1　等差・等比

【 1 】

第 50 項が 2013，第 500 項が 213 である等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，$S_n = \boxed{(ウ)}$ である．また S_n が最大となるような n の値は $n = \boxed{(エ)}$ である．

(13 慶應大 看護医療 1(2))

(解答)

【 2 】

初項 50，公差 -3 の等差数列 $\{a_n\}$ がある．このとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{20} |a_k| = \boxed{セソタ}$ である．

(13 同志社女大 薬 1(5))

(解答)

【 3 】

初項 $a_1 = 1$，公差 $\dfrac{2}{3}$ の等差数列 $\{a_n\}$ がある．数列 $\{a_n\}$ の項のうち，値が整数となる項を小さい方から順に並べてできる数列は等差数列をなし，初項は $\boxed{ア}$，公差は $\boxed{イ}$ となる．したがって 49 以下の a_n のうち整数とならない項の総和は $\boxed{ウ}$ となる．

次に初項 $b_1 = 2$，公差 $\dfrac{3}{2}$ の等差数列 $\{b_n\}$ を考える．2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通に含まれる項を，小さい方から順に並べてできる数列を $\{c_n\}$ とすると，数列 $\{c_n\}$ は等差数列となり，初項は $\boxed{エ}$，公差は $\boxed{オ}$ となる．

(13 同志社大 文情 (理系)・生医・スポ 1(1))

(解答)

【 4 】

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ．

$$7,\ 67,\ 667,\ 6667,\ 66667,\ \cdots$$

(13 静岡文芸大 デザイン 8)

(解答)

【 5 】

数列 $\{a_n\}$ を初項 2，公比 2 の等比数列，数列 $\{b_n\}$ を初項 2，公差 2 の等差数列とし，$c_n = a_n b_n$ とする．

(i) $a_{10} = \boxed{\text{ア}}$ である．

(ii) $b_n = a_{10}$ のとき，$n = \boxed{\text{イ}}$ である．

(iii) 数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$S_n = 4\left\{2^n\left(\boxed{\text{ウ}}\right) + 1\right\}$ である．

(13 早稲田大 国際教養 1(1))

(解答)

【 6 】

n を 1 以上の整数とし，θ を $0 < \theta < 2\pi$ を満たす定数とする．数列 $\{a_n\}$ が $a_n = \cos(n\theta)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で与えられるとき，次の問いに答えよ．

(1) $p,\ q,\ r$ がこの順に等比数列となるとき，q^2 を p と r を用いて表せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が等比数列となるような θ の値を全て求めよ．

(3) 1 以上の全ての整数 n に対して $a_{n+3} = a_n$ が成り立つような θ の値を全て求めよ．

(13 同志社大 文情 (理系)・生医・スポ 2)

(解答)

【 7 】

n は自然数とする．数列 $\{a_n\}$ を初項 2，公差 4 の等差数列とし，数列 $\{b_n\}$ を初項 1，公比 x の等比数列とする．ただし，$x \fallingdotseq 1$ とする．

(1) 一般項 a_n，b_n を求めよ．また，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ とするとき，S_n を求めよ．

(2) $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kb_k$ とする．$T_n = \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $x = \dfrac{1}{3}$ のとき，和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ を求めよ．

(13 徳島大 後 工・総合科 3)

(解答)

2　和の計算

【 8 】

数列 1, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + 4 + 5, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7, $\cdots$ の初項から第 n 項までの和を n を用いて表すと $\boxed{\text{オ}}$ となる.

(13 立教大 理 (数・物・化・生命理) 1(3))

(解答)

【 9 】

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2013} \frac{1}{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} j}$ を求めよ.

(13 岡山県大 情報工 3(1))

(解答)

【 10 】

数列 $\{a_n\}$ が, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 3$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められるとき, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ を求めよ.

(13 東京電機大 1(3))

(解答)

【 11 】

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とするとき,

$$S_n = \frac{1}{3} - (n+2)a_n$$

を満たすとする.

(1) a_1 の値は $\boxed{\text{ア}}$ である.

(2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を n の式で表すと $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \boxed{\text{イ}}$ である.

(3) $\dfrac{a_n}{a_1}$ を n の式で表すと $\dfrac{a_n}{a_1} = \boxed{\text{ウ}}$ である.

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{\text{エ}}$ である.

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n}$ の値は $\boxed{\text{オ}}$ である.

(13 九州産大 情報・工 4)

(解答)

【 12 】

次の各問に答えよ．(2) は空欄にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で与えられている．このとき，和 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を求めよ．また，S_n は

$$S_n - S_{n-1} = (1 - 2S_{n-1})(1 - 2S_n) \quad (n = 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすことを示せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の和 $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ が

$$(*) \qquad T_n - T_{n-1} = (1 - 2T_{n-1})(1 - 2T_n) \quad (n = 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たしている．もし，$T_1 = \dfrac{1}{2}$ ならば，$(*)$ で $n = 2$ ととれば，$T_2 = T_1 = \dfrac{1}{2}$ となる．同様に，$(*)$ で $n = 3,\ 4,\ \cdots$ ととれば，$T_n = \dfrac{1}{2}$ $(n = 3,\ 4,\ \cdots)$ となる．

いま，$T_n \fallingdotseq \dfrac{1}{2}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．このとき，$U_n = 1 - 2T_n$ とおくと，U_n は漸化式 $\boxed{(ア)}$ を満たす．よって，$\dfrac{1}{U_1} = c\ (\fallingdotseq 0)$ とおけば，U_n は n と c を用いて，$U_n = \boxed{(イ)}$ と表せる．これより，$b_1 = \boxed{(ウ)}$，$b_n = \boxed{(エ)}$ が得られ，b_n が (1) の a_n と一致するのは $c = \boxed{(オ)}$ のときである．

(13 早稲田大 政経 2)

(解答)

【 13 】

xy 座標平面上で，x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という．$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x + 2y \leqq 100$ を同時に満たす格子点の個数は $\boxed{\text{B}}$ である．

(13 大阪薬大 1(2))

(解答)

3　群数列

【 14 】

自然数を 1 から順に並べ，第 n 群が 3^{n-1} 個の自然数を含むように分割する．例えば，第 1 群は $\{1\}$ であり，第 2 群は $\{2,\ 3,\ 4\}$ である．次の問いに答えよ．

$$\{1\},\ \{2,\ 3,\ 4\},\ \{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13\},\ \cdots$$

(1) 第 n 群の最初の数を求めよ．
(2) 第 n 群に含まれるすべての自然数の和を求めよ．
(3) 6^{20} は第何番目の群に含まれるか．
　　ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(13 県立広島大 経営情報・生命環境 2)

(解答)

【 15 】

次のような群にわかれた数列がある．

$$(1),\ (2,\ 4),\ (5,\ 7,\ 9),\ (10,\ 12,\ 14,\ 16),\ \cdots$$

(第 2 群の初項は第 1 群の末項に 1 を加えたものとし，第 3 群の初項は第 2 群の末項に 1 を加えたものとする．以下同様に第 n 群の初項は第 $n-1$ 群の末項に 1 を加えたものとする．第 n 群は公差 2，項数 n の等差数列である．)

このとき次の問に答えよ．

(1) 第 n 群に含まれる項の総和は $\boxed{\text{カ}}n^3 + \boxed{\text{キ}}n^2 + \boxed{\text{ク}}n$ である．
(2) 第 1 群から第 n 群に含まれるすべての項の総和は

$$\frac{1}{\boxed{\text{ケ}}}\left(\boxed{\text{コ}}n^4 + \boxed{\text{サ}}n^3 + \boxed{\text{シ}}n^2 + \boxed{\text{ス}}n\right)$$

　　である．

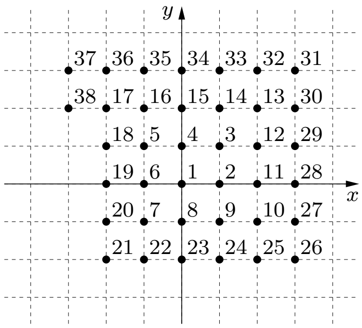
(13 早稲田大 人間科学 A2)

(解答)

【 16 】

座標平面上の点 $(x,\ y)$ は，$x,\ y$ がともに整数のとき格子点という．

原点 $(0,\ 0)$ に番号 1 をふり，以下 $(1,\ 0)$ に番号 2，$(1,\ 1)$ に番号 3 と，各格子点に図のように反時計まわりに番号をふっていく．このとき，次の問に答えよ．



(1) n が自然数のとき，格子点 $(n,\ -n)$ にふられる番号を n の式で表せ.

(2) n が自然数のとき，格子点 $(n+1,\ n+1)$ にふられる番号を n の式で表せ.

(3) 番号 1000 がふられる格子点の座標を求めよ.

(13 香川大 医 3)

(解答)

4　数学的帰納法

【 17 】

自然数 n について

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ．

(13 福岡教大 小教 (数学) 1(2))

(解答)

【 18 】

すべての自然数 n に対し，次の等式

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つことを，n についての数学的帰納法を用いて示せ．

(13 明治大 総合数理 4)

(解答)

【 19 】

すべての自然数 n に対して，$2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}$ が 5 の倍数であることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(13 徳島大 総合科 5(2))

(解答)

【 20 】

数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ は，すべての項が正で，$\dfrac{y_n}{x_n} \leqq \dfrac{y_{n+1}}{x_{n+1}}$ の関係を満たしている．x_1 から x_n までの和を X_n で，また y_1 から y_n までの和を Y_n で表す．このとき次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{Y_1}{X_1} \leqq \dfrac{Y_2}{X_2}$ を示せ．

(2) $\dfrac{Y_n}{X_n} \leqq \dfrac{y_n}{x_n}$ であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) (2) の不等式を使って，$\dfrac{Y_n}{X_n} \leqq \dfrac{Y_{n+1}}{X_{n+1}}$ であることを証明せよ．

(13 青山学院大 経済 4)

(解答)

5　漸化式

【 21 】

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 4$ で定められている．一般項を求めると $a_n = \boxed{\text{セ}}$ である．また，数列 $\{b_n\}$ は $b_1 = 1,\ b_{n+1} = 2b_n + 8$ で定められている．一般項を求めると $b_n = \boxed{\text{ソ}}$ である．

$c_n = a_n + b_n$ とおくとき数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めると $S_n = \boxed{\text{タ}}$ である．

(13 神戸薬大・5)

(解答)

【 22 】

(1) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 5a_n - 4 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定める．数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $b_n = \dfrac{n!}{a_n - 1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定める．$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ を n を用いて表せ．

(3) b_n を最小とするような n の値をすべて求めよ．

(13 津田塾大 数学 3)

(解答)

【 23 】

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 9, \quad a_{n+1} = 6a_n + 3^{n+3} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えなさい．

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと，$b_{n+1} = \boxed{29}b_n + \boxed{30}$ である．

(2) $c_n = b_n + 9$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと，数列 $\{c_n\}$ は初項$\boxed{31}\boxed{32}$，公比$\boxed{33}$の等比数列である．

(3) $a_n = \boxed{34}^{n+1} - \boxed{35}^{n+2}$

(13 日本大 生物資源 (獣医) 4)

(解答)

【 24 】

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = 2a_n + n^2$$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(2) a_n を n の式で表せ．

(13 熊本大 教育・医 (保看)4・理・医 (保技) 1)

(解答)

【 25 】

条件 $a_1 = -4,\ a_2 = 0,\ a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(13 年 奈良県医大 医 15)

(解答)

【 26 】

次の $\boxed{}$ にあてはまる答を解答欄 (省略) に記入しなさい．

数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 0$ と第 2 項 $a_2 = -1$ の値をとり，漸化式

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 3^{n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たす数列であるとする．$b_n = a_{n+1} - a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義された b_n を使って書き直した数列 $\{b_n\}$ に注目すると，その初項は $b_1 = \boxed{\mathbf{a}}$ となり，数列 $\{b_n\}$ が満たす漸化式は $\boxed{\mathbf{b}}$ となる．続いて，$c_n = \dfrac{b_n}{3^n}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義された c_n を使って書き直した数列 $\{c_n\}$ に注目すると，その初項は $c_1 = \boxed{\mathbf{c}}$ となり，数列 $\{c_n\}$ が満たす漸化式は $\boxed{\mathbf{d}}$ となる．**d** で求めた漸化式を満たす数列 $\{c_n\}$ の一般項 c_n を求めると，$c_n = \boxed{\mathbf{e}}$ である．したがって，数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n は $b_n = \boxed{\mathbf{f}}$ と表され，最終的に数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は $a_n = \boxed{\mathbf{g}}$ と求められる．

(13 明治薬大 4)

(解答)

【 27 】

2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が

$$a_1 = 2,\ b_1 = 2,\ a_{n+1} = 6a_n + 2b_n,\quad b_{n+1} = -2a_n + 2b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められるとき, 次の問いに答えよ.

(1) $c_n = a_n + b_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ.
(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.
(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ.

(13 岩手大 工 2)

(解答)

【 28 】

自然数 n に対して，有理数 a_n，b_n を $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^n = \dfrac{a_n + b_n\sqrt{3}}{2}$ によって定める.

(1) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ.
(2) $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列となるような実数 k の値を求めよ.
(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(13 昭和薬大 薬 3)

(解答)

6　応用

【 29 】

次の空欄 $\boxed{\text{コ}}$ から $\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるもの (数・式など) を解答用紙 (省略) の所定の欄に記入せよ．

A と B を数直線上の異なる 2 点とする．点 P はこの 2 点 A，B のいずれかの上にあり，1 回の操作で次のように動く．

- 点 P が A 上にあるときは，$\dfrac{1}{3}$ の確率で B に移り，$\dfrac{2}{3}$ の確率で A にとどまる．
- 点 P が B 上にあるときは，$\dfrac{1}{4}$ の確率で A に移り，$\dfrac{3}{4}$ の確率で B にとどまる．

操作を 1 度もしていない時点では点 P は A 上にあるとする．操作を n 回おこなった後に点 P が A 上にある確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) $p_1 = \boxed{\text{コ}}$，$p_2 = \boxed{\text{サ}}$ である．

(2) p_{n-1} を用いて p_n を表すと $p_n = \boxed{\text{シ}}$ となる．

(3) 数列 $\{p_n\}$ の一般項は $p_n = \boxed{\text{ス}}$ となる．

　したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = \boxed{\text{セ}}$ である．

(13 明治大 総合数理 3)

(解答)

【 30 】

点 P は数直線上を動くものとする．1 個のさいころを投げて，奇数の目が出たときには P は正の向きに 1 だけ進み，偶数の目が出たときには P は正の向きに 2 だけ進む．n を自然数とする．さいころを続けて投げて，出発点から P が進んだ距離が n 以上になったら，そこでさいころを投げるのをやめるものとする．このときに，出発点から P が進んだ距離がちょうど n である確率を a_n とする．また，$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) a_1，a_2，a_3 を求めよ．

(2) a_{n+2} を a_{n+1}，a_n を用いて表せ．

(3) b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(4) b_n，a_n を求めよ．

(13 大阪市大 文系 4)

(解答)

【 31 】

正四面体 ABCD を考える．点 P は，時刻 0 では頂点 A にあり，1 秒ごとに，今いる頂点から他の 3 頂点のいずれかに，等しい確率で動くとする．n を 0 以上の整数とし，点 P が n 秒後に A, B, C, D にある確率を，それぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $n \geqq 1$ に対し $q_n = r_n = s_n$ となることを数学的帰納法で証明せよ．
(2) $n \geqq 1$ に対し p_n，q_n を p_{n-1}，q_{n-1} で表せ．ただし，$p_0 = 1$，$q_0 = 0$ とする．
(3) $c_n = p_n - q_n$ とおいて c_n の一般項を求めよ．
(4) p_n の一般項を求めよ．

(13 三重大 医 3)

(解答)