1　ベクトルの和

【1】

座標空間内に4点 A$(-1,\ 2,\ 1)$，B$(-1,\ -1,\ 4)$，C$(1,\ -1,\ 1)$，D$(x,\ y,\ z)$ がある．これら4点が同一平面上にあり，かつこれらを頂点とする四角形がひし形であるのは，$(x,\ y,\ z)=\boxed{}$ のときである．

(13 立教大 経済・観光・福祉 1(8))

(解答)

2　分点公式 (1 次独立)

【2】

△OAB があり，その重心を G とし，辺 AB を 1 : 3 に内分する点を P とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{GP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{\mathrm{GP}}=\dfrac{\boxed{\text{チ}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である．

(13 同志社女大 薬 1(6))

(解答)

【3】

△ABC において，辺 AC を 3 : 2 に内分する点を D とし，線分 BD を 2 : 1 に内分する点を E とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\boxed{}$ である．また，直線 AE と辺 BC との交点を F とするとき，比 BF : FC を求めると $\boxed{}$ である．

(13 福岡大 工・薬 4)

(解答)

【4】

平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 1 : 1 に内分する点を E，辺 BC を 2 : 1 に内分する点を F，辺 CD を 3 : 1 に内分する点を G とする．線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき，比 AP : PQ を求めよ．

(13 京都大 理 1 文 2)

(解答)

【 5 】

△OAB において，辺 OA を $3:4$ に内分する点を D，辺 OB を $2:1$ に内分する点を E とする．また，t を $0<t<1$ を満たす実数とするとき，辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を P とし，線分 BD と線分 OP との交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ として，次の問いに答えなさい．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および t を用いて表しなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を a, b および t を用いて表しなさい．

(3) 点 Q が直線 AE 上にあるとき，t の値を求めなさい

(13 山口大 農・共同獣医・教育・経済 1)

(解答)

【 6 】

△ABC に対して，AB の中点を M，AC を $5:2$ に外分する点を N とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 線分 MN と BC の交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ を用いて表せ．

(2) 実数 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ に対して

$$(7t-4)\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3t\overrightarrow{\mathrm{PB}}+(10-10t)\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$$

をみたす点 P を考える．t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くときの点 P の軌跡を求めよ．

(13 愛知教大 後 2)

(解答)

【 7 】

△ABC の辺 BC を $2:1$ に内分する点を P とし，線分 AP を $(1-t):t$ $(0<t<1)$ に内分する点を Q とする．等式

$$4\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+2\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\vec{0}$$

が成り立つとき，t の値は $\boxed{④}$ である．

(13 関西大 シス・環境・化生命 2 月 2 日 4(3))

(解答)

【 8 】

s, t, u を正の実数とする．点 O を内部に含む △ABC について，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{c}$ とすると，$s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} + u\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ が成り立っている．直線 CO と線分 AB の交点を D とし，△BCO の面積を S_A，△CAO の面積を S_B，△ABO の面積を S_C とする．

(1) 面積の比 $S_A : S_B$ は，線分の長さの比 BD : AD に等しいことを示せ．

(2) 比 BD : AD を s, t, u を用いて表せ．

(3) 比 $S_A : S_B : S_C$ を s, t, u を用いて表せ．

(13 山梨大 教育人間科学・生命環境 3)

(解答)

3 内積

【 9 】

ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ を $\overrightarrow{a} = (1,\ 3)$，$\overrightarrow{b} = (3,\ 4)$，$\overrightarrow{c} = (1,\ 1)$ とする．$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積は $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \boxed{\text{ナ}}$ であり，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とすると，$\cos\theta = \boxed{\text{ニ}}$ である．また，t を実数として $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{v}$ と $\overrightarrow{c}$ が垂直ならば $t = \boxed{\text{ヌ}}$ であり，平行ならば $t = \boxed{\text{ネ}}$ である．

(13 神奈川工科大 工・創造工・情報 2(2))

(解答)

【 10 】

空間内に 4 点 A(1, 3, 2)，B(2, 2, 5)，C(x, y, -4)，D(-2, 6, z) がある．A, B, C が一直線上にあるとき，$x = -\boxed{18}$，$y = \boxed{19}$ である．また，直線 AB と直線 AD が直交するとき，$z = \boxed{20}$ である．

(13 日本大 生物資源 (獣医) 2(5))

(解答)

【 11 】

A(15, 0)，B(-9, 12)，C(-12, -9) として，三角形 ABC を考える．

このとき，重心 G の座標は $\mathrm{G}\left(\boxed{\text{オ}}\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}}\right)$，垂心 H の座標は $\mathrm{H}\left(\boxed{\text{ク}}\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$ となるので，原点を O として，O, G, H は一直線上にあり，$\overline{\mathrm{OG}} : \overline{\mathrm{GH}} = \boxed{\text{サ}} : \boxed{\text{シ}}$ となる．

(13 中部大 工 1(3))

(解答)

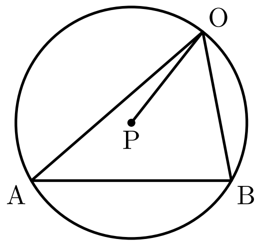
【 12 】

　OA $=3$, OB $=2$, $\angle$AOB $=60^\circ$ の三角形 OAB の外接円の中心を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ．

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{p}$ の値を求めよ．

(3) $\vec{p}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．



(13 工学院大 3)

(解答)

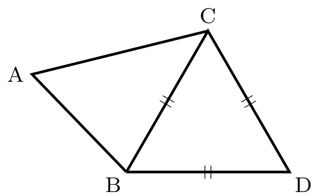
4　図形への応用

4.1　平面ベクトル

【 13 】

三角形 ABC は，3 辺の長さがそれぞれ AB $=3$, BC $=\sqrt{13}$, CA $=4$ である．辺 BC を共有する正三角形 CBD が三角形 ABC の外側にあるとき，

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である．



(13 東邦大 医 13)

(解答)

【 14 】

　OA $=a$, OB $=b$, AB $=c$ である三角形 OAB の内心を P，外心を Q とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表されることを示せ．

(2) $a=4$, $b=5$, $c=6$ とし，P から辺 OB へ下ろした垂線を PH とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ の大きさを求めよ．

(3) $a=4$, $b=5$, $c=6$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の大きさを求めよ．

(13 静岡大 後 工・情報 6)

(解答)

【 15 】

半径 1 の外接円をもつ三角形 ABC の外心を O とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく．$2\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ．

(2) 辺 AB，AC の長さをそれぞれ求めよ．

(3) $\angle\mathrm{BAC} = \theta$ とおく．$\cos\theta$ の値を求めよ．

(13 奈良女大 理 1)

(解答)

【 16 】

平面上において，原点 O と 2 点 A(1, 1)，B(2, 1) に対して，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を考える．定数 s と t が条件 $s \geqq 0$，$t \geqq 0$，$1 \leqq s + t \leqq 2$ をみたしながら変わるとき，点 P の描く図形の面積を求めよ．さらに内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の最大値と最小値も求めよ．

(13 信州大 後 医 3(1))

(解答)

【 17 】

平面上に 3 点 O, A, B があり，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1$ をみたしている．このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \boxed{\text{エ}}$ である．

また，実数 s，t が条件 $1 \leqq s + 3t \leqq 3$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ をみたしながら動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定められた点 P の存在する範囲の面積は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(13 東京慈恵医大 1(2))

(解答)

【 18 】

xy 平面上に 4 点 O(0, 0)，A(−1, 2)，B(2, 1)，P(u, v) がある．点 P が

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cos\alpha + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\sin\beta \quad (\text{ただし}, 0 \leqq \alpha \leqq \pi,\ 0 \leqq \beta \leqq \pi)$$

を満たすとき，点 P の存在する領域を図示せよ．

(13 信州大 教育 3)

(解答)

【 19 】

O を原点とする座標平面に点 A(2, 1) と点 B(1, −2) をとる．実数 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ に対して点 P は $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たすものとする．次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

(2) θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす値をとって変化するとき，点 P の軌跡を求めよ．

(3) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の最大値と，そのときの θ の値を求めよ．

(13 同志社大 理工 2 月 10 日 2)

(解答)

【 20 】

2 直線

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 6$$
$$x\sin\theta - y\cos\theta = 8$$

の交点を P(θ) とおく．このとき，次の問に答えなさい．

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ を A とおくと A の座標は $\left(\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}},\ \boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}\right)$ である．

(2) 点 P(θ) の座標 $(x,\ y)$ を θ で表すと

$$x = \boxed{オ}\cos\theta + \boxed{カ}\sin\theta$$
$$y = \boxed{キ}\sin\theta - \boxed{ク}\cos\theta$$

である．

(3) θ が $\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{4}$ を動くとき，点 P(θ) の軌跡は中心 $\left(\boxed{ケ},\ \boxed{コ}\right)$，半径 $\boxed{サシ}$ の円の一部 (円弧) を動き，その円弧の長さは $\boxed{ス}\pi$ である．

(4) 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ を B，点 P(θ) を P とおく．このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の内積は

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = \boxed{セソタ}\left(\boxed{チ} - \sqrt{\boxed{ツ}}\sin\theta\right)$$

である．また，θ が $\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{4}$ を動くとき，この内積が最小となる点 P の座標は $\left(\boxed{テ},\ \boxed{ト}\right)$ である．

(13 東北薬大 2)

(解答)

4.2　空間ベクトル

【 21 】

平行四辺形 ABCD を底面とする四角錐(すい) OABCD を考える．線分 OB の中点を B$'$，線分 OC を $1:2$ に内分する点を C$'$ とし，A，B$'$，C$'$ を通る平面と直線 OD の交点を D$'$ とする．また，$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ で表せ．
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD'}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の何倍か．
(3) 三角錐 AOB$'$D$'$ の体積は，三角錐 AOBD の体積の何倍か．
(4) 四角錐 OAB$'$C$'$D$'$ の体積は，四角錐 OABCD の体積の何倍か．

(13 大阪教育大 3)

(解答)

【 22 】

四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=2$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つとする．辺 AB の中点を M，辺 OC を $1:2$ に内分する点を P とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ を $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ を用いて表せ．
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ の内積を求めよ．また，$\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ の大きさを求めよ．
(3) $\triangle$ABP の面積を求めよ．

(13 芝浦工大 2 月 1 日 2)

(解答)

【 23 】

4 点 A$(0,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 1)$，C$(-1,\ -1,\ 2)$，D$(2,\ 3,\ 1)$ を頂点とする三角錐 (四面体) ABCD がある．

(1) 三角形 BCD の面積を求めよ．
(2) 三角錐 ABCD の体積を求めよ．

(13 日本獣医生命科大 2)

(解答)

【 24 】

空間において，2 点 A$(0,\ 1,\ 0)$，B$(-1,\ 0,\ 0)$ を通る直線を ℓ とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 P を ℓ 上に，点 Q を z 軸上にとる．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ がベクトル $(3,\ 1, -1)$ と平行になるときの P と Q の座標をそれぞれ求めよ．

(2) 点 R を ℓ 上に，点 S を z 軸上にとる．$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ およびベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ の両方に垂直になるときの R と S の座標をそれぞれ求めよ．

(3) R, S を (2) で求めた点とする．点 T を ℓ 上に，点 U を z 軸上にとる．また，$\overrightarrow{v} = (a,\ b,\ c)$ は零ベクトルではなく，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ に垂直ではないとする．$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ が $\overrightarrow{v}$ と平行になるときの T と U の座標をそれぞれ求めよ．

(13 神戸大 理 1 文 1)

(解答)

【 25 】

点 A$(1,\ 0,\ 1)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{n} = (2,\ 1,\ -1)$ に垂直な平面 α を考える．

(1) 平面 α 上の点 P$(x,\ y,\ z)$ に関して $2x + y - z = 1$ が成り立つことを示せ．

(2) 平面 α に関して点 B$(3,\ 2,\ 1)$ と対称な点 C の座標を求めよ．

(3) 点 B と点 Q$(1,\ 4,\ 5)$ と平面 α 上の点 R が正三角形の 3 頂点となるとき，点 R の座標を求めよ．

(13 津田塾大 情報科学 3)

(解答)

【 26 】

原点を O とする座標空間に 3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 3)$ がある．

(1) $\triangle$ABC の面積を求めよ．

(2) A，B，C の定める平面を α とする．O から α に下ろした垂線と α との交点を H とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

を満たすような実数 $s,\ t$ の値を求めよ．また，H の座標を求めよ．

(3) 四面体 OABC に内接する球の半径 r を求めよ．

(13 南山大 情報理工 2)

(解答)

【 27 】

空間内に 3 点 A(5, 0, 0)，B(0, 3, 0)，C(3, 6, 0) がある．次の問いに答えよ．

(1) 点 P を P(x, y, z) とおくとき，$2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ を成分で表せ．

(2) 点 P が $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$ を満たしながら動くとき，点 P は，ある球面上にあることを示せ．また，その球面の中心 Q の座標と半径 r を求めよ．

(3) △ABC の面積 S を求めよ．

(4) 点 P が (2) で求めた球面上を動くとき，四面体 PABC の体積 V の最大値を求めよ．ただし，4 点 P，A，B，C が同一平面上にあるときは $V=0$ とする．

(13 関西学院大 理工 2 月 3 日 3)

(解答)