1　直線

【 1 】

xy 平面において，点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

である．これを証明せよ．

(13 大阪大 文系 1)

(解答)

【 2 】

座標平面上に，3 直線 $l_1: y=x+1$, $l_2: y=2x$, $l_3: y=ax+b$ がある．l_1 と l_2 が l_3 に関して対称であるとき，定数 a と b の値を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

(13 北海学園大 工 2(3))

(解答)

【 3 】

xy 座標平面上に点 A$(0,\ 5)$ と点 B$(8,\ 2)$ をとる．x 軸上に点 P を，A, B からの距離の和 AP + BP が最小になるようにとるとき，P の x 座標を求めなさい．

(13 日本大 医 1(3))

(解答)

【 4 】

次の問いに答えよ．

(1) 2 つの x の 1 次関数 $y=ax+b$ と $y=cx+d$ があるとき，そのグラフが互いに直交する必要十分条件を導け．

(2) 放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 O$(-1,\ 1)$，A$\left(a,\ a^2\right)$ に対して，この放物線上のもう一点 B$\left(b,\ b^2\right)$ で $\angle$OBA が直角になるものが存在する a の条件を与えよ．

(3) 放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 O$(-1,\ 1)$，A$\left(a,\ a^2\right)$ に対して，この放物線上の点をもう一点とり，直角三角形を作ることを考える．直角三角形が 4 つできる a の条件を与えよ．

(13 順天堂大 医 3)

(解答)

【5】

a, b, c は実数とし，$a<b$ とする．平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ が，辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする．次の問いに答えよ．

(1) a を b, c を用いて表せ．

(2) $b-a \geqq 2$ が成り立つことを示せ．

(3) 斜辺 AB の長さの最小値と，そのときの A, B, C の座標をそれぞれ求めよ．

(13 神戸大 文系 2)

(解答)

2 円

【6】

2 点 $(-1,\ 0)$，$(3,\ 2)$ を通る半径が $\sqrt{10}$ の円は，中心の座標が $\left(\boxed{\text{ス}},\ \boxed{\text{セ}}\right)$ のものと $\left(\boxed{\text{ソ}},\ \boxed{\text{タ}}\right)$ のものがある．

(13 北九州市大 国際環境工 2(2))

(解答)

【7】

a は実数とする．xy 平面上の円 $x^2-2ax+y^2-4y+a^2-1=0$ があり，直線 $3x+ay=0$ と交わり，その交点の間の距離が 2 である．このときの a の値を求めよ．

(13 奈良県医大 医 8)

(解答)

【8】

円 $x^2+y^2-2x-y+1=0$ と直線 $2x-y-1=0$ の 2 つの交点と原点を通る円の中心は $\left(\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}}\right)$ で半径は $\boxed{\text{ク}}$ である．

(13 徳島文理大 薬 1(4))

(解答)

【 9 】

座標平面上に，原点 O を中心とする半径 5 の円 C，点 A(0, 7)，点 B(1, 6) が与えられている．点 P$(\alpha,\ \beta)$ を中心とし，2 点 A，B を通る円を C(P) として，以下の問に答えよ．

(1) α, β の満たすべき条件を求めよ．
(2) 2 円 C, C(P) が共有点をもつための条件を α のみを用いて表せ．

(13 防衛医大 2)

(解答)

【 10 】

次の問に答えよ．

(1) 点 P$(-1,\ 3)$ を通り，円 $x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式を求めよ．
(2) 点 C$(-1,\ 2)$ を中心とし，直線 $y=-\dfrac{1}{3}x-1$ に接する円の方程式を求めよ．

(13 静岡文芸大 デザイン 5)

(解答)

【 11 】

中心 A(1, 1), 半径 1 の円を C とする．原点を通り円 C と異なる 2 点 P，Q で交わる直線を ℓ とする．P，Q における円 C の 2 本の接線が直交するとき，次の問に答えよ．

(1) △APQ の面積 S を求めよ．
(2) 直線 ℓ の傾きを求めよ．
(3) 2 本の接線の交点 R の座標を求めよ．

(13 早稲田大 社会科学 2)

(解答)

3　軌跡・通過領域

【 12 】

座標平面上で点 O(0, 0) からの距離と点 A$(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ からの距離の比が $2:1$ である点 P$(x,\ y)$ の軌跡を求めよ．

(13 鳥取大 後 工 1)

(解答)

【 13 】

a を正の定数とする．次の方程式で表される円 C_1 と放物線 C_2 がある．

$$C_1 : (x-2a)^2+y^2=a^2,\quad C_2 : y=\frac{2}{5a^2}x^2+1$$

C_1 の中心を P，C_2 の頂点を Q とし，

$$\mathrm{PR}^2-\mathrm{QR}^2=a^2-1$$

を満たす点 R の軌跡を C_3 とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) C_3 を表す方程式を求めよ．

(2) C_1 と C_3 が共有点をもつとき，C_2 と C_3 は共有点をもたないことを示せ．

(13 和歌山大 教育・経済・観光・システム工 3)

(解答)

【 14 】

円 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$ と，直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ の 2 つの交点と円上の任意の点によりできる三角形の重心の軌跡を求めなさい．

(13 愛知学院大 薬・歯 3)

(解答)

【 15 】

媒介変数表示

$$\begin{cases} x=4\cos^2\theta \\ y=4\cos\theta\sin\theta \end{cases}$$

の表す円の方程式，および中心の座標と半径を求めよ．

(13 東京都市大 工・知識工 1(3))

(解答)

【 16 】

座標平面において，点 $(0,\ 5)$ を通り，直線 $y=x$ と点 $(a,\ a)$ で接する円 C について，次の問いに答えよ．

(1) 点 $(0,\ 5)$ と直線 $y=x$ と点 $(a,\ a)$ がかかれているとき，コンパスと目盛りのない定規を用いて，円 C を作図する手順を説明せよ．

(2) 円 C の方程式を求めよ．

(3) 円 C の中心の座標を $(s,\ t)$ とするとき，

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(s+t),\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(-s+t)$$

とおく．このとき，a の値が変化するときの点 $(x,\ y)$ の軌跡を座標平面に図示せよ．

(13 高知大 医・理 1)

(解答)

【 17 】

xy 平面上の 3 点 $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(-b,\ a)$，$\mathrm{C}\big(a^2-b^2,\ 4ab\big)$ を考える．ただし，a，b はそれぞれ $a>0$，$b>0$，$a+b=1$ を満たす任意の実数である．次の問いに答えよ．

(1) a，b が条件を満たしながら動くとき，点 C が描く図形を図で示せ．

(2) $\angle\mathrm{ACB}=\theta$ とおくとき，θ を最小にする a の値を求めよ．

(3) 三角形 ABC の面積を最大にする a の値を求めよ．

(13 名古屋市大 経済 4)

(解答)

【 18 】

座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 2)$ をとる．m を実数とし，直線 $y=mx$ を l とする．以下の問いに答えよ．

(1) l 上の点 P の座標を $(t,\ mt)$ とするとき，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ を t，m を用いて表せ．

(2) 点 P が l 上を動くとき，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ を最小にする P の座標を $(X,\ Y)$ とおく．X，Y を m で表せ．

(3) m が実数全体を動くとき，$(X,\ Y)$ はある曲線 C 上を動く．C の方程式を求めよ．

(13 中央大 理工 3)

(解答)

【 19 】

xy 平面上に，原点 O を中心とする半径 1 の円 C と，点 (4, 3) を中心とする半径 1 の円 D がある．円 C 上に異なる 2 点 A，B があり，円 D 上に点 P がある．2 つの直線 AP，BP は円 C の接線とする．直線 AB と直線 OP の交点を Q とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 P の座標を (5, 3) とするとき，直線 AB の方程式を求めよ．
(2) 上記 (1) のとき，点 Q の座標を求めよ．
(3) 点 P が円 D の円周上を動くとき，点 Q の軌跡が点 $\left(\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{8}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{24}$ の円となることを示せ．

(13 京都府大 生命環境 1)

(解答)

【 20 】

r を正の実数とする．xy 平面上の点 A$(0,\ r)$ を中心とする半径 r の円を C とする．点 B$\left(0,\ -\dfrac{2}{r+2}\right)$ から C に傾きが正の接線を引き，接点を P とする．r がすべての正の実数を動くとき，P の軌跡を図示せよ．

(13 横浜国大 後期 経済・経営 6)

(解答)

【 21 】

a は 0 でない定数とし，b と c を定数とする．k がすべての実数を動くとき，xy 平面上の直線 $l : y = kx + k^2 + 3k + 1$ はつねに放物線 $C : y = ax^2 + bx + c$ に接するものとする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) a，b，c の値を求めなさい．
(2) 直線 l と放物線 C の接点を P とするとき，原点 O と点 P を結ぶ線分 OP の中点 Q$(s,\ t)$ の軌跡の方程式を求めなさい．

(13 首都大学東京 都市教養 (文系) 4)

(解答)

【 22 】

座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，$x=4(1-2\sin^2\theta)$，$y=8\sin\theta\cos\theta$ とし，点 P を中心とする半径 1 の円 C を考える．以下の設問 (1)〜(4) に答えよ．各設問とも，解答とともに導出過程も記述せよ．

(1) $\theta=0$ の場合，原点 O から円 C に 2 本の接線を引いたとき，この 2 本の接線のなす角を α とする．ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする．このときの $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ と $\tan\alpha$ の値を求めよ．

(2) 点 P の x 座標と y 座標を $\sin 2\theta$ または $\cos 2\theta$ を用いて表せ．

(3) θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，点 P の軌跡を求めよ．

(4) 点 P が (3) で求められた軌跡をたどったとき，円 C が通過してできた図形の面積を求めよ．

(13 秋田県大 システム科技 2)

(解答)

【 23 】

x 軸上の点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ と y 軸上の点 $\mathrm{Q}(0,\ 2)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 線分 PQ の垂直二等分線の方程式を求めよ．

(2) 点 P が x 軸上を動くとき，線分 PQ の垂直二等分線が通過する領域を求め，図示せよ．

(13 福岡教大 後 初教 (数学) 3)

(解答)

【 24 】

平面上に，原点 O，点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，点 $\mathrm{B}(0,\ 1)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{OAB}$ がある．辺 OA 上の動点 P と，辺 OB 上の動点 Q は，線分 PQ が $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を 2 等分するように動く．線分 PQ が通る点の全体からなる領域を図示せよ．

(13 一橋大 後 経済 3)

(解答)

4　不等式の表す領域

【 25 】

次の問に答えなさい.

(1) 2 つの変数 x, y をもつ関数 $f(x,\ y)$ を $f(x,\ y)=\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{|x-y|}{2}$ と定める. x, y が実数の値であるとき, $f(x,\ y)=x$ は $x \geqq y$ であるための必要十分条件であることを示しなさい.

(2) 方程式 $x^2+y^2-1+|x^2+y^2-1|=0$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を図示しなさい.

(13 兵庫県大 経済・経営 1)

(解答)

【 26 】

不等式

$$1 \leqq \big||x|-2\big|+\big||y|-2\big| \leqq 3$$

の表す領域を xy 平面上に図示せよ.

(13 大阪大 理系 2)

(解答)

【 27 】

連立不等式

$$y \geqq |x^2-2x|,\ y \leqq -x+6,\ |x| \leqq 2$$

の表す座標平面上の領域を D とする.

(i) D の面積は $\boxed{\text{キ}}$ である.

(ii) $(x,\ y)$ が D を動くとき, $4x+y$ の最大値は $\boxed{\text{ク}}$, 最小値は $\boxed{\text{ケ}}$ である.

(13 上智大 経済 (経営)2 月 6 日 1(3))

(解答)

【 28 】

連立不等式 $\begin{cases} y \geqq |2x-3| \\ y \leqq x \end{cases}$ の表す領域を D とする.

(1) 領域 D を図示しなさい.

(2) a を 2 でない正の定数とする. 点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき, $ax+y$ の最大値と最小値およびそのときの点 $(x,\ y)$ を求めなさい.

(3) 点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき, x^2+y^2 の最小値とそのときの点 $(x,\ y)$ を求めなさい.

(13 大分大 工・教育福祉科学・経済 2)

(解答)