2016年度 後期 数学XH §2
演習

16年10月30日 (日)

目 次

A　ベクトル

(201)　角の二等分線と垂直二等分線の交点

問題文は教材を参照してください.

角の二等分線，垂直二等分線をベクトルで扱えるかを問う問題です.

角の二等分線については，平面幾何の定理による分点公式の利用，ひし形の対角線は内角の二等分線になっていることの利用といった 2 つの扱い方があります.

垂直二等分線は内積の利用ですね.

演習 (201-1) 平面上に $\mathrm{OA}=4$，$\mathrm{AB}=9$，$\mathrm{OB}=7$ となるような $\triangle\mathrm{OAB}$ があり，$\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線と辺 AB の交点を C とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値を求めよ.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が平行になるような実数 k を求めよ.

(3) (2) の結果を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ.

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ の値を求めよ.

(16 宇都宮大学 教育・工・地域デザイン・農学部 2)

演習 (201-2) 4 点 O，A，B，C が同一平面上にある．3 点 O，A，B は，$\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=3:2$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$ を満たすとする．点 C が線分 OA の垂直二等分線と線分 OB の垂直二等分線の交点であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ.

(16 富山県立大学 工学部 1)

(202)　内積の計算，1 次独立

問題文は教材を参照してください．

(1)，(2) により $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{0}$ は △ABC が正三角形であるための必要十分条件であることが分かります．

(1) 内積で表されている係数を整理 (計算) してみましょう．正三角形というキツイ条件より各係数が等しいということが分かります．

(2) どこから手を付けるか？平面上のベクトルは 1 次独立な 2 つのベクトルですべて表すことができます．$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の始点をそろえることから始めましょう．

演習 (202-1) △ABC に対し $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{\mathrm{CA}}$ として

$$\overrightarrow{p} = |\overrightarrow{a}|\overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|\overrightarrow{c} + |\overrightarrow{c}|\overrightarrow{a}$$

によってベクトル $\overrightarrow{p}$ を定めるとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{0}$ は △ABC が正三角形であるための必要十分条件であることを証明せよ．

(2) $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a}$ かつ $|\overrightarrow{p}| = 4$ のとき，$\cos\angle\mathrm{ABC}$ の値を求めよ．

(16 東京海洋大学 海洋科学部 4)

(203)　1 次独立，直線と平面の交点

問題文は教材を参照してください.

空間内のすべての点は 1 次独立な 3 つのベクトルで表すことができます．本問では F を始点とした $\overrightarrow{\mathrm{FA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{FB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{FC}}$ がこれにあたります.

(1) 分点公式の確認です.

(2) 直線 BC と平面 EFP の交点を求めています．1 次独立なベクトルによる表現の一意性を用います．すなわち，係数を比較します.

(3) 辺 BC と平面 EFP が交わるための条件を求めています．直線 BC ではなく，辺 BC となっていることから直線を表すパラメータ u に条件が付きます.

演習 (203-1) a を実数とし，空間に 5 点

$$\mathrm{A}(6,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{B}(0,\ 6,\ 0),\quad \mathrm{C}(0,\ 0,\ 3),$$
$$\mathrm{P}(2a,\ 0,\ 2a+1),\quad \mathrm{Q}(0,\ 2a,\ 2a-1)$$

をとる.

(1) 線分 PQ が三角形 ABC の辺または内部と共有点をもつ a の範囲を求めよ.

(2) (1) の共有点と原点との距離の最小値と，そのときの a の値を求めよ.

(14 東北大学 後期 理学部 2)

(204)　内積の定義，ベクトルのなす角

問題文は教材を参照してください.

(1) は分点公式，(2) は内積の定義の確認です.

四面体 OABC の条件と $\cos\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{5}{6}$ から，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = a$ とすると

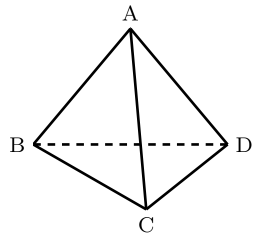
$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|,\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|,\ |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

が a を用いて表すことができ

$$\cos\angle\mathrm{COH} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{PH}}|}$$

の値を求めることができます.

演習 (204-1) 1 辺の長さが $a\ (>0)$ の正 4 面体を考え，その頂点をそれぞれ A，B，C，D とする.



また，辺 AD の中点を P，辺 BC の中点を Q とする．このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を求めよ $\boxed{(3)}$.

(15 横浜市立大学 医学部 1(3))

演習 (204-2) 空間に 5 点 O(0, 0, 0)，A(a, 0, 0)，B(b, c, 0)，C(d, e, 4)，T(d, e, t) があり，このうちの 4 点 O, A, B, C が正四面体の頂点になっているとする．ただし，a, b, c, d, e はいずれも正の実数で，$0 < t < 4$ とする.

(1) a, b, c, d, e の値を求めよ.

(2) $\cos\angle\mathrm{OTA}$ を t を用いて表せ.

(3) $\angle\mathrm{OTC} = \angle\mathrm{OTA}$ となるときの t の値を求めよ．また，そのときの $\cos\angle\mathrm{OTA}$ の値と三角形 OTA の面積を求めよ.

(16 お茶の水女子大学 理・文教育・生活科学部 2)

(205)　正射影ベクトル

問題文は教材を参照してください.

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ への正射影ベクトルです．すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

です．正射影ベクトルは準公式として覚えておくのは良いことですが，これを導きながら使うという姿勢も大切です.

演習 (205-1) 座標空間における直方体 ABCD–EFGH において，点 A，B，C，D の座標をそれぞれ (0, 0, 2)，(2, 0, 2)，(2, 4, 2)，(0, 4, 2)，点 E，F，G，H の座標をそれぞれ (0, 0, 0)，(2, 0, 0)，(2, 4, 0)，(0, 4, 0) とする．また，線分 AD を $s : (1-s)$ に内分する点を I，線分 FG を $t : (1-t)$ に内分する点を J とする．ただし，$0 < s < 1$，$0 < t < 1$ である．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 線分 AJ と平面 BEI の交点を P とし，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ をそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ としたとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$，s，t で表せ.

(2) 平面 BEI に対して垂直なベクトルを求めよ．ただし，その x 成分は 1 とする.

(3) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ が平面 BEI に対して垂直となるとき，s を t で表せ.

(15 九州大学 後期 工学部 1)

(206)　四面体の体積

問題文は教材を参照してください．

四面体の体積は $\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ) であり，高さは頂点から対面に下ろした垂線の足 H を

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

として $\alpha,\ \beta$ を求めることから始めることになる．底面積については問題の設定にもよるが一般には

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}$$

を使うことになるだろう．(206) では 2 辺の長さと狭角が与えられているから，$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\angle\mathrm{AOB}$ をストレートに使えば良い．

演習 (206-1) 以下の問いに答えよ．

(1) 空間内に 3 点 O，A，B があるとき，△OAB の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}$$

で与えられることを示せ．

(2) 空間内の 3 点 A(1, 0, $-$1)，B(1, 1, 0)，C($-$1, 2, 0) が与えられている．O は原点とする．3 点 O，A，B を含む平面に対し，C からおろした垂線の足を H とするとき，H の座標を求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積 V を求めよ．

(15 広島大学 後期 理学部 (数学) 1)

演習 (206-2) 四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{c}$ とおき，$|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{c}|=1$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=2$，$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\dfrac{4}{3}$，$\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=\dfrac{4}{3}$ を満たすとする．点 C から平面 OAB に垂線を下ろし，平面 OAB の交点を H とする．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ を用いて表せ．

(2) 四面体 OABC の体積 V を求めよ．

(3) 辺 BC の中点を M とし，線分 AM を 4 : 1 に内分する点を N とする．このとき，直線 CH と直線 ON が交わることを示せ．また，その 2 直線の交点を P とするとき，CP : PH を求めよ．

(16 山梨大学 工・生命環境学部 2)

(207)　2 直線の位置関係

問題文は教材を参照してください.

異なる 2 点 A，B が与えられると直線 AB が決まります．直線 AB 上の点を P とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad (t \text{ は実数})$$

と表すことができ，A は直線の通過点，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は方向ベクトルを表しています．直線のベクトル方程式が使えるようになっていなければいけません．

(1) は 2 直線が「ねじれの位置」にあることを示すのですから，2 直線の共有点はない，かつ，2 直線は平行でないことを示します．

(2) は与えられた 2 直線 AB，CD に垂直に交わる直線を求めることが第 1 の作業です．それぞれの直線上に点 P，Q をとり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

となる点 P，Q を求めましょう．

演習 (207-1) O を原点とする座標空間に 3 点 A(2, 1, 2)，B(1, 0, 3)，C(0, 1, 1) がある．実数 t を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表される点 P について，点 P が xy 平面上にあるとき，$t = \boxed{(\text{エ})}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直であるとき，$t = \boxed{(\text{オ})}$ である．

(15 芝浦工業大学 工・システム理工・デザイン工学部 1(3))

演習 (207-2) 座標空間内に

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(1,\ 2,\ 2),\ \mathrm{B}(1,\ 0,\ -1),\ \mathrm{C}(2,\ -1,\ 1)$$

を頂点とする四面体 OABC がある．$t > 0$ に対して半直線 OB 上の点 P を OB : OP $= 1 : t$ となるようにとる．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を t を用いて表せ．

(2) $\triangle$APC の面積を $S(t)$ とおく．$S(t)$ が最小になる t の値と，そのときの $S(t)$ の値を求めよ．

(3) 点 Q は直線 OB 上にあり，点 R は直線 AC 上にある．線分 QR の長さの最小値と，そのときの点 R の座標を求めよ．

(16 名古屋工業大学 3)

(208)　平面の方程式

問題文は教材を参照してください.

互いに異なる 3 点 L，M，N が与えられると平面 LMN が決まります．平面 LMN 上の点を P とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OL}} + s\overrightarrow{\mathrm{LM}} + t\overrightarrow{\mathrm{LN}} \quad (s,\ t \text{ は実数})$$

と表すことができます．これにより，平面を点 L を通り，$\overrightarrow{\mathrm{LM}}$ 方向，$\overrightarrow{\mathrm{LN}}$ 方向の 2 つの広がり (2 次元) をもった図形としてみることができます.

s，t に次のような条件を付加したときの P の描く図形を説明できるようにしておきましょう.

(i) $s+t=1$ のとき，P は直線 MN 上を動く.

(ii) $s+t=1$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ のとき，P は線分 MN 上 (両端も含む) を動く.

(iii) $s+t \leqq 1$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ のとき，P は三角形 LMN の周および内部を動く.

演習 (208-1) 空間上の 3 点を A(0, 1, 3)，B(−1, 3, 2)，C(1, 2, −1) とする．この 3 点を通る平面上に D(a, b, −1) があるとき，a と b の関係式を求めよ.　(16 札幌医科大学 1(1))

演習 (208-2) 空間において，3 点 A(5, 0, 1)，B(4, 2, 0)，C(0, 1, 5) を頂点とする三角形 ABC がある．以下の問いに答えよ.

(1) 線分 AB，BC，CA の長さを求めよ.

(2) 三角形 ABC の面積 S を求めよ.

(3) 原点 O(0, 0, 0) から平面 ABC に垂線を下ろし，平面 ABC との交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = l\overrightarrow{\mathrm{AB}} + m\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくとき，実数 l，m の値を求めよ.

(4) 直線 AH と直線 BC の交点を M とする．$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = k\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ とおくとき，実数 k の値と三角形 HBC の面積 T を求めよ.

(5) 原点 O を頂点，四角形 ABHC を底面とする四角錐(すい)O–ABHC の体積 V を求めよ.

(16 長崎大学 経済・環境科・水産・教育学部 2)

(209)　球面と直線

問題文は教材を参照してください.

直線 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と球面を連立すると t についての 2 次方程式が得られます．このとき
t が異なる 2 つの実数解をもつとき，直線と球面は 2 点で交わる.
t が重解をもつとき，直線と球面は接する.
t が虚数解をもつとき，直線と球面は共有点をもたない.

演習 (209-1) 座標空間内に 3 点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1) をとり，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}$ の内積が 0 になるような点 P$(x,\ y,\ z)$ の集合を S とする．3 点 A，B，C を通る平面を α とするとき，次の問いに答えよ.

(1) 集合 S は球面であることを示し，その中心 Q の座標と半径 r の値を求めよ.
(2) 原点 O から最も遠い距離にある S 上の点の座標を求めよ.
(3) (1) で求めた点 Q は，平面 α 上にあることを示せ.
(4) (1) で求めた点 Q を通って平面 α に垂直な直線を ℓ とする．球面 S と直線 l のすべての共有点について，その座標を求めよ.

(15 岡山大学 理系 2)

演習 (209-2) 座標空間内に，原点 O(0, 0, 0) を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点 A(0, 0, 1)，B(0, 0, -1) がある．O と異なる点 P$(s,\ t,\ 0)$ に対し，直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする．さらに直線 BQ と xy 平面の交点を R$(u,\ v,\ 0)$ とする．このとき以下の問いに答えよ.

(1) ふたつの線分 OP と OR の長さの積を求めよ.
(2) s を u, v を用いて表せ.
(3) l は xy 平面内の直線で，原点 O を通らないものとする．直線 l 上を点 P が動くとき，対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ.

(16 岡山大学 教育・理・工・環境理工・農・医・歯・薬学部 4)

(210)　球と平面

問題文は教材を参照してください.

接点 P は O から平面 ABC に下した垂線の足です．球面，平面という言葉が問題文に登場しますが，内容は垂線の足を求め，垂線の長さの最小値を求めるものです．ベクトルというより，計算力の問題として対応しましょう．

演習 (210-1) 空間において，同一平面上にない 4 点を O，A，B，C とする．線分 OA，OB を 2 辺とする平行四辺形を OADB，線分 OA，OC を 2 辺とする平行四辺形を OAEC，線分 OB，OC を 2 辺とする平行四辺形を OBFC とする．下の問いに答えよ．

(1) △ODE を含む平面と直線 AF の交点を G とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(2) $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=x$ とする．点 O を中心とし，点 G を含む球面と △ABE を含む平面の交わりで得られる円の半径の最小値とそのときの x の値を求めよ．

(16 東京学芸大学 2)

演習 (210-2) 空間内の 2 点 A(4, −2, 2)，B(2, −4, 4) に対して，線分 AB を直径とする球 S の中心を C とする．

(1) 球 S の方程式を求めよ．

(2) xy 平面と平行な平面 α のうち S と α が交わってできる円の半径が最大となるような α の方程式を求めよ．

(3) 原点 O から最も近い S 上の点 D，および最も遠い点 E の座標をそれぞれ求めよ．

(4) (2) で求めた α と S が交わってできる円上を動く点 P に対して，△CDP の面積を最大とする P の座標をすべて求めよ．ただし，D は (3) で求めた点である．

(16 愛媛大学 理・工・教育・農学部 5)

解答はここにあります．http://kamelink.com/print/

演習の解答

(201)　角の二等分線と垂直二等分線の交点

演習 (201-1) (1) $\mathrm{AB}=9$ より $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=9^2$ …… ① である．

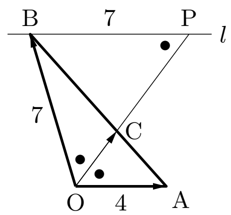
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\&=7^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4^2\\&=65-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

より，①は

$$65-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=81$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{65-81}{2}=\boldsymbol{-8}$$ ……(答)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．P は点 B を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と平行な直線 l 上の点である．$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が平行となるのは，P が直線 OC と l の交点となるときである．



OC は ∠AOB の二等分線かつ BP // OA であるから

$$\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{OPB}$$

△BOP は二等辺三角形であり

$$\mathrm{BP}=\mathrm{OB}=7$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{7}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\qquad\therefore\quad k=\boldsymbol{\frac{7}{4}}$$ ……(答)

(3) (2) より

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{7}{4}t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

C は直線 AB 上の点であるから

$$t+\frac{7}{4}t=1\qquad\therefore\quad t=\frac{4}{11}$$

である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{\frac{7}{11}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boldsymbol{\frac{4}{11}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$ ……(答)

- (2) を無視して，角の二等分線と比の定理

$$\mathrm{AC}:\mathrm{CB}=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=4:7$$

を用いると

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{7\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{11}$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{4}{11}\left(\frac{7}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\ /\!/\ \frac{7}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\qquad\therefore\quad k=\frac{7}{4}$$

として，(3)，(2) の順に解くこともできるが，(3) に「(2) を用いて $\cdots$」とあるので，この解法は避けた方が良いでしょう．

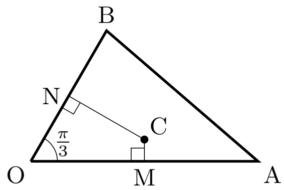
　角の二等分線と比の定理は教科書にも載っている定理です．どのように採点されたか興味ありますね．

(4) (3) より

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| &= \frac{1}{11}|7\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \\
&= \frac{1}{11}\sqrt{7^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2\times7\times4\times\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2} \\
&= \frac{1}{11}\sqrt{7^2\times4^2+2\times7\times4\times(-8)+4^2\times7^2} \\
&= \frac{1}{11}\sqrt{7\times4^2\times(7-4+7)} \\
&= \boldsymbol{\frac{4\sqrt{70}}{11}}
\end{aligned}
$$

……(答)

演習 (201-2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3k$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2k$ $(k>0)$ とおくことができる．OA，OB の中点をそれぞれ M，N とおくと



$$
\begin{cases}
\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}=0 & \cdots\cdots ① \\
\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}}=0 & \cdots\cdots ②
\end{cases}
$$

である．

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}) \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-x\overrightarrow{\mathrm{OA}}-y\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \\
&= \frac{1}{2}(3k)^2-x(3k)^2-y\times3k\times2k\times\cos\frac{\pi}{3} \\
&= \left(\frac{9}{2}-9x-3y\right)k^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-x\overrightarrow{\mathrm{OA}}-y\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \\
&= (2-3x-4y)\,k^2
\end{aligned}
$$

$k>0$ より，①かつ②を整理すると

$$
\begin{cases}
\frac{9}{2}-9x-3y=0 \\
2-3x-4y=0
\end{cases}
\qquad\therefore\qquad
\begin{cases}
3x+y=\frac{3}{2} \\
3x+4y=2
\end{cases}
$$

これを解いて

$$x=\frac{4}{9},\ y=\frac{1}{6}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{\frac{4}{9}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boldsymbol{\frac{1}{6}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

……(答)

である．

(202)　内積の計算，1 次独立

演習 (202-1)　　$\overrightarrow{p} = |\overrightarrow{a}|\overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|\overrightarrow{c} + |\overrightarrow{c}|\overrightarrow{a}$　　…… ①

(1) △ABC が正三角形であるならば，$|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}|$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p} &= |\overrightarrow{a}|(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a})\\ &= |\overrightarrow{a}|\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\\ &= |\overrightarrow{a}|\overrightarrow{0}\\ &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

である．

逆に，$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{0}$ であるならば，$\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ より，$\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ であり

$$|\overrightarrow{a}|\overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|(-\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) + |\overrightarrow{c}|\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$$
$$(|\overrightarrow{c}| - |\overrightarrow{b}|)\overrightarrow{a} + (|\overrightarrow{a}| - |\overrightarrow{b}|)\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$$

$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ は 1 次独立より

$$|\overrightarrow{a}| - |\overrightarrow{b}| = 0 \text{ かつ } |\overrightarrow{b}| - |\overrightarrow{c}| = 0$$
$$\therefore\quad |\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}|$$

△ABC は正三角形である．

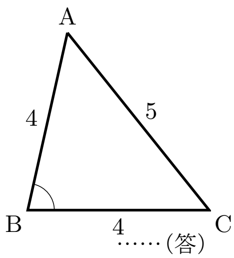
以上により $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{0}$ は △ABC が正三角形であるため必要十分条件である．　　……(証明終わり)

(2) $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a}$ かつ $|\overrightarrow{p}| = 4$，および $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ を①に代入すると

$$\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|(-\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) + |\overrightarrow{c}|\overrightarrow{a}$$
$$(1 + |\overrightarrow{b}| - |\overrightarrow{c}|)\overrightarrow{a} + (|\overrightarrow{b}| - 4)\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$$

$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ は 1 次独立より

$$1 + |\overrightarrow{b}| - |\overrightarrow{c}| = 0 \text{ かつ } |\overrightarrow{b}| - 4 = 0$$
$$\therefore\quad |\overrightarrow{b}| = 4,\ |\overrightarrow{c}| = 5$$



△ABC は右図のような三角形であるから，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{4^2 + 4^2 - 5^2}{2 \times 4 \times 4} = \boldsymbol{\frac{7}{32}}$$

……(答)

である．

(203)　1 次独立，直線と平面の交点

演習 (203-1) (1) 直線 PQ が平面 ABC と共有点 R をもつのは

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす $t,\ \alpha,\ \beta$ が存在するときであり，このとき，点 R が線分 PQ 上かつ三角形 ABC の辺または内部にあるための条件は

$$\begin{cases} 0 \leqq t \leqq 1 & \cdots\cdots ② \\ 0 \leqq \alpha,\ 0 \leqq \beta,\ \alpha+\beta \leqq 1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

を満たすことである．①かつ②かつ③を満たす $t,\ \alpha,\ \beta$ が存在するための a の条件を求める．

いま，①より

$$\begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 2a+1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -2a \\ 2a \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a-2at=6-6\alpha-6\beta \\ 2at=6\alpha \\ 2a+1-2t=3\beta \end{cases}$$

$\alpha,\ \beta$ を消去すると

$$2a-2at=6-2at-2(2a+1-2t)$$

$$\therefore \quad t=\frac{3a-2}{2}$$

このとき

$$\alpha=\frac{3a^2-2a}{6},\ \beta=\frac{-a+3}{3}$$

よって，②，③を満たすためには

$$\begin{cases} 0 \leqq \dfrac{3a-2}{2} \leqq 1 \\ 0 \leqq \dfrac{3a^2-2a}{6} \\ 0 \leqq \dfrac{-a+3}{3} \\ \dfrac{3a^2-4a+6}{6} \leqq 1 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \dfrac{2}{3} \leqq a \leqq \dfrac{4}{3} \\ a \leqq 0 \text{ または } \dfrac{2}{3} \leqq a \\ a \leqq 3 \\ 0 \leqq a \leqq \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

これらをまとめると

$$\boldsymbol{\frac{2}{3} \leqq a \leqq \frac{4}{3}} \qquad \cdots\cdots ④ \qquad\qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) (1) より，共有点 R は

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 2a+1 \end{pmatrix}+\frac{3a-2}{2}\begin{pmatrix} -2a \\ 2a \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3a^2+4a \\ 3a^2-2a \\ -a+3 \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2 &= (-3a^2+4a)^2+(3a^2-2a)^2+(-a+3)^2 \\ &= 18a^4-36a^3+21a^2-6a+9 \end{aligned}$$

$f(a)=18a^4-36a^3+21a^2-6a+9$ とおき，④ の範囲における最小値を求める．

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= 72a^3 - 108a^2 + 42a - 6 \\
&= 6(a-1)(12a^2 - 6a + 1) \\
&= 6(a-1)\left\{12\left(a - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\right\}
\end{aligned}
$$

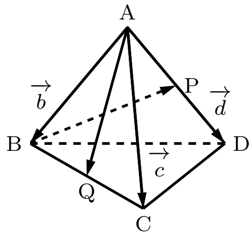
a	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

右の増減表より，$f(a)$ は $a = 1$ で極小かつ最小となる.

$$f(1) = 18 - 36 + 21 - 6 + 9 = 6$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$ は $\boldsymbol{a = 1}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\sqrt{6}}$ をとる.　……(答)

(204)　内積の定義，ベクトルのなす角



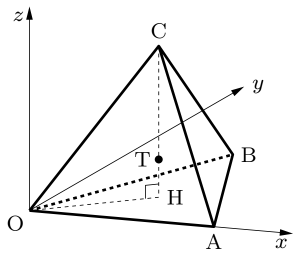
演習 (204-1)　$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{d}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とおくと，四面体 ABCD は 1 辺の長さが a であるから

$$|\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{d}|=a,$$
$$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}=\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{b}=a^2\cos 60^\circ=\frac{a^2}{2}$$

である．これより

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}&=\frac{\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}}{2}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{d}}{2}-\overrightarrow{b}\right)\\&=\frac{1}{4}(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{d}-2\overrightarrow{b})\\&=\frac{1}{4}\left\{(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{d}-2(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{b})\right\}\\&=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\right)-2\left(a^2+\frac{a^2}{2}\right)\right\}\\&=\boldsymbol{-\frac{a^2}{2}}\end{aligned}$$

……(答)



演習 (204-2)　(1)　3 点 O(0, 0, 0)，A(a, 0, 0)，B(b, c, 0) を頂点とする三角形は 1 辺の長さが a の正三角形であるから

$$b=\frac{a}{2},\ c=a\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

正四面体 OABC の頂点 C から平面 OAB に下した垂線の足 H(d, e, 0) は，CO = CA = CB より，△OAB の外心である．△OAB は正三角形より，外心 H は重心でもある．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}=\frac{1}{3}(a+b,\ c,\ 0)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{3a}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ 0\right)=\left(\frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{6}a,\ 0\right)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad d=\frac{a}{2},\ e=\frac{\sqrt{3}}{6}a$$

さらに，$\mathrm{OH}^2+\mathrm{CH}^2=\mathrm{OC}^2$ かつ CH = 4 であるから

$$(d^2+e^2)+4^2=a^2$$
$$\left(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{12}\right)+16=a^2$$
$$\frac{2}{3}a^2=16\qquad\therefore\quad \boldsymbol{a=2\sqrt{6}}$$

……(答)

これより

$$\boldsymbol{b=\sqrt{6},\ c=3\sqrt{2},\ d=\sqrt{6},\ e=\sqrt{2}}$$

……(答)

(2)　(1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{TO}}=\left(-\sqrt{6},\ -\sqrt{2},\ -t\right),\ \overrightarrow{\mathrm{TA}}=\left(\sqrt{6},\ -\sqrt{2},\ -t\right)$$

であるから

$$\cos\angle\mathrm{OTA}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{TO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{TA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{TO}}||\overrightarrow{\mathrm{TA}}|}=\frac{-6+2+t^2}{\sqrt{6+2+t^2}\sqrt{6+2+t^2}}=\boldsymbol{\frac{t^2-4}{t^2+8}}$$

……(答)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{TC}} = (0,\ 0,\ 4-t)$ より

$$\cos\angle\mathrm{OTC} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{TO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{TC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{TO}}||\overrightarrow{\mathrm{TC}}|} = \frac{0+0-t(4-t)}{\sqrt{6+2+t^2}\sqrt{0+0+(4-t)^2}}$$
$$= \frac{-t(4-t)}{\sqrt{8+t^2}|4-t|} = \frac{-t}{\sqrt{t^2+8}} \quad (\because\ 0<t<4)$$

$0 \leqq \angle\mathrm{OTC} \leqq \pi$，$0 \leqq \angle\mathrm{OTA} \leqq \pi$ より

$$\angle\mathrm{OTC} = \angle\mathrm{OTA} \iff \cos\angle\mathrm{OTC} = \cos\angle\mathrm{OTA}$$
$$\iff \frac{-t}{\sqrt{t^2+8}} = \frac{t^2-4}{t^2+8}$$
$$\iff t\sqrt{t^2+8} = 4-t^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$0<t<4$ と合わせると

$$\begin{cases} ① \\ 0<t<4 \end{cases} \iff \begin{cases} t^2(t^2+8) = (4-t^2)^2 \\ 4-t^2>0 \\ 0<t<4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} t^2 = 1 \\ 0<t<2 \end{cases}$$
$$\therefore\ \boldsymbol{t=1}$$
……(答)

このとき

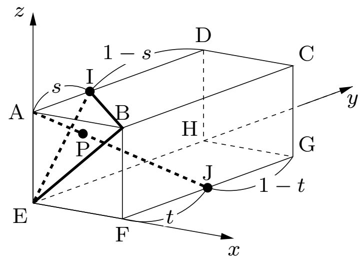
$$\cos\angle\mathrm{OTA} = \frac{1^2-4}{1^2+8} = \boldsymbol{-\frac{1}{3}}$$
……(答)

であり，△OTA の面積は

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{TO}}||\overrightarrow{\mathrm{TA}}|\sin\angle\mathrm{OTA} = \frac{1}{2}\times 3\times 3\times\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \boldsymbol{3\sqrt{2}}$$
……(答)

(205)　正射影ベクトル

演習 (205-1) (1) P は直線 AJ 上の点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=k(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{FJ}})$$
$$=k(\vec{b}+\vec{e}+t\vec{d})$$
$$=k(\vec{b}+t\vec{d}+\vec{e})\qquad\cdots\cdots ①$$

一方，P は平面 BEI 上の点でもあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+u\overrightarrow{\mathrm{BE}}+v\overrightarrow{\mathrm{BI}}$$
$$=\vec{b}+u(\vec{e}-\vec{b})+v(s\vec{d}-\vec{b})$$
$$=(1-u-v)\vec{b}+vs\vec{d}+u\vec{e}\qquad\cdots\cdots ②$$

$\vec{b}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ は 1 次独立だから，①，② より

$$\begin{cases}k=1-u-v\\kt=vs\\k=u\end{cases}\qquad\therefore\quad k=u=\frac{s}{2s+t},\ v=\frac{t}{2s+t}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{\frac{s}{2s+t}(\vec{b}+t\vec{d}+\vec{e})}\qquad\cdots\cdots(答)$$

- ①を B, E, I を終点とするベクトルで表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{t}{s}\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$$

P は平面 BEI 上の点であるから

$$k+\frac{t}{s}k+k=1\qquad\therefore\quad k=\frac{s}{2s+t}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{s}{2s+t}(\vec{b}+t\vec{d}+\vec{e})$

(2) 平面 BEI に対して垂直なベクトルを $\vec{n}=(1,\ y,\ z)$ とおくと

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BI}}=0\end{cases}$$

である．$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=(-2,\ 0,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{BI}}=(-2,\ 4s,\ 0)$ であるから

$$\begin{cases}-2-2z=0\\-2+4sy=0\end{cases}\qquad\therefore\quad y=\frac{1}{2s},\quad z=-1$$

よって

$$\vec{n}=\boldsymbol{\left(1,\ \frac{1}{2s},\ -1\right)}\qquad\cdots\cdots(答)$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ が平面 BEI に対して垂直となるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{n}$ は平行である．(1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{s}{2s+t}(2,\ 4t,\ -2)=\frac{2s}{2s+t}(1,\ 2t,\ -1)$$

だから，(2) の結果と比較して

$$2t=\frac{1}{2s}\qquad\therefore\quad \boldsymbol{s=\frac{1}{4t}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

(206)　四面体の体積

演習 (206-1) (1) $\theta = \angle\mathrm{AOB}\ (0 < \theta < \pi)$ とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sqrt{1-\cos\theta} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2} \end{aligned}$$

……(証明終わり)

(2) H は平面 OAB 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = p\overrightarrow{\mathrm{OA}} + q\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (p+q,\ q,\ -p)$$

と表すことができる．CH ⊥ 平面 OAB より

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 \end{cases}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = (p+q+1,\ q-2,\ -p)$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 0,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (1,\ 1,\ 0)$ より

$$\begin{cases} 2p+q+1=0 \\ p+2q-1=0 \end{cases} \qquad \therefore\quad p=-1,\quad q=1$$

よって，H の座標は

$$\mathrm{H}(\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1})$$

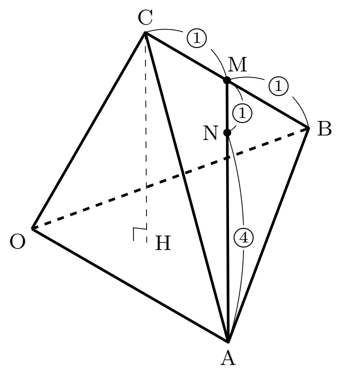
……(答)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CH}} = (1,\ -1,\ 1)$ より，求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\times\mathrm{CH} \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\sqrt{2\times2-1^2}\times\sqrt{3} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

……(答)

演習 (206-2) (1) 点 H は平面 OAB 上にあるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

とおくことができ，このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}$$

である．CH ⊥ (平面 OAB) であり

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 \end{cases}$$

である．ここで

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= (s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c})\cdot\vec{a} = 2^2s + 2t - \frac{4}{3} \\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= (s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c})\cdot\vec{b} = 2s + 3t - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{cases} 6s+3t-2=0 \\ 6s+9t-4=0 \end{cases} \qquad \therefore\quad s=\frac{1}{6},\ t=\frac{1}{3}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boldsymbol{\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}}$$

……(答)

(2) (1) より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 = \frac{1}{6^2}|\vec{a}+2\vec{b}|^2 = \frac{1}{6^2}(2^2+4\times 2+2^2\times 3) = \frac{2}{3}$$

であり

$$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2} = \sqrt{1^2 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

である．また

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2^2\times 3 - 2^2} = \sqrt{2}$$

よって，四面体 OABC の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\times|\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{9}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) 点 N は線分 AM を 4 : 1 に内分するから

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{ON}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{5} \\
&= \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\,\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \\
&= \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c} \\
&= \frac{1}{5}(\vec{a}+2\vec{b}) + \frac{2}{5}\vec{c}
\end{aligned}$$

である．(1) から $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{6}(\vec{a}+2\vec{b})$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{OH}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{8}{5}\,\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{4}$$

とできる．分点公式より，O を始点としたベクトル $\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{4}$ の終点は直線 CH 上にあり，直線 CH と直線 ON は交わる．この交点が P であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{4}$$

である．よって

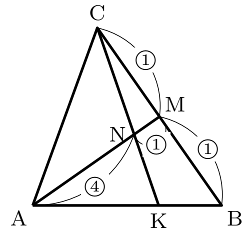
$$\mathrm{CP}:\mathrm{PH} = \mathbf{3:1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- 直線 CN と辺 AB の交点を K とすると，△ABM と直線 KN でメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{KB}}\times\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CM}}\times\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{NA}} = 1$$

$$\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{KB}}\times\frac{2}{1}\times\frac{1}{4} = 1$$

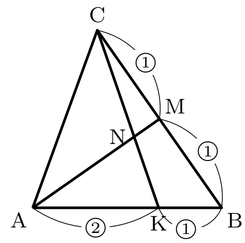
$$\therefore\quad \mathrm{AK}:\mathrm{KB} = 2:1 \qquad \cdots\cdots ①$$



また (1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\vec{a}+2\vec{b}}{6} = \frac{1}{2}\,\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OK}} \qquad \cdots\cdots ②$$

CK 上に N があり，OK 上に H があるから，平面上 OCK 上に N，H はあり，直線 CH と直線 ON は交わる．

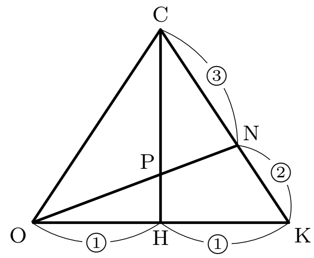


①より，△BCK と直線 MN でメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NK}}\times\frac{\mathrm{KA}}{\mathrm{AB}}\times\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MC}}=1$$
$$\frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NK}}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{1}=1$$
$$\therefore\quad \mathrm{CN}:\mathrm{NK}=3:2 \qquad \cdots\cdots ③$$

次に，四面体 OABC の平面 OCK による切り口を考える．

②，③に注意し，△CHK と直線 PN でメネラウスの定理を用いると



$$\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PH}}\times\frac{\mathrm{HO}}{\mathrm{OK}}\times\frac{\mathrm{KN}}{\mathrm{NC}}=1$$
$$\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PH}}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=1$$
$$\therefore\quad \mathrm{CP}:\mathrm{PH}=3:1$$

(207)　2 直線の位置関係

演習 (207-1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ -1,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 1,\ 2)+t(-1,\ -1,\ 1)$$

点 P が xy 平面にある条件は，z 成分が 0 となることであるから

$$2+t=0 \qquad \therefore\quad t=\boldsymbol{-2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直である条件は，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ である．$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(2,\ 0,\ 1)+t(-1,\ -1,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2+0+1)+t(1+1+1)=-1+3t$$

であり，求める条件は

$$-1+3t=0 \qquad \therefore\quad t=\boldsymbol{\frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

演習 (207-2) (1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ -3,\ -1)$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t(1,\ 0,\ -1)-(1,\ 2,\ 2)$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t(1+0+1)-(1-6-2)=\boldsymbol{2t+7} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $S(t)=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})^2}$ である．

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=1^2+(-3)^2+(-1)^2=11,$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=2t^2+2t+9$$

より

$$\begin{aligned}S(t)&=\frac{1}{2}\sqrt{11(2t^2+2t+9)-(2t+7)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{18t^2-6t+50}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{18\left(t-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{99}{2}}\end{aligned}$$

$t>0$ より $\boldsymbol{t=\frac{1}{6}}$ のとき，$S(t)$ は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{22}}{4}}$ をとる．　$\cdots\cdots$(答)

(3) 点 Q は直線 OB 上にあるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{OB}} = s(1,\ 0,\ -1) \quad (s \text{ は実数})$$

また，点 R は直線 AC 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + u\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,\ 2,\ 2) + u(1,\ -3,\ -1) \quad (u \text{ は実数})$$

と表せる．

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2\\ &= |(1,\ 2,\ 2) + u(1,\ -3,\ -1) - s(1,\ 0,\ -1)|^2\\ &= 9 + 11u^2 + 2s^2 + 2(-7u - 2su + s)\\ &= 2s^2 - 2(2u-1)s + 11u^2 - 14u + 9\\ &= 2\left(s - \frac{2u-1}{2}\right)^2 + 9u^2 - 12u + \frac{17}{2}\\ &= 2\left(s - \frac{2u-1}{2}\right)^2 + 9\left(u - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{9}{2}\end{aligned}$$

s, u は実数より，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|^2$ は $s - \dfrac{2u-1}{2} = 0$ かつ $u - \dfrac{2}{3} = 0$ のとき最小となる．すなわち，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|$ は $s = \dfrac{1}{6}$, $u = \dfrac{2}{3}$ のとき，最小値 $\sqrt{\dfrac{9}{2}} = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}\sqrt{2}}$ をとる．　……(答)

このとき，R の座標は　$\mathrm{R}\left(\boldsymbol{\dfrac{5}{3},\ 0,\ \dfrac{4}{3}}\right)$　……(答)

- 線分 QR の長さが最小となるのは

$$\mathrm{QR} \perp \mathrm{OB} \text{ かつ } \mathrm{QR} \perp \mathrm{AC}$$

すなわち

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{QR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0\\ \overrightarrow{\mathrm{QR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0\end{cases}$$

のときである．$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = (1,\ 2,\ 2) + u(1,\ -3,\ -1) - s(1,\ 0,\ -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (1,\ 0,\ -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,\ -3,\ -1)$ より

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{QR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -1 + 2u - 2s,\\ &\overrightarrow{\mathrm{QR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -7 + 11u - 2s\end{aligned}$$

であり

$$\begin{cases}2u - 2s = 1\\ 11u - 2s = 7\end{cases} \qquad \therefore \quad u = \frac{2}{3}, \quad s = \frac{1}{6}$$

このとき

$$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{6},\ 0,\ -\frac{1}{6}\right), \quad \mathrm{R}\left(\frac{5}{3},\ 0,\ \frac{4}{3}\right)$$

であり，QR の長さの最小値は

$$\sqrt{\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{6}\right)^2 + 0 + \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{6}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

(208)　平面の方程式

演習 (208-1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 2,\ -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ 1,\ -4)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立なので，点 D が平面 ABC 上にあるとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

をみたす実数 s, t が存在する．$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(a,\ b-1,\ -4)$ より

$$\begin{cases} a=-s+t & \cdots\cdots ① \\ b-1=2s+t & \cdots\cdots ② \\ -4=-s-4t & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①，②より

$$(s,\ t)=\left(\frac{-a+b-1}{3},\ \frac{2a+b-1}{3}\right)$$

これを③に代入すると

$$\frac{-a+b-1}{3}+4\times\frac{2a+b-1}{3}=4$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{7a+5b=17} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- 平面 ABC の法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ を求める．$\overrightarrow{n}=(x,\ y,\ z)$ とすると

$$\begin{cases} \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 \\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ x+y-4z=0 \end{cases}$$

$$\therefore\quad x=\frac{7}{3}z,\quad y=\frac{5}{3}z \qquad \therefore\quad \overrightarrow{n}=\frac{z}{3}(7,\ 5,\ 3)$$

$\overrightarrow{n}$ の 1 つとして $(7,\ 5,\ 3)$ をとることができる．

D が平面 ABC 上の点であるとき

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$$

が成り立つ．$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(a,\ b-1,\ -4)$ より

$$7a+5(b-1)-12=0 \qquad \therefore\quad 7a+5b=17$$

演習 (208-2) (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 2,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-4,\ -1,\ 5)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-5,\ 1,\ 4)$ より

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{6}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\mathrm{BC}=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+5^2}=\boldsymbol{\sqrt{42}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\mathrm{CA}=\sqrt{(-5)^2+1^2+4^2}=\boldsymbol{\sqrt{42}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) $\triangle$ABC の面積 S は

$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2} \\ &=\frac{1}{2}\sqrt{6\times42-(5+2-4)^2} \\ &=\boldsymbol{\frac{9\sqrt{3}}{2}} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- (1) より $\triangle$ABC は BC $=$ CA の二等辺三角形なので，AB を底辺とすると高さ h は

$$h=\sqrt{(\sqrt{42})^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{81}{2}}=\frac{9}{\sqrt{2}}$$

よって

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot h=\frac{1}{2}\sqrt{6}\cdot\frac{9}{\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

(3) OH $\perp$ 平面 ABC より

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\end{cases}$$

である．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+l\overrightarrow{\mathrm{AB}}+m\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(5,\ 0,\ 1)+l(-1,\ 2,\ -1)+m(-5,\ 1,\ 4)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-6+6l+3m$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-21+3l+42m$$

であるから

$$\begin{cases}2l+m=2\\ l+14m=7\end{cases}\qquad\therefore\quad \boldsymbol{l=\frac{7}{9},\quad m=\frac{4}{9}}$$ ……(答)

(4) (3) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{11}{9}\,\frac{7\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{11}$$

分点公式により，A を始点としたベクトル $\dfrac{7\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{11}$ の終点は BC 上にある．また，この終点は直線 AH 上の点でもあるから，直線 AH と直線 BC の交点 M である．

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{11}{9}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を満たす k の値は　$\boldsymbol{k=\frac{11}{9}}$　である． ……(答)

したがって，H は $\triangle$ABC の外部の点であり，$\triangle$HBC の面積 T は

$$T=\frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{AM}}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2}{9}\times\frac{9\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$$ ……(答)

(5) (3) より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(5,\ 0,\ 1)+\frac{7}{9}(-1,\ 2,\ -1)+\frac{4}{9}(-5,\ 1,\ 4)=(2,\ 2,\ 2)$$

より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=2\sqrt{3}$$

である．また

$$\text{四角形 ABHC}=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{HBC}=\frac{9\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\frac{11\sqrt{3}}{2}$$

よって

$$V=\frac{1}{3}\times(\text{四角形 ABHC})\times|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{1}{3}\times\frac{11\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}=\boldsymbol{11}$$ ……(答)

(209)　球面と直線

演習 (209-1) (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-1,\ y,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x,\ y-1,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(x,\ y,\ z-1)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$$
$$(x-1,\ y,\ z)\cdot(2x,\ 2y-1,2z-1)=0$$
$$2x(x-1)+y(2y-1)+z(2z-1)=0$$
$$2x^2+2y^2+2z^2-2x-y-z=0$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\left(z-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{8}\qquad\cdots\cdots ①$$

よって，S は中心 $\mathrm{Q}\left(\boldsymbol{\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}}\right)$，半径 $r=\sqrt{\frac{3}{8}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{4}}$ の球面である．　……(答)

- $\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}$ である．

線分 BC の中点を D とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}=\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ であり

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{DP}}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0\iff\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot2\overrightarrow{\mathrm{DP}}=0\iff\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}=0$$

P は AP ⊥ DP または P=A または P=D を満たすから，P の集合 S は A，D を直径の両端とする球面である．球の中心 Q は線分 AD の中点であり $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$，半径は $\mathrm{AQ}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ である．

(2) 原点 O は S 上の点であるから，原点 O から最も遠い距離にある S 上の点 R は

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

求める点の座標は $\left(\boldsymbol{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}\right)$ である．　……(答)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 0,\ 1)$ より，平面 α 上の点 T は 2 つの実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1-s-t,\ s,\ t)$$

と表すことができる．T の座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると

$$x=1-y-x\qquad\therefore\quad x+y+z=1\qquad\cdots\cdots ②$$

である．$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ は②を満たすから，Q は平面 α 上にある．　……(証明終わり)

(4) 平面 α に垂直なベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とすると

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{n}=0\end{cases}\iff\begin{cases}-a+b=0\\ -a+c=0\end{cases}\qquad\therefore\quad a=b=c$$

$\vec{n}$ の 1 つとして $(1,\ 1,\ 1)$ がとることができ，l 上の点 L は実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t\vec{n}=\left(\frac{1}{2}+t,\ \frac{1}{4}+t,\ \frac{1}{4}+t\right)$$

と表すことができる．L は S 上の点でもあるから，①に代入すると

$$t^2+t^2+t^2=\frac{3}{8}\qquad\therefore\quad t=\pm\frac{1}{\sqrt{8}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

よって，求める点の座標は $\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{2}}{4}}\right)$ **(複号同順)** である．　……(答)

- (3) における方程式②は平面 ABC の方程式であり，x, y, z の係数からつくられるベクトル $(1,\ 1,\ 1)$ はこの平面の法線ベクトルである．
  xy 平面において，点 $(x_0,\ y_0)$ を通り，ベクトル $(a,\ b)$ と垂直な直線の方程式が

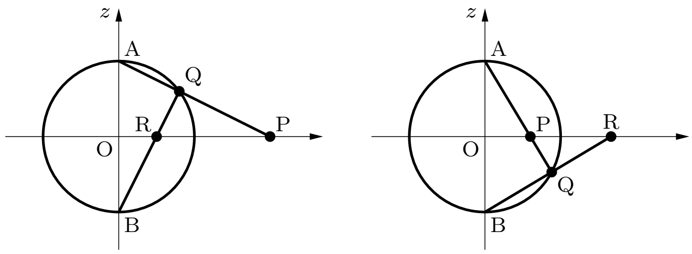
  $$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

  であることと同じく，xyz 空間において，$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，ベクトル $(a,\ b,\ c)$ と垂直な平面の方程式として，x, y, z の関係式

  $$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

  を得ることができる．

演習 (209-2) (1) 直線 AB と点 P を含む平面で考える．



$\triangle$OAP $\backsim$ $\triangle$QAB かつ $\triangle$QAB $\backsim$ $\triangle$ORB より，$\triangle$OAP $\backsim$ $\triangle$ORB であり

$$\mathrm{OP : OA = OB : OR}$$

$\mathrm{OA = OB} = 1$ より

$$\mathrm{OP \times OR} = \mathbf{1}$$ ……(答)

- 上の解法はうますぎるという人には，問題通りに計算を進めて R の座標を求めましょう．これは O 君とやった解法です．
　Q は直線 AP 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + p\overrightarrow{\mathrm{AP}} \quad (p \text{ は実数})$$
$$= (0,\ 0,\ 1) + p(s,\ t,\ -1) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおくことができる．また，Q は球面 S 上の点でもあるから

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

と①を連立すると

$$s^2p^2 + t^2p^2 + (1-p)^2 = 1$$
$$(s^2 + t^2 + 1)p^2 - 2p = 0$$

Q は A と異なる点より，$p \neq 0$ であり

$$p = \frac{2}{s^2 + t^2 + 1}$$

である．
　さらに R は直線 AP 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + q\overrightarrow{\mathrm{BQ}} \quad (q \text{ は実数})$$
$$= (0,\ 0,\ -1) + q(sp,\ tp,\ 2-p)$$

R は xy 平面上の点でもあるから

$$z = 0 \iff -1 + (2-p)q = 0$$
$$\therefore \quad q = \frac{1}{2-p} = \frac{1}{2 - \dfrac{2}{s^2+t^2+1}} = \frac{s^2+t^2+1}{2(s^2+t^2)}$$

これより

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (u,\ v,\ 0) = (spq,\ tpq,\ 0) = pq(s,\ t,\ 0) = \frac{1}{s^2+t^2}(s,\ t,\ 0)$$

であり

$$\mathrm{OP \times OQ} = \sqrt{s^2+t^2} \times \frac{1}{s^2+t^2}\sqrt{s^2+t^2} = 1$$

(2) (1) の結果より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OR}}\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{\mathrm{OR}^2}\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{u^2+v^2}(u,\ v,\ 0)$$

よって，$\boldsymbol{s = \dfrac{u}{u^2+v^2}}$，$t = \dfrac{v}{u^2+v^2}$　……(答)

(3) xy 平面内の原点を通らない直線 l は

$$l : ax+by+c=0,\ z=0\ (a^2+b^2 \fallingdotseq 0,\ c \fallingdotseq 0)$$

と表すことができる．P は直線 l 上を動くから

$$as+bt+c=0$$

であり，(2) より

$$\frac{au}{u^2+v^2}+\frac{bv}{u^2+v^2}+c=0$$

$c \fallingdotseq 0$ より

$$u^2+v^2+\frac{a}{c}u+\frac{b}{c}v=0$$

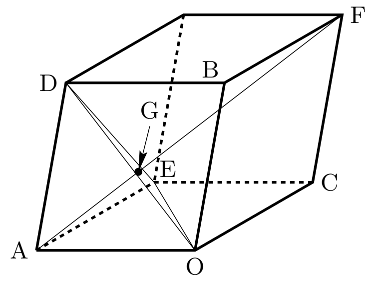
$$\left(u+\frac{a}{2c}\right)^2+\left(v+\frac{b}{2c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4c^2}$$

点 $\mathrm{R}(u,\ v,\ 0)$ は，xy 平面内の点 $\left(-\dfrac{a}{2c},\ -\dfrac{b}{2c},\ 0\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2|c|}$ の円周上にある．　……(証明終わり)

● P と R の対応関係は反転と呼ばれている．

(210)　球と平面

演習 (210-1) (1) 3 点 D，E，F の定義により



$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

である．G は △ODE を含む平面上の点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}&=a\overrightarrow{\mathrm{OD}}+b\overrightarrow{\mathrm{OE}}\quad (a,\ b\text{ は実数})\\&=(a+b)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}+b\overrightarrow{\mathrm{OC}}\qquad\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

と表すことができる．一方，G は直線 AF 上の点でもあるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OF}}\quad (t\text{ は実数})\\&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\qquad\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

と表すこともできる．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は 1 次独立なので，①，② より

$$\begin{cases}a+b=1-t\\a=t\\b=t\end{cases}\qquad\therefore\quad a=b=t=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OG}}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boldsymbol{\frac{1}{3}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\boldsymbol{\frac{1}{3}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$ ……(答)

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}(=x)$ なので

$$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}$$

これらの角の大きさを θ $(0<\theta<\pi)$ とすると，$\cos\theta=x$ である．4 点 O，A，B，C は同一平面上にないので

$$\angle\mathrm{AOB}+\angle\mathrm{AOC}+\angle\mathrm{BOC}<2\pi\qquad\therefore\quad 3\theta<2\pi$$

であり

$$0<\theta<\frac{2}{3}\pi\qquad\therefore\quad -\frac{1}{2}<x<1$$

である．点 O から △ABE を含む平面におろした垂線の足を H とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OE}}\quad (\alpha+\beta+\gamma=1\ \cdots\cdots ③)\\&=(\alpha+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

と表すことができる．このとき

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0&\cdots\cdots ④\\\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=0&\cdots\cdots ⑤\end{cases}$$

である．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\left\{(\alpha+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right\}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\&=(\alpha+\gamma)(x-1^2)+\beta(1^2-x)+\gamma(x-x)\\&=(\alpha-\beta+\gamma)(x-1)\end{aligned}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}} &= \left\{(\alpha+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right\} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= (\alpha+\gamma)x + \beta x + \gamma \times 1^2 \\ &= (\alpha+\beta+\gamma)x + \gamma\end{aligned}$$

$x - 1 \neq 0$ なので

$$③かつ④かつ⑤ \iff \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma = 1 \\ \alpha-\beta+\gamma = 0 \\ (\alpha+\beta+\gamma)x+\gamma = 0\end{cases}$$

$$\therefore \quad \gamma = -x, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \alpha = x + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - x\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

である．したがって

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 &= \frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} - 2x\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 \\ &= \frac{1}{4}(1^2 + 1^2 + 4x^2 + 2x - 4x^2 - 4x^2) \\ &= -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

また，球の半径 $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$ は(1) より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2 &= \frac{1}{9}|2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 \\ &= \frac{1}{9}(4 \times 1^2 + 1^2 + 1^2 + 4x + 2x + 4x) \\ &= \frac{10}{9}x + \frac{2}{3}\end{aligned}$$

点 G を含む球面と △ABE を含む平面の交わりでできる円の半径 r の 2 乗は

$$\begin{aligned}r^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 \\ &= \left(\frac{10}{9}x + \frac{2}{3}\right) - \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) \\ &= x^2 + \frac{11}{18}x + \frac{1}{6} \\ &= \left(x + \frac{11}{36}\right)^2 + \frac{95}{36^2}\end{aligned}$$

$-\dfrac{1}{2} < x < 1$ より，この円の半径 r は，$\boldsymbol{x = -\dfrac{11}{36}}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{95}}{36}}$ をとる．　……(答)

演習 (210-2) (1) S の中心 C は線分 AB の中点であるから，C の座標は

$$\left(\frac{4+2}{2},\ \frac{-2-4}{2},\ \frac{2+4}{2}\right) \text{ すなわち } (3,\ -3,\ 3)$$

であり，S の半径は

$$\mathrm{CA} = \sqrt{(4-3)^2 + (-2+3)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{3}$$

である．よって，求める S の方程式は，

$$\boldsymbol{(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 3}$$　……(答)

- S 上の点を P とすると
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$$
であるから，S の方程式は
$$(x-4)(x-2)+(y+2)(y+4)+(z-2)(z-4)=0$$
$$x^2+y^2+z^2-6x+6y-6z+24=0$$
$$\therefore\quad (x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=3$$

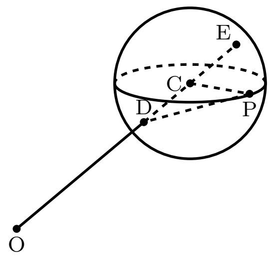
(2) S と α の交円の半径が最大となるのは，α が S の中心 C$(3,\ -3,\ 3)$ を通るときである．α は xy 平面と平行な平面であるから，α の方程式は
$$\boldsymbol{z=3}$$
……(答)

(3) 直線 OC 上の点を T とすると，実数 t を用いて
$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(3t,\ -3t,\ 3t)$$
と表すことができる．T が球 S 上にあるとき
$$(3t-3)^2+(-3t+3)^2+(3t-3)^2=3$$
$$9(t-1)^2=1\qquad\therefore\quad t=\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}$$
このそれぞれの値に対して，D，E が決まる．すなわち
$$\mathbf{D(2,\ -2,\ 2),\quad E(4,\ -4,\ 4)}$$
……(答)

である．

- $\mathrm{OC}=\sqrt{3^2+(-3)^2+3^2}=3\sqrt{3}>\sqrt{3}$ (S の半径) より，O は S の外部にあるから D，E は直線 OC 上に O, D, C, E の順に並ぶ点である．
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\pm\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(3,\ -3,\ 3)\pm(1,\ -1,\ 1)$$
$$\therefore\quad \mathrm{D}(2,\ -2,\ 2),\quad \mathrm{E}(4,\ -4,\ 4)$$

(4) 点 P は円 $(x-3)^2+(y+3)^2=3,\ z=3$ 上を動くから
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\sqrt{3}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)\ (0\leqq\theta<2\pi)$$
とおくことができる．$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(-1,\ 1,\ -1)$ より



$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{CDP}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{3\times3-(-\sqrt{3}\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{9-(3-6\sin\theta\cos\theta)}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{6+3\sin2\theta}\end{aligned}$$

これより，$\triangle$CDP の面積は $\sin2\theta$ が最大のとき最大となる．
$0\leqq\theta<2\pi$ より $0\leqq2\theta<4\pi$ であり
$$2\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi\ \text{すなわち}\ \theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$$
のとき最大となる．
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\\&=(3,\ -3,\ 3)+\sqrt{3}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)\\&=\left(3\pm\frac{\sqrt{6}}{2},\ -3\pm\frac{\sqrt{6}}{2},\ 3\right)\quad(\text{複号同順})\end{aligned}$$

よって，求める P の座標は $\boldsymbol{\left(3\pm\frac{\sqrt{6}}{2},\ -3\pm\frac{\sqrt{6}}{2},\ 3\right)}$ **(複号同順)**　……(答)