平均値の定理から Taylor の定理へ

1　平均値の定理

平均値の定理を確認しておこう．

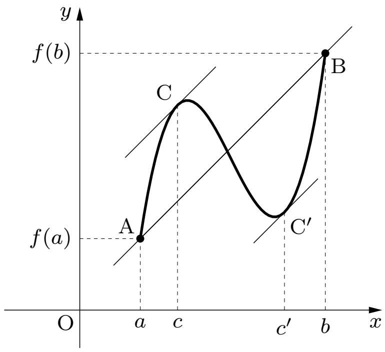
平均値の定理 (Lagrange)

関数 $f(x)$ が閉区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続で，開区間 $a < x < b$ で微分可能ならば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad (a < c < b)$$

を満たす実数 c が少なくとも 1 つ存在する．

この定理は図形的には，曲線 $y = f(x)$ 上に 2 点 A$(a,\ f(a))$，B$(b,\ f(b))$ をとると，線分 AB と平行な接線が引けるような点 C が A，B 間の曲線上に存在するということである．



証明は Rolle の定理を用いる．

Rolle の定理

関数 $F(x)$ が閉区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続で，開区間 $a < x < b$ で微分可能で，$F(a) = F(b)$ ならば

$$F'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

を満たす実数 c が少なくとも 1 つ存在する．

この定理の証明は認めることにして，平均値の定理の証明に入る．

まず，Rolle の定理の条件を満たす関数として $F(a) = F(b)$ となる関数 $F(x)$ をつくる．x を与えたときの曲線上の点 $(x,\ f(x))$ と直線 AB 上の点 $(x,\ m(x-a)+f(a))$ の y 座標の差を考える．すなわち

$$F(x) = f(x) - \{m(x-a) + f(a)\}$$

とする．ここで m は直線 AB の傾きで $m = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ である．定義から，当然

$$F(a) = F(b) (= 0)$$

である．計算して確かめておこう．

$$F(a) = f(a) - m(a-a) - f(a) = 0$$

$$F(b) = f(b) - m(b-a) - f(a) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) - f(a) = 0$$

$f(x)$ は閉区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続で，開区間 $a < x < b$ で微分可能であるから，$F(x)$ も閉区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続で，開区間 $a < x < b$ で微分可能である．$F(x)$ は Rolle の定理の条件をすべて満たしているから

$$F'(c) = 0 \ (a < c < b) \text{ を満たす実数 } c \text{ が少なくとも 1 つ存在する．}$$

ここで

$$F'(x) = f'(x) - m$$

であるから

$$F'(c) = 0 \iff m = f'(c) \iff \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

以上により，平均値の定理は成り立つ．

- $F(a)=F(b)$ であればいいので

$$F(x)=f(x)-mx+ma-f(a)$$

における定数項 $ma-f(a)$ を削除して，$F(x)$ として

$$F(x)=f(x)-mx=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$

を用いてもよい．

解析概論 (高木貞治) では，次のようにして $F(x)$ を定義している．

『 $F(x)=f(x)-Ax$ と置いて $F(a)=F(b)$ になるように，定数 A を定めることができる．すなわち

$$f(a)-Aa=f(b)-Ab \text{ から } A=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$』

式を変形して，平均値の定理を次のように表すこともできる．

平均値の定理 (1)

関数 $f(x)$ が閉区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続，開区間 $a<x<b$ で微分可能ならば

$$f(b)=f(a)+f'(c)(b-a) \quad (a<c<b)$$

を満たす実数 c が少なくとも 1 つ存在する．

さらに，$b-a=h$ (x の増分)，$\dfrac{c-a}{b-a}=\theta$ (比率) とおくと

$$c=a+\theta h, \quad 0<\theta<1$$

であり，平均値の定理 (1) は次のようにも表すことができる．

平均値の定理 (2)

関数 $f(x)$ が閉区間 $a \leqq x \leqq a+h$ で連続，開区間 $a<x<a+h$ で微分可能ならば

$$f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)h \quad (0<\theta<1)$$

を満たす実数 θ が少なくとも 1 つ存在する．

次に積分の平均値の定理にも触れておこう．まずは，次の定理を示そう．これは高校で学ぶ積分の平均値の定理の拡張になっており，後程使うことになる．

積分の平均値の定理の拡張

関数 $f(x)$, $\varphi(x)$ が閉区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続で，$\varphi(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で符号を変えない ($\varphi(x) \geqq 0$ または $\varphi(x) \leqq 0$) ならば

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx \quad (a<c<b)$$

を満たす実数 c が少なくとも 1 つ存在する．

$\varphi(x) \geqq 0$ のときを示すことにしよう．

$f(x)$ の区間 $a \leqq x \leqq b$ における最大値，最小値をそれぞれ M, m とすると，$a \leqq x \leqq b$ を満たす任意の x に対して

$$m \leqq f(x) \leqq M$$

である．$\varphi(x) \geqq 0$ より ($\varphi(x) \leqq 0$ のときは不等号の向きに注意すると同じように証明できる)

$$m\varphi(x) \leqq f(x)\varphi(x) \leqq M\varphi(x)$$
$$\therefore\quad m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leqq M\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

また，$\varphi(x) \geqq 0$ より $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx \geqq 0$ である．

$\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$ のとき，任意の x $(a \leqq x \leqq b)$ に対して $\varphi(x) = 0$ である．このとき

$$(\text{左辺}) = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x) \times 0\,dx = 0$$
$$(\text{右辺}) = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx = f(c) \times 0 = 0$$

であり，任意の c $(a < c < b)$ に対して定理は成り立つ．

$\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx \neq 0$ のとき，$\displaystyle\int_a^b \varphi(x) > 0$ であり

$$m \leqq \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx} \leqq M$$

である．中間値の定理より

$$f(c) = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx} \quad (a < c < b)$$

を満たす c が少なくとも 1 つ存在する．すなわち

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx \quad (0 < \theta < 1)$$

を満たす実数 c が少なくとも 1 つ存在する．

- この証明の中で連続関数についての 2 つの定理が使われている．どちらも実数の連続性に関わる定理であり，大学 (の数学科) で扱われる内容です．ここでは「関数が連続」とは「グラフはつながっている」ことだというイメージをもって，これらは正しいと認めておきましょう．

最大値・最小値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続ならば，$f(x)$ は閉区間 $a \leqq x \leqq b$ で最大値と最小値をとる．

中間値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続で，$f(a) \neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して

$$f(c) = k \quad (a < c < b)$$

を満たす実数 c が少なくとも 1 つ存在する．

- 特に，$\varphi(x)=1$ のとき

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx=\int_a^b dx=\Big[1\Big]_a^b=b-a$$

であり，この定理は次のように表すことができます．これを通常は平均値の定理と呼んでいます．

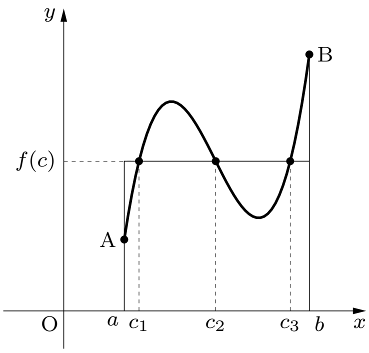
積分の平均値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)\quad (a<c<b)$$

を満たす実数 c が少なくとも 1 つ存在する．

図形的には，左辺の定積分は曲線 $y=f(x)(>0$ とする$)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$, b で囲まれた図形の面積であり，右辺は縦の長さ $f(c)$, 横の長さ $(b-a)$ の長方形の面積と考えられる．この 2 つの面積が等しくなる長方形の縦の長さ $f(c)$ を与える点 $x=c$ が開区間 $a<x<b$ に必ず存在するというのが本定理である．



(1) $f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数とする．このとき，$\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=f(c)$, $a \leqq c \leqq b$ となる c が存在することを示せ．

(2) $y=\sin x$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と $y=1$ および y 軸が囲む図形を，y 軸のまわりに回転して得られる立体を考える．この立体を y 軸に垂直な $n-1$ 個の平面によって各部分の体積が等しくなるように n 個に分割するとき，$y=1$ に最も近い平面の y 座標を y_n とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(1-y_n)$ を求めよ．

99 年 京都大学 後期 理系 6

(1) 略　(2) $1-\dfrac{8}{\pi^2}$

2　Taylor の定理

それでは本題に入っていきましょう．関数 $f(x)$ を級数展開することが目標です．すなわち

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

と表すことが目標です.

まず，関数 $f(x)$ は n 回微分可能なものとする．平均値の定理 (2)(以後，これを平均値の定理と呼ぶことにする) において $\theta = \theta_1$ とすると

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta_1 h)h \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす θ_1 $(0 < \theta_1 < 1)$ が少なくとも 1 つ存在する．ここで，$f'(a+\theta_1 h)$ に対し平均値の定理を用いると

$$f'(a+\theta_1 h) = f'(a) + f''(a+\theta_2\theta_1 h)\theta_1 h \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たす θ_2 $(0 < \theta_2 < 1)$ が少なくとも 1 つ存在する．②を①に代入すると

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \{f'(a) + f''(a+\theta_2\theta_1 h)\theta_1 h\}h \\ &= f(a) + f'(a)h + f''(a+\theta_2\theta_1 h)\theta_1 h^2 \qquad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

である．$f''(a+\theta_2\theta_1 h)$ に対し平均値の定理を用いると

$$f''(a+\theta_2\theta_1 h) = f''(a) + f'''(a+\theta_3\theta_2\theta_1 h)\theta_2\theta_1 h \qquad \cdots\cdots ④$$

を満たす θ_1 $(0 < \theta_3 < 1)$ が少なくとも 1 つ存在する．④を③に代入すると

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\theta_1 h^2 + f'''(a+\theta_3\theta_2\theta_1 h)\theta_2(\theta_1)^2h^3$$

である．これを n 回微分が現れるまで繰り返すと

$$\begin{aligned} f(a+h) =&f(a) + f'(a)h + f''(a)\theta_1 h^2 + f'''(a)\theta_2(\theta_1)^2h^3 + \cdots \\ &\cdots + f^{(n)}(a+\theta_n\cdots\theta_3\theta_2\theta_1 h)\theta_{n-1}(\theta_{n-2})^2\cdots(\theta_1)^{n-1}h^n \end{aligned}$$

である．ここで登場する θ_1，$\cdots$，θ_n は h が与えられると決まる値であるから，h を固定すると定数である．c_2，c_3，$\cdots$，c_n を定数として $f(a+h)$ は

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)c_2h^2 + f'''(a)c_3h^3 + \cdots + f^{(n)}(a+\theta h)c_nh^n$$

と表すことができる．ここで $\theta(=\theta_{n-1}(\theta_{n-2})^2\cdots(\theta_1)^{n-1})$ は h によって決まる $0 < \theta < 1$ を満たす値である．$a+h = x$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) =&f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)c_2(x-a)^2 + f'''(a)c_3(x-a)^3 + \cdots \\ &\cdots + f^{(n)}(a+\theta(x-a))c_n(x-a)^n \end{aligned}$$

である．c_2，c_3，$\cdots$，c_n を求めよう．$f(x)$ を n 回微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(a) + 2f''(a)c_2(x-a) + 3f'''(a)c_3(x-a)^2 + \cdots \\ &\qquad \cdots + nf^{(n)}(a+\theta(x-a))c_n(x-a)^{n-1} \\ f''(x) &= \qquad 2f''(a)c_2 + 3\cdot 2f'''(a)c_3(x-a) + \cdots \\ &\qquad \cdots + n(n-1)f^{(n)}(a+\theta(x-a))c_n(x-a)^{n-2} \\ f'''(x) &= \qquad 3!f'''(a)\cdot c_3 + \cdots \\ &\qquad \cdots + n(n-1)(n-2)f^{(n)}(a+\theta(x-a))c_n(x-a)^{n-3} \\ &\cdots \\ f^{(n-1)}(x) &= \quad (n-1)!c_{n-1} + n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2f^{(n)}(a+\theta(x-a))c_n(x-a) \\ f^{(n)}(x) &= \qquad n!f^{(n)}(a+\theta(x-a))c_n \end{aligned}$$

であり，各式において $x=a$ とすると

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= f'(a) \\
f''(a) &= 2f''(a)c_2 && \therefore \quad c_2 = \frac{1}{2} \\
f'''(a) &= 3!f'''(a)c_3 && \therefore \quad c_3 = \frac{1}{3!} \\
&\cdots \\
f^{n-1}(a) &= (n-1)!f^{(n-1)}(a)c_{n-1} && \therefore \quad c_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \\
f^{n}(a) &= n!f'(a)c_n && \therefore \quad c_n = \frac{1}{n!}
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(a)+f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\
\cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n
\end{aligned}
$$

である．

Taylor の定理が得られた．

Taylor の定理 (1)

$f(x)$ はある区間において n 回まで微分可能な関数とする．a がある区間の定点で，x が任意の点であるとき

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(a)+f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\
\cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n
\end{aligned}
$$

である．ただし $0<\theta<1$ である．

$a+\theta(x-a)$ は a と x の間 (両端の a, x は除く) の値であり，$\dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ は Lagrange の剰余項と呼ばれている．

もう一つ Taylor の定理の別証明を示しておこう．

$f(x)$ はある区間において n 回微分可能で $f^{(n)}(x)$ は連続な関数とする．

まず定積分の定義より

$$
f(b)-f(a) = \Big[f'(t)\,dt\Big]_a^b = \int_a^b f'(t)\,dt
$$

である．次にこれを部分積分する．このとき $\displaystyle\int 1\,dt = -(b-t)+C$ (C は積分定数) であることに注意するとすると

$$
\begin{aligned}
&f(b)-f(a)\\
=&\Big[1\cdot f'(t)\,dt\Big]_a^b\\
=&\Big[-(b-t)f'(t)\Big]_a^b+\int_a^b(b-t)f''(t)\,dt\\
=&(b-a)f'(a)+\left\{\left[-\frac{(b-t)^2}{2}f''(t)\right]_a^b+\int_a^b\frac{(b-t)^2}{2}f'''(t)\,dt\right\}\\
=&(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(a)\\
&\qquad+\left\{\left[-\frac{(b-t)^3}{3!}f'''(t)\right]_a^b+\int_a^b\frac{(b-t)^3}{3!}f^{(4)}(t)\,dt\right\}\\
=&(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(a)+\frac{(b-a)^3}{3!}f'''(a)\\
&\qquad+\left\{\left[-\frac{(b-t)^4}{4!}f^{(4)}(t)\right]_a^b+\int_a^b\frac{(b-t)^4}{4!}f^{(5)}(t)\,dt\right\}\\
=&\cdots\\
=&(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(a)+\frac{(b-a)^3}{3!}f'''(a)+\cdots\\
&\quad\cdots+\left\{\left[-\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(t)\right]_a^b+\int_a^b\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt\right\}\\
=&(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(a)+\frac{(b-a)^3}{3!}f'''(a)+\cdots\\
&\quad\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt
\end{aligned}
$$

$b=x$ とおくと

$$
\begin{aligned}
f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots\\
\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt
\end{aligned}
$$

Taylor の定理 (2)

$f(x)$ はある区間において n 回まで微分可能で $f^{(n)}(x)$ は連続な関数とする．a がある区間の定点で，x が任意の点であるとき

$$
\begin{aligned}
f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots\\
\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt
\end{aligned}
$$

である．

Taylor 展開したときの剰余項 R_n は積分で表すと

$$
R_n=\int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt
$$

である．

Taylor の定理において，$f(x)$ が ∞ 回微分可能で，区間内のすべての x について

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

ならば

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n}(x-a)^n + \cdots \qquad \cdots\cdots ①$$

として，$f(x)$ は無限級数の形で表すことができる．これを Taylor 級数という．特に，$a = 0$ のときの無限級数

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n}x^n + \cdots \qquad \cdots\cdots ②$$

を Maclaurin 級数と呼ばれている．これは解析学の重要な結果である．

- 剰余項 $\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt$ と Lagrange の剰余項 $\displaystyle\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ が一致することを確かめておこう．

  $a \leqq t \leqq x$ より $(x-t)^{n-1} \geqq 0$ である．積分の平均値の定理の拡張より

  $$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\,dt \quad (a < c < x)$$

  を満たす c が少なくとも 1 つ存在する．積分を実行すると

  $$\int_a^x (x-t)^{n-1}\,dt = \left[-\frac{(x-t)^n}{n}\right]_a^x = \frac{(x-a)^n}{n}$$

  であり，c は $c = a + \theta(x-a)$ $(0 < \theta < 1)$ と表すことができるから

  $$\begin{aligned}\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt &= \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!} \times \frac{(x-a)^n}{n} \\ &= \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n\end{aligned}$$

  示された．

3　応用

(例 1) $f(x)$ が n 次の多項式のとき，$f^{(n+1)}(x)=0$ より，任意の x に対し

$$R_n=\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n=0$$

であり，Taylor 級数①は $f(x)$ の $(x-a)$ による n 次の展開式を与える．

$a,\ b,\ c,\ d$ を定数とし，

$$a(x+2)^3+b(x+2)^2+c(x+2)+d=2x^3-x^2-3x+4$$

がどのような x の値に対しても成り立つとする．このとき，

$$a=\boxed{ア},\ b=\boxed{イ},\ c=\boxed{ウ},\ d=\boxed{エ}$$

である．

15 年 大阪経大 (推薦)

【解答】 恒等式の頻出問題．数学 II までの範囲で解くなら (解法 1)，(解法 2) があります．
(解法 1) 左辺を展開して係数比較する．
(解法 2) 4 つの値を代入し必要条件として $a,\ b,\ c,\ d$ を求め，十分であることを確かめる．

$$a=2,\ b=-13,\ c=25,\quad d=-10 \qquad \cdots\cdots(答)$$

が得られる．ここでは Taylor 級数①を用いた解答を示しておく．
(解法 3) $f(x)=2x^3-x^2-3x+4$ とおくと，$f(-2)=-10$

$$\begin{aligned}
f'(x)&=6x^2-2x-3 &&\text{より}\quad f'(-2)=25\\
f''(x)&=12x-2 &&\text{より}\quad f''(-2)=-26\\
f'''(x)&=12 &&\text{より}\quad f'''(-2)=12
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
f(x)&=f(-2)+f'(-2)(x+2)+\frac{f''(-2)}{2}(x+2)^2+\frac{f'''(-2)}{3!}(x+2)^3\\
&=-10+25(x+2)+\frac{-26}{2}(x+2)^2+\frac{12}{3!}(x+2)^3\\
&=2(x+2)^3-13(x+2)^2+25(x+2)-10
\end{aligned}$$

- Taylor 級数①を意識しなくても，微分を繰り返すことにより $a,\ b,\ c,\ d$ を求めることはできます．
  　まず，与えられた等式において，$x=-2$ を代入し，d を決め，
  次に，等式を微分し，$x=-2$ を代入して，c を決める．
  さらに，等式を微分し，$x=-2$ を代入して，b を決める．
  もう一度等式を微分し，$x=-2$ を代入して，a を決める，でもいいですね．

(例 2) e^x の級数展開

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)}$$

$f(x) = e^x$ とおくと，すべての n に対して $f^{(n)}(x) = e^x$ であり，$f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ であるから，Taylor の定理 (1) において $a = 0$ とすると

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

であり

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n = \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n \quad (0 < \theta < 1)$$

である．ここで

$$|R_n| = \frac{e^{\theta x}}{n!}|x^n| \leqq \frac{e^x}{n!}|x|^n \quad (\text{等号成立は } x = 0 \text{ のときのみ})$$

任意の x に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$ が成り立つ (証明は下記参照) から

$$\lim_{n\to\infty} |R_n| = 0$$

よって，任意の x に対して

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

が成り立つ．

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$ の証明

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{1}\frac{|x|}{2}\frac{|x|}{3}\frac{|x|}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{|x|}{n}$$

k を $k > 2|x|$ を満たす自然数とすると，$\dfrac{|x|}{k} < \dfrac{1}{2}$ であり

$$\begin{aligned}
\frac{|x|^n}{n!} &= \frac{|x|}{1}\frac{|x|}{2}\frac{|x|}{3}\frac{|x|}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{|x|}{k}\frac{|x|}{k+1}\frac{|x|}{k+2}\cdot\cdots\cdot\frac{|x|}{n} \\
&< \frac{|x|}{1}\frac{|x|}{2}\frac{|x|}{3}\frac{|x|}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{|x|}{k}\frac{|x|}{k}\frac{|x|}{k}\cdot\cdots\cdot\frac{|x|}{k} \\
&< \frac{|x|}{1}\frac{|x|}{2}\frac{|x|}{3}\frac{|x|}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{|x|}{k}\underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}}_{n-k\text{ 個}} \\
&= \frac{|x|^k}{k!}\frac{1}{2^{n-k}} \\
&= \frac{|x|^k 2^k}{k!}\frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

$\dfrac{|x|^k 2^k}{k!}$ は n に無関係な値であるから

$$0 < \frac{|x|^n}{n!} < \frac{|x|^k 2^k}{k!}\frac{1}{2^n} \to 0 \ (n \to 0)$$

ハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$$

である．

(例 3) $\sin x$，$\cos x$ の級数展開

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$f(x) = \sin x$ とおくと

$$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x,\ f^{(5)}(x) = \cos x,\ \cdots$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos x & (n \text{ が奇数のとき}) \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \sin x & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

$$\therefore \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

Taylor の定理 (1) において $a = 0$ とおくと

$$\begin{aligned} \sin x &= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + \cdots + R_n \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots + R_n \end{aligned}$$

である．n は奇数としてよいから

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \theta x}{n!} x^n \quad (0 < \theta < 1)$$

ここで

$$|R_n| = \frac{|\cos \theta x|}{n!} |x^n| \leqq \frac{|x|^n}{n!}$$

任意の x に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$ が成り立つから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} |R_n| = 0$

よって，任意の x に対して

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots$$

が成り立つ．

同様にして，任意の x に対して

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots$$

である．

- 実は (例 2)，(例 3) は複素数の世界でも成り立つ．$x = i\theta$ とすると

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - + \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i \sin\theta \end{aligned}$$

この等式は Euler の公式と呼ばれている．指数関数と三角関数が複素数の世界では等式としてつながっているわけです．特に，$\theta = \pi$ とすると，1，i，π，e の間の美しい関係式

$$e^{i\pi} = -1$$

が得られます．

(例 4) Newton の二項定理

> α が正の整数でないとき
> $$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots$$
> $$\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots \quad (-1<x<1)$$

$f(x)=(1+x)^\alpha$ とおくと

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\ f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},\ f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3},\ \cdots$$

であり

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$\displaystyle\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ とおくと

$$(1+x)^\alpha = 1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+R_n$$

である．剰余項 R_n の評価は級数論の準備が必要である．結論をかくと

$$|x|<1 \text{ ならば } \lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

であり

$$(1+x)^\alpha = 1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\cdots$$

が成り立つ．

- 実は，α の値により x の範囲は微妙に変わる．
$$\begin{aligned} \alpha \text{ が整数以外の正の実数のとき} &\quad -1 \leqq x \leqq 1, \\ -1<\alpha<0 \text{ のとき} &\quad -1 < x \leqq 1, \\ \alpha \leqq -1 \text{ のとき} &\quad -1<x<1 \end{aligned}$$
  といった具合である．
- α が自然数 m であれば，$m+1$ 回微分すると任意の x に対して $f^{(m+1)}(x)=0$ であり，Taylar 展開は $m+1$ 個の和として表すことができる．すなわち
$$(1+x)^m = 1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\cdots+\binom{m}{m}x^m$$
  である．ここで
$$\binom{m}{k}=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}=\frac{m!}{(m-k)!k!}$$
  であり，高校の教科書では，最後の式 $\dfrac{m!}{(m-k)!k!}$ は組合せ ${}_m\mathrm{C}_k$ として表記している．
$$(1+x)^m = {}_m\mathrm{C}_0+{}_m\mathrm{C}_1x+{}_m\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_m\mathrm{C}_mx^m$$
  である．したがって，これは高校で学ぶ二項定理そのものである．このときの x は任意である．