 標問 18）

解答　(1) 正方形 ABCD を x 軸方向に $|m|$ 回，y 軸方向に $|n|$ 回移動すれば正方形 OPQR に重ねられる．

よって，求める経路は $\dfrac{(|m|+|n|)!}{|m|!|n|!}$ 通り　……(答)

(2) 正方形 ABCD の1回の移動による座標の変化は，y 軸に平行な辺に関して対称移動したときは x 座標が2だけ減少するか，2だけ増加するか，あるいは変化なしであり，x 座標の偶数，奇数は変化しない．同じく x 軸と平行な辺に関して対称移動したときも y 座標の偶数，奇数は変化しない．



したがって，途中の経路のとり方によらず，

O$(0, 0)$ には（偶数，偶数），
P$(1, 0)$ には（奇数，偶数），
Q$(1, 1)$ には（奇数，奇数），
R$(0, 1)$ には（偶数，奇数）

となる点が重なる．

標問 99. 〈確率〉

1つのさいころを4回振って出る目の数を順に a, b, c, d とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $a+b+c+d=8$ となる確率を求めよ．

(2) 2つの円 $A : x^2+y^2-2ax-2by=0$,
$B : x^2+y^2-2cx-2dy=0$

が原点以外に共有点をもたない確率を求めよ．

（北海道教育大）

解答 (1) $a+b+c+d=8$ となるのは a, b, c, d の組が

$\{5, 1, 1, 1\}$, $\{4, 2, 1, 1\}$, $\{3, 3, 1, 1\}$,
$\{3, 2, 2, 1\}$, $\{2, 2, 2, 2\}$

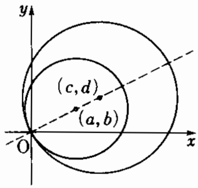
のときであり，それぞれの目の出方を数えると

$$4+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{2!}+1=35$$

よって，求める確率は $\dfrac{35}{6^4}=\dfrac{35}{1296}$ ……(答)

(2) $A : (x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$

$B : (x-c)^2+(y-d)^2=c^2+d^2$



原点以外に共有点をもたないのは内接するときであるから

$$|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

$$\therefore \quad ad-bc=0$$

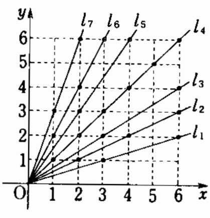
求める条件は，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ かつ $(a,\ b)\neq(c,\ d)$

であり，原点を通る直線上の異なる2点として $(a,\ b)$, $(c,\ d)$ をとらえることができる．

$$(2+{}_3\mathrm{P}_2+2)\times2+{}_6\mathrm{P}_2=50$$

よって，求める確率は

$$\frac{50}{6^4}=\frac{25}{648}$$ ……(答)



標問 100.　〈スゴロク〉

「ふり出し」⓪から出発して①，②，…… の順に数えて10こま目の⑩が「上り」であるスゴロクと，どの目も出る確率が等しいさいころがある．1回にさいころ1個を振って出た目の数だけ進むが，「上り」の近くで，例えば⑧で出た目の数が5であれば⑧→⑨→⑩→⑨→⑧→⑦のように⑩を越えた分だけ後もどりさせられるものとする．

(1) 「ふり出し」から出発して3回目で「上り」となる確率は $\boxed{}$ である．

(2) ⑥に停止したら「ふり出し」へもどるという規則を付け加えるとき，3回目で「上り」となる確率は $\boxed{}$ である．

（東京理大）

精講

(1) $x+y+z=10$ $(1\leqq x,\ y,\ z\leqq 6)$ となる $(x,\ y,\ z)$ の個数は組 $\{x,\ y,\ z\}$ を考えると

$$\left.\begin{array}{l}\{1,\ 3,\ 6\}\ \cdots\cdots\ 6\text{ 通り}\\ \{1,\ 4,\ 5\}\ \cdots\cdots\ 6\text{ 通り}\\ \{2,\ 2,\ 6\}\ \cdots\cdots\ 3\text{ 通り}\\ \{2,\ 3,\ 5\}\ \cdots\cdots\ 6\text{ 通り}\\ \{2,\ 4,\ 4\}\ \cdots\cdots\ 3\text{ 通り}\\ \{3,\ 3,\ 4\}\ \cdots\cdots\ 3\text{ 通り}\end{array}\right\}27\text{ 通り}$$

これらに $(6,\ 6,\ 2)$，$(6,\ 5,\ 1)$，$(5,\ 6,\ 1)$ の3通りを加え

$$\frac{27+3}{6^3}=\frac{5}{36}$$

〔参考〕 $x+y+z=10 \iff X+Y+Z=7$

$(X=x-1,\ Y=y-1,\ Z=z-1,\ 0\leqq X,\ Y,\ Z\leqq 5$ とする$)$

と考え　${}_3H_7-({}_3C_1\cdot{}_2C_1+{}_3C_1)=27$　$(6+1+0,\ 7+0+0$ を除く$)$

(2) (1)のうち不適なものは10通り，新たに $(6,\ 5,\ 5)$，$(6,\ 4,\ 6)$ を加え

$$\frac{30-10+2}{6^3}=\frac{11}{108}$$

解答　(1) $\dfrac{5}{36}$　(2) $\dfrac{11}{108}$

標問 101. 〈色塗り〉

平面上で線分 BC の両側に正三角形 ABC と BCD があって，それらの頂点A，B，C，Dは赤く塗られている．辺 AB, AC, BC, BD, CD（頂点を除く）をおのおの独立に，確率 p で赤く，確率 $q=1-p$ で白く塗るとき，2頂点AとDが赤い辺でつながる確率を $T(p)$ とする．

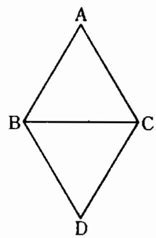
(1) $T\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を計算せよ．

(2) $T(p)+T(q)=1$ を証明せよ． （京都府医大）

解答 (1) 題意が満たされるのは

(ア) BC が赤のとき，「AB, AC の少なくとも一方が赤」かつ「BD, CD の少なくとも一方が赤」

$$\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{32}$$



(イ) BC が白のとき，「AB, BD が赤」または「AC, CD が赤」

$$\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)=\frac{7}{32}$$

よって $$T\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{32}+\frac{7}{32}=\frac{1}{2}$$ ……(答)

(2) (1)と同様に考え $T(p)=p(1-q^2)^2+q(1-(1-p^2)^2)$

p, q を入れかえて $T(q)=q(1-p^2)^2+p(1-(1-q^2)^2)$

$$T(p)+T(q)=p+q=1$$

研究 $T(q)$ はAとDが白い辺でつながる確率である．AとDが赤い辺と白い辺でつながる確率を $T(p\cap q)$，赤い辺でも白い辺でもつながらない確率を $T(r)$ とすれば

$$T(p)+T(q)-T(p\cap q)+T(r)=1$$

$T(p\cap q)$ は AB, BD が同じ色で，AC, CD が他の色で同じ場合，$T(r)$ は AB, AC が同じ色で BD, CD が他の色の場合の確率で，

$$T(p\cap q)=T(r)$$

標問 102.　〈点の移動〉

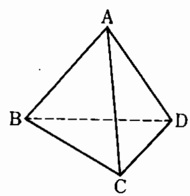
正四面体の 4 つの頂点をA，B，C，Dとし，1つの駒(こま)を，さいころの目に従って，次のように頂点から頂点へ移すことにする．

すなわち，各頂点ごとに3つの異なる目を選び，さいころを振って，それらの目が出たら駒をどの頂点に移すかを指定しておく．ただし，異なる目には異なる頂点を指定する．移すことができる目が出なかったときには，駒は動かさないものとする．

(1)　頂点Aにある駒が，さいころを3回振ったときに頂点Bにある確率はいくらか．

(2)　頂点Aにある駒が，さいころを4回振ったときに初めて頂点Bにくる確率はいくらか．　(岐阜大)

解答　(1)　指定した頂点へ移す確率が $\frac{1}{6}$，動かない確率が $\frac{1}{2}$ であるから



$$A\to B\to B\to B,\quad A\to B\to \overline{B}\to B$$
$$A\to \overline{B}\to B\to B,\quad A\to \overline{B}\to \overline{B}\to B$$

と考えて，求める確率は

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{13}{54}\quad\cdots\cdots(答)$$

(2)　$A\to \overline{B}\to \overline{B}\to \overline{B}\to B$ となるときで

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}=\frac{125}{1296}\quad\cdots\cdots(答)$$

研究　さいころを n 回振ったときに頂点Bに駒がある確率を p_n とすれば

$$p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{6}(1-p_{n-1})$$

と表され，$p_0=0$ からこの漸化式を解くと

$$p_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

これより $p_3=\frac{13}{54}$ が確かめられる．

標問 103. 〈条件つき確率〉

箱が10個あり，1から10までの番号がつけられている．また，10枚のカードには1から10までの数字が記されている．いま，でたらめにカードをおのおのの箱に1枚ずつ全部配るとき，番号 i の箱に入るカードの数字を X_i とする．

(1) $X_1<X_2<X_3$ が生起する確率を求めよ．

(2) $X_1\leqq 4$ の条件のもとに，$X_2\leqq 3$ が生起する確率を求めよ．

(3) 2つの事象 $X_1=1$，$X_2=2$ のうち少なくとも一方が生起する確率を求めよ．

(4) $X_i=i$ となるような i が少なくとも1つはある確率と(2)の確率の大小を比較せよ．

(防衛医大)

解答 (1) X_1, X_2, X_3 だけの並び方を考えて $\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$ ……(答)

(2) $X_1\leqq 4$ である事象をE，$X_2\leqq 3$ である事象をFとすると

$$P(\mathrm{E})=\frac{4}{10},\quad P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})=\frac{2+2+2+3}{10\cdot 9}=\frac{1}{10}$$

(分子は $X_1=1$, 2, 3, 4 と場合分けして数える)

$$\therefore\quad P_{\mathrm{E}}(\mathrm{F})=\frac{P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})}{P(\mathrm{E})}=\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $X_1=1$ である事象をA，$X_2=2$ である事象をBとすると

$$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{17}{90} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(4) $X_3=3$ である事象をCとする．求める確率を p とすると

$$p>P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\mathrm{C})=\frac{1}{10}\times 3-\frac{1}{90}\times 3+\frac{1}{10\cdot 9\cdot 8}=\frac{193}{720}>\frac{1}{4}=(2)\text{の確率}$$

よって，(2)の確率の方が小さい． ……(答)

研究 (2) $X_1\leqq 4$ となる X_1, X_2 の取り方は $4\times 9=36$ 通りであるから，条件つき確率の定義にもどれば

$$\frac{2+2+2+3}{36}=\frac{1}{4}$$

標問 104. 〈独立試行の定理・最大確率〉

n を自然数，a を正の数とするとき，二項定理

$(1+a)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k a^k$ において，$A_k={}_n\mathrm{C}_k a^k$ ($k=0$，1，2，……，n) とおく．次に答えよ．

(1) $\dfrac{A_{k+1}}{A_k}\geqq 1$ となる k の範囲を a と n で表せ．

(2) $a=\dfrac{1}{5}$，$n=35$ のとき，A_k ($k=0$，1，2，……，n) の中で最大となるものをすべて求めよ．

(3) 1つのさいころを40回投げるとき，1の目が何回出る確率が最も大きいか．

(九州工大)

解答 (1) $\dfrac{A_{k+1}}{A_k}=\dfrac{{}_n\mathrm{C}_{k+1}a^{k+1}}{{}_n\mathrm{C}_k a^k}=\dfrac{n-k}{k+1}\cdot a\geqq 1$ より

$(n-k)a\geqq k+1$　　$\therefore\ k\leqq\dfrac{na-1}{a+1}$　　……(答)

(2) $a=\dfrac{1}{5}$，$n=35$ のとき　$k\leqq\dfrac{na-1}{a+1}=\dfrac{35-5}{1+5}=5$

したがって，$A_1<A_2<\cdots\cdots<A_5=A_6$，$A_6>A_7>\cdots\cdots$

最大となるのは　A_5 と A_6　　……(答)

(3) 40回投げるとき，1の目が k 回出る確率を p_k とすると

$$p_k={}_{40}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{40-k}=\left(\frac{5}{6}\right)^{40}{}_{40}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{5}\right)^k$$

$$\therefore\ \frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{{}_{40}\mathrm{C}_{k+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}}{{}_{40}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{5}\right)^k}$$

$a=\dfrac{1}{5}$，$n=40$ として(2)と同じく計算すると

$$k\leqq\frac{40-5}{1+5}=\frac{35}{6}=5.83\cdots\cdots$$

$$\therefore\ p_1<p_2<\cdots\cdots<p_5<p_6,\ p_6>p_7>\cdots\cdots$$

よって，40回投げるとき，1の目が6回出る確率が最も大きい．

……(答)

標問 105.　〈試行回数〉

1つのさいころをくり返し振る試行で，2度目の6の目が出れば試行は終わる．試行が終わるまでに6以外の目が出た回数を表す確率変数をXとする．

(1)　1回目に6の目が出て $X=k$ となる確率 p_k ($k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$) を求めよ．

(2)　確率 $P(X=k)$ ($k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$) を求めよ．

(3)　試行が終わるまでに振った回数が $n+2$ 以下である確率を求めよ．ただし，n は整数で $n\geqq 0$ とする．　(広島大)

解答　(1)　$p_k=\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^k\cdot\dfrac{1}{6}$

$$=\frac{1}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^k\qquad\cdots\cdots(答)$$

$$⑥\underbrace{○○\cdots○}_{k\text{回}}⑥$$

(2)　$P(X=k)={}_{k+1}\mathrm{C}_1\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^k\cdot\dfrac{1}{6}$

$$=\frac{k+1}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^k\qquad\cdots\cdots(答)$$

$$\underbrace{○○⑥\cdots○}_{k+1\text{回}}⑥$$

(3)　求める確率は　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=\frac{1}{36}\sum_{k=0}^{n}(k+1)\left(\frac{5}{6}\right)^k$

$\displaystyle S=\sum_{k=0}^{n}(k+1)\left(\frac{5}{6}\right)^k$ とおけば

$$S-\frac{5}{6}S=1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^n-(n+1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$$

$$\therefore\quad S=36\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\right)-6(n+1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}-\frac{n+1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$

$$=1-\frac{n+7}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\qquad\cdots\cdots(答)$$

研究　(3)　振った回数が $n+2$ 以下であるとは，2回目の6が出ても試行を続けて $n+2$ 回振った状態で考えると，6の目が2回以上出ることである．求める確率は $n+2$ 回振ったときの6の目が0回，1回出る余事象と考えてもよい．

標問 106.　〈2項間漸化式〉

ある試合で「Aチームが勝った」という話を次の人に伝えるとき，前の人から聞いたとおりに話す確率を 0.9，聞いたのとは反対に話す確率を0.1とする．1番目の人が「Aチームが勝った」と聞いて2番目の人に話す．2番目の人が聞いた話を3番目の人に話すというように，次々に伝えていくとき，n 番目の人が「Aチームが勝った」と聞く確率 P_n が

$$P_n=\frac{1}{2}(1+0.8^{n-1})$$

となることを示せ．　（成蹊大）

精講　結果が示された問題なので数学的帰納法というのも1つの手．

$n=1$ のとき，$P_1=\frac{1}{2}(1+0.8^{1-1})=1$ で正しい．

n での成立を仮定すると

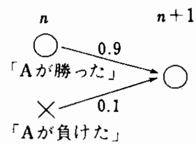
$$P_{n+1}=P_n\cdot 0.9+(1-P_n)\cdot 0.1 \qquad \cdots\cdots(*)$$

$$=0.8P_n+0.1=0.4+\frac{1}{2}\cdot 0.8^n+0.1=\frac{1}{2}(1+0.8^n)$$

したがって，すべての自然数 n について，与式は成立する．

ここで，2項間漸化式$(*)$が本質的な役割を果している．

解答　$n+1$ 番目の人が「Aチームが勝った」と聞くのは，n 番目の人が「Aが勝った」,「Aが負けた」と聞いた場合をそれぞれ考えると



$$P_{n+1}=P_n\cdot 0.9+(1-P_n)\cdot 0.1$$
$$=0.8P_n+0.1$$

この漸化式は $P_{n+1}-0.5=0.8(P_n-0.5)$ と変形され，$\{P_n-0.5\}$ は公比 0.8 の等比数列である．$P_1=1$ より

$$P_n-0.5=(P_1-0.5)\cdot 0.8^{n-1}$$
$$=0.5\cdot 0.8^{n-1}$$

$$\therefore\quad P_n=\frac{1}{2}(1+0.8^{n-1})$$

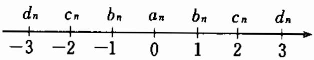
標問 107.　〈連立漸化式〉

点Qが数直線上の原点から出発して，1秒ごとに正または負の方向に同じ確率 $\dfrac{1}{2}$ で1だけ移動し，3または -3 に到達すると動きを止めるものとする．n 秒後に点Qが3または -3 にある確率 P_n を求めよ．

(岐阜大)

精講　状況変化の問題は漸化式をたてる．考えられる点Qの位置は 0，±1，±2，±3 の7点があるが，条件より，1，−1 にある確率は等しい．±2，±3 も同様であり対称性の利用を考える．

解答　点Qが n 秒後に x にある確率と $-x$ にある確率とは等しいから $x=0$，±1，±2，±3 にある確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n，d_n とおくと



$$a_{n+1}=\frac{1}{2}b_n\times 2=b_n,\quad b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n,\quad c_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$$

$$\therefore\quad b_{n+1}=\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}b_{n-1}=\frac{3}{4}b_{n-1}$$

$b_1=\dfrac{1}{2}$ より，n が奇数のとき，数列 $\{b_n\}$ の奇数項は $\dfrac{n-1}{2}+1$ 個あるから

$$b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

$b_2=0$ より，n が偶数のとき，$b_n=0$

$$\begin{aligned}P_n&=2d_n=1-(a_n+2b_n+2c_n)\\&=1-2(b_n+b_{n-1})\\&=\begin{cases}1-2b_n & (n\text{ が奇数のとき})\\ 1-2b_{n-1} & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases}\\&=\begin{cases}1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}} & (n\text{ が奇数のとき})\\ 1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}} & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases}\end{aligned}$$

……(答)

標問 108.　〈ジャンケンの確率〉

3人でジャンケンをして勝者を決めることにする．ジャンケンをして，負けた人は次の回からは参加しないことにし，ちょうど1人の勝者が決まるまで，ジャンケンをくり返すことにする．このとき，n回目に，はじめてちょうど1人の勝者が決まる確率を求めよ．

解答　“誰”が“どの手”でと考えながら，人数の変化する確率を求めていくと

3人 → 3人　$\dfrac{3+3!}{3^3}=\dfrac{1}{3}$

3人 → 2人　$\dfrac{{}_3C_2\cdot 3}{3^3}=\dfrac{1}{3}$

3人 → 1人　$\dfrac{{}_3C_1\cdot 3}{3^3}=\dfrac{1}{3}$

2人 → 2人　$\dfrac{3}{3^2}=\dfrac{1}{3}$

2人 → 1人　$\dfrac{{}_2C_1\cdot 3}{3^2}=\dfrac{2}{3}$

n回目のジャンケンでk人である確率を $P_n(k)$ とすると

n回目	$n+1$回目	
3人	3人：$P_{n+1}(3)=\dfrac{1}{3}P_n(3)$	……①
2人	2人：$P_{n+1}(2)=\dfrac{1}{3}P_n(3)+\dfrac{1}{3}P_n(2)$	……②
	1人：$P_{n+1}(1)=\dfrac{1}{3}P_n(3)+\dfrac{2}{3}P_n(2)$	……③

$P_0(1)=0$，$P_0(2)=0$，$P_0(3)=1$ より，①，②，③を解くと

$$P_n(3)=\left(\frac{1}{3}\right)^n,\quad P_n(2)=\frac{n}{3^n}\qquad \therefore\ P_n(1)=\frac{2n-1}{3^n}\ \cdots\cdots(\text{答})$$

［別解］　k回目のジャンケンで3人から2人，そしてn回目で2人から1人となって勝者が決まる場合と，n回目に3人から1人となって勝者が決まる場合の2通りが考えられるから

$$P_n(1)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1-k}\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{3^n}\right)+\frac{1}{3^n}=\frac{2n-1}{3^n}$$

標問 109. 〈n 人のジャンケン〉

n 人（$n \geqq 2$）で1回だけジャンケンをする．勝者の数を X として，次の各問いに答えよ．

(1)　$X=k$（$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$）である確率を求めよ．

(2)　$X=0$，すなわち勝負が決まらない確率を求めよ．

(3)　X の期待値を求めよ．　（新潟大）

解答　(1)　“どの k 人”が“どの手”で勝つかと考えると

$$P(X=k)={}_n\mathrm{C}_k\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$$

$$={}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\quad(1\leqq k\leqq n-1)\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　余事象を考えて

$$P(X=0)=1-\sum_{k=1}^{n-1}P(X=k)$$

$$=1-({}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1})\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$(1+1)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n$　ゆえ

$$P(X=0)=1-(2^n-{}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_n)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=1-2\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)
$$E(X)=\sum_{k=0}^{n-1}k\cdot P(X=k)=\sum_{k=0}^{n-1}k\,{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$k\,{}_n\mathrm{C}_k=n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$（標問 **25.** 研究）

であるから

$$E(X)=\frac{n}{3^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

$$=\frac{n}{3^{n-1}}({}_{n-1}\mathrm{C}_0+{}_{n-1}\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2})$$

$$=\frac{n}{3^{n-1}}(2^{n-1}-{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})$$

$$=n\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

標問 110.　〈無限試行の確率〉

A，Bの2チームが6人制バレーボールの試合をする．6人制バレーボールでは，毎回の勝負はサーブ権をもったチームのサーブで始まり，ここで勝った方が次回のサーブ権を得る．またこのとき勝った方がサーブ権をもっていたならば1点を得点するが，サーブ権をもっていなかったならば，単にサーブ権を獲得するだけで得点はしない．いま両チーム間の各回の勝率は，サーブ側であるか否かに関係なくAは $\frac{1}{3}$，Bは $\frac{2}{3}$ であるとする．Aのサーブで試合が開始されたとして

(1)　先に1点を得点するのがAである確率を求めよ．

(2)　先に2点を得点するのがAである確率を求めよ．

（奈良女大）

解答　(1)　Aが先に1点得点する確率を a とすると

$$a=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}a$$

$$\therefore\quad a=\frac{3}{7}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \text{A（1点得点）} \\ \text{A} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \text{B} \arrow[r] & \text{A（最初の状態）}\end{tikzcd}$$

(2)　(1)よりAのサーブで試合が開始されたとき，Bが先に1点を得点する確率は $\frac{4}{7}$ である．

Bがサーブ権をとったとき，Bが先に得点する確率 b は(1)と同じく考えて

$$b=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}b\qquad\therefore\quad b=\frac{6}{7}$$

したがって，Bがサーブ権をとってAが先に得点する確率は $\frac{1}{7}$ である．

先にAが2点を得点するのは AA，ABA，BAA の順に得点するときである．求める確率は

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{87}{343}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

標問 111. 〈確率と区分求積〉

1, 2, 3, ……, n と番号のついた n 個のつぼがある．k 番のつぼには赤球 $n+k$ 個と白球 $n-k$ 個が入っている．これら n 個のつぼから無作為に1個のつぼを選び出し，そのつぼからまた無作為に1個ずつ r 回球を取り出す．ただし，取り出された球は毎回もとのつぼにもどすものとする．こうして取り出された r 個の球が，すべて赤である確率を P_n とする．

(1) P_n を求めよ．

(2) $\lim_{n\to\infty} P_n$ を求めよ．　　(山梨大)

解答 (1) k 番のつぼを選ぶ確率 $\dfrac{1}{n}$

k 番のつぼから赤球を取り出す確率 $\dfrac{n+k}{2n}$

よって，求める確率 P_n は

$$P_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{n+k}{2n}\right)^r=\frac{1}{2^r n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^r \quad \cdots\cdots(答)$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{1}{2^r}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^r$$
$$=\frac{1}{2^r}\int_0^1(1+x)^r\,dx=\frac{1}{2^r}\left[\frac{(1+x)^{r+1}}{r+1}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{r+1}\left(2-\frac{1}{2^r}\right) \quad \cdots\cdots(答)$$

研究 確率と積分の融合問題であり，

$$\underset{(和の極限)}{\lim\sum} \longrightarrow \underset{(区分求積)}{\int\cdots dx}$$

の発想がほしい．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$ を理解しておこう．

〔参考〕 関数のとり方を $y=(1+x)^r$ から $y=x^r$ に変えて

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{1}{2^r}\int_1^2 x^r\,dx$$

と変形してもよい．このとき，積分区間の変化に注意．

標問 112. 〈期待得点〉

1，2，3 の番号を書いた番号札がそれぞれ1枚ずつ合計3枚ある．また，袋の中に1から6までの整数を記入したカードがそれぞれ1枚ずつ合計6枚入っている．この袋の中からまず任意に1枚を取り出し，1の番号札の上に重ねる．次にまた任意に1枚を袋の中から取り出し，2の番号札の上に重ねる．さらに，もう1枚を任意に取り出し，3の番号札の上に重ねる．

(1) 3組とも全部番号の一致する確率を求めよ．

(2) 2組だけの番号が一致する確率を求めよ．

(3) 1組だけの番号が一致する確率を求めよ．

(4) 番号の一致した組に2点が与えられるものとするとき，与えられる得点の期待値を求めよ． (金沢大)

解答 (1) $\dfrac{1}{{}_6\mathrm{P}_3}=\dfrac{1}{120}$ ……(答)

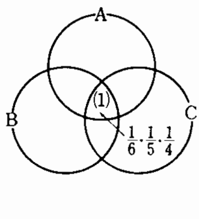
(2) $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{P}_3}=\dfrac{9}{120}=\dfrac{3}{40}$ ……(答)

(3) 一致する番号の取り方は ${}_3\mathrm{C}_1$ 通り．残りの番号を X，Y とし，カードの重ね方を考えるとき，X に Y の番号のカードがくるかどうか分けて考え

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1({}_4\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1)}{{}_6\mathrm{P}_3}=\frac{3(4+9)}{120}=\frac{13}{40}$$ ……(答)

(4) $6\times\dfrac{1}{120}+4\times\dfrac{3}{40}+2\times\dfrac{13}{40}=\dfrac{1+6+13}{20}=1$ ……(答)

研究 1，2，3 の番号札とカードの数字が一致する事象をそれぞれA，B，Cとすると，$P(\mathrm{A})=\dfrac{1}{6}$，$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{5}$ などから(1)，(2)，(3)は直ちにわかる．



(2) $3\left(\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3}{40}$

(3) $3\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{5}\times2+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{13}{40}$

標問 113. 〈漸化式・平均・分散〉

円周を6等分した点に，1から順番に6までの番号が，時計の針の進む方向につけられている．点Aは，硬貨を投げる操作により，上記の番号の上を次のように動くものとする．硬貨の表が出たら時計の針の進む方向へ1つだけ動き，裏が出たら逆の方向へ1つだけ動く．ただし，番号4の上にあるときは，表が出ても裏が出てもそこにとどまって動かない．

いま，点Aが番号1の上にある．硬貨をk回続けて投げたとき，点Aが番号 1，2，……，6 の上にある確率を，それぞれ $P_k(1)$，$P_k(2)$，……，$P_k(6)$ で表す．

(1) 任意の負でない整数nに対して，次の(i)，(ii)，(iii)が成り立つことを示せ．

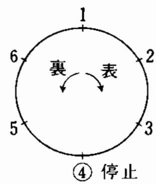
(i) $P_{2n+1}(1)=P_{2n+1}(3)=P_{2n+1}(5)=0$

(ii) $P_{2n+1}(2)=P_{2n+1}(6)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

(iii) $P_{2n+1}(4)=1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$

(2) 硬貨を5回続けて投げたとき，点Aが位置する番号を確率変数Xで表す．Xの平均と分散を求めよ． （鹿児島大）

解答 (1) (i) 奇数回目に点Aがあるのは 2，4または6であるから明らか．



(ii) $P_{2n+1}(2)=P_{2n+1}(6)$ は明らか．

$$P_{2n+1}(2)=\frac{1}{2}P_{2n-1}(2)+\frac{1}{4}P_{2n-1}(6)=\frac{3}{4}P_{2n-1}(2)$$

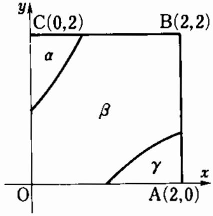
$P_1(2)=\frac{1}{2}$ より漸化式を解くと

$$P_{2n+1}(2)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

(iii) $P_{2n+1}(4)=1-\{P_{2n+1}(2)+P_{2n+1}(6)\}$ より明らか．

(2) $E(X)=2\times\frac{9}{32}+4\times\frac{7}{16}+6\times\frac{9}{32}=4$，$V(X)=E(X^2)-4^2=\frac{9}{4}$ (答)

標問 114.　〈幾何学的確率〉



座標平面上に，右図のように，正方形OABCがあり，それが2つの曲線 $y=e^x$，$y=\log x$ によって3つの領域 α，β，γ に分割されている．いま正方形内に無作為に点をとるとき，それが α または γ に含まれれば1点，β に含まれれば -1 点を与えるものとする．(ただし，境界線上は0点とする．)

各領域に点がとられる確率は，その面積に比例するものとして，次の問いに答えよ．

(1)　β の面積を求めよ．

(2)　得点の確率分布表をつくれ．

(3)　得点の平均，分散を求めよ．　　　　(奈良教育大)

解答　(1)　$y=e^x$ と $y=2$ との交点の x 座標は $x=\log 2$ ゆえ

$$\alpha \text{ の面積}=\int_0^{\log 2}(2-e^x)\,dx=\Big[2x-e^x\Big]_0^{\log 2}=2\log 2-1$$

α と γ は直線OBに関して対称で面積は等しいから

$$\beta \text{ の面積}=4-2(2\log 2-1)=6-4\log 2 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　確率分布表は右のようになる．

得点	-1	0	1
確率	$\dfrac{3-2\log 2}{2}$	0	$\dfrac{2\log 2-1}{2}$

……(答)

(3)　平均 $E(X)=(-1)\times\dfrac{3-2\log 2}{2}+1\times\dfrac{2\log 2-1}{2}$

$$=2(\log 2-1) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

分散 $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$$=\left\{(-1)^2\times\frac{3-2\log 2}{2}+1^2\times\frac{2\log 2-1}{2}\right\}-\{2(\log 2-1)\}^2$$

$$=1-4(\log 2-1)^2$$

$$=-3+8\log 2-4(\log 2)^2 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

標問 115. 〈確率密度関数〉

2つの定数 a, b は $a>0$, $0<b<1$ を満たし，確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\begin{cases} ax & (0\leqq x\leqq b) \\ \dfrac{ab}{b-1}x-\dfrac{ab}{b-1} & (b<x\leqq 1) \\ 0 & (x<0,\ x>1) \end{cases}$$

で与えられているとき，次の問いに答えよ．

(1)　ab の値を求めよ．

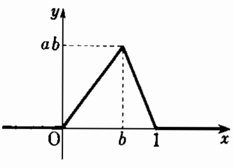
(2)　Xの平均値mを b で表せ．

(3)　$b=\dfrac{1}{3}$ のとき，直線 $y=2x+X-\dfrac{1}{3}$ が円 $x^2+y^2=\dfrac{1}{45}$ に出会う確率を求めよ．　　　（高知大）

解答　(1)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{ab}{2}$

$=1$

$\therefore\quad ab=2$　　　……(答)



(2)　$\displaystyle m=\int_0^1 xf(x)\,dx$

$\displaystyle =\int_0^b ax^2dx+\int_b^1\frac{ab}{b-1}x(x-1)\,dx$

$\displaystyle =\left[\frac{ax^3}{3}\right]_0^b+\frac{ab}{b-1}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_b^1$

$\displaystyle =\frac{ab(b+1)}{6}=\frac{b+1}{3}$　　　……(答)

(3)　直線と円が交わる条件は（直線と中心との距離）≦(半径)

ヘッセの公式より　$\dfrac{\left|X-\frac{1}{3}\right|}{\sqrt{4+1}}\leqq\dfrac{1}{\sqrt{45}}$　　$\therefore\quad 0\leqq X\leqq\dfrac{2}{3}$

$b=\dfrac{1}{3}$ であるから

求める確率$\displaystyle =\int_0^{\frac{1}{3}}6x\,dx+\frac{2}{\frac{1}{3}-1}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}(x-1)\,dx=\frac{5}{6}$　　　……(答)

標問 116.　〈二項分布〉

つぼの中に1から4までの番号を書いた球が1個ずつ合計4個入っている．つぼから無作為に1個を取り出してその番号を記録し，つぼにもどす試行を考える．

(1) この試行をくり返しn回行う．こうして得られるn個の数字のうちk個が同じ値で，残りの$(n-k)$個はそれよりも小さい値である事象をA_kとする$(1\leqq k\leqq n)$．A_kの確率$P(A_k)$を求めよ．

(2) (1)における個数kの平均$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kP(A_k)$を$E_n$とおく．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{E_n}{n}$を求めよ．　（阪　大）

解答 (1) $1\leqq k\leqq n-1$のとき，k個が4，k個が3あるいはk個が2のとき，と場合分けすると

$$P(A_k)={}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}+{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{2}{4}\right)^{n-k}+{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{4^n}(3^{n-k}+2^{n-k}+1)\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

$k=n$のとき，すべて同じ数となるのだから

$$P(A_n)=4\cdot\frac{1}{4^n}=\frac{1}{4^{n-1}}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $k\cdot{}_n\mathrm{C}_k=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$を使うと

$$E_n=\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{4^n}(3^{n-k}+2^{n-k}+1)+\frac{n}{4^{n-1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{4^n}\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}(3^{n-k}+2^{n-k}+1)+\frac{n}{4^n}\quad\left(\because\ \frac{n}{4^{n-1}}=4\frac{n}{4^n}\right)$$

$$=\frac{n}{4^n}(4^{n-1}+3^{n-1}+2^{n-1}+1)\quad(\because\ \text{二項定理})$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{E_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}(4^{n-1}+3^{n-1}+2^{n-1}+1)=\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

〔参考〕E_nは二項分布の平均の公式を利用することもできる．

標問 117. 〈正規分布〉

(1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dt}=-ky$ （kは定数）の解で $t=0$ のとき $y=5$ となるものを求めよ.

(2) (1)の解yの $t=a$ ($a>0$) における値が $y\leqq 1$ を満たすとき，k の最小値 $M(a)$ を求めよ．ただし，自然対数 $\log 5=1.6$ とする.

(3) $M(a)$ を(2)で求めたものとする．k が平均 1，分散 $\dfrac{1}{9}$ の正規分布 $\mathrm{N}\left(1,\ \dfrac{1}{9}\right)$ に従うとき，確率 $P(k\geqq M(1))$ と $P(k\geqq M(8))$ を求めよ．また，$P(k\geqq M(n))\geqq 0.95$ となる最小の整数nを求めよ．ただし，標準正規分布 N(0, 1) の確率 $\Phi(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ についての次の数表を用いよ.

z	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
$\Phi(z)$	0.419	0.445	0.464	0.477	0.486	0.492

（佐賀大）

解答 (1) $\log|y|=-kt+C$　∴ $y=\pm e^C e^{-kt}=Ae^{-kt}$

$t=0$ のとき $y=5$ となるから $A=5$　∴ $y=5e^{-kt}$　……(答)

(2) $5e^{-ka}\leqq 1$　∴ $\log 5-ka\leqq 0$

$$k\geqq\frac{\log 5}{a}=\frac{1.6}{a}\quad\therefore\quad M(a)=\frac{1.6}{a}$$ ……(答)

(3) 標準偏差 $\sigma=\dfrac{1}{3}$ ゆえ $z=\dfrac{k-1}{\sigma}=3(k-1)$ とおくと

$P(k\geqq M(1))=P(k\geqq 1.6)=P(z\geqq 1.8)=0.036$　……(答)

$P(k\geqq M(8))=P(k\geqq 0.2)=P(z\geqq -2.4)=0.992$　……(答)

また $P(k\geqq M(n))=P\left(z\geqq\dfrac{4.8}{n}-3\right)\geqq 0.95$

∴ $P\left(0\leqq z\leqq 3-\dfrac{4.8}{n}\right)\geqq 0.45,\ 1.8\leqq 3-\dfrac{4.8}{n}$　∴ $n\geqq 4$

$n=3$ では $z=1.4$ となり不適．求める最小の整数は4 ……(答)

標問 118. 〈検定〉

日本人の血液型の百分率は，O型30%，A型40%，B型20%，AB 型10%といわれている．このとき次の各問いに答えよ．

(1) まったく任意に3人選んだとき，O型，A型，B型が各1人ずつである確率は $\boxed{}$ であり，1人はA型，2人は AB 型である確率は $\boxed{}$ である．

(2) n 人からなる集団を任意に抽出するとき，n 人の中のB型である人数 X は，n が十分大きいとき平均 $m=\boxed{}$，分散 $\sigma^2=\boxed{}$ の $\boxed{}$ に従うと考えてよい．

(3) 人口1,225人のある集落 S を抽出し，B型の人数を調べたところ，211人であったという．この人数は異常であるといえるか．有意水準（危険率）5%で検定せよ． (旭川医大)

精講 (1) O，A，Bの出方は 3! 通りであるから，最初の確率は

$$3!\times0.3\times0.4\times0.2=0.144$$

A，AB，AB の出方は3通りであるから，次の確率は

$$3\times0.4\times(0.1)^2=0.012$$

(2) X は二項分布 $P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r(0.2)^r(0.8)^{n-r}$ に従うから，公式より

$$m=0.2n,\quad \sigma^2=0.2\times0.8\times n=0.16n$$

また，n が十分大きいときは X は正規分布に従うと考えてよい（これをラプラスの定理という）．

解答 (1) 0.144，0.012 ……(答)

(2) $0.2n$，$0.16n$，正規分布 ……(答)

(3) 「異常ではない」と仮定する．

$$m=0.2\times1225=245,\quad \sigma=\sqrt{0.16\times1225}=14$$

X を標準化して，有意水準5%で検定すると

$$\left|\frac{X-m}{\sigma}\right|=\left|\frac{211-245}{14}\right|$$
$$\fallingdotseq2.43>1.96$$

よって，この人数は異常であるといえる． ……(答)