2017年度 分野別大学入試問題閲覧 — 数学

kamelink.com

17年10月21日(土)　問題数 735

§目 次

§1　旧々数学 I

1.1　式 (式の値，整式，等式)

1.　整式 $P(x)$ を x^2+3x+2 で割ると余りが $x-a$ であり，x^2-6x+9 で割ると余りが $bx+1$ であるとする．ただし，a と b は定数である．このとき，$P(x)$ を $x+2$ で割ったときの余りを a を用いて表すと $\boxed{\text{ア}}$ となり，$x-3$ で割ったときの余りを b を用いて表すと $\boxed{\text{イ}}$ となる．よって，$P(x)$ を x^2-x-6 で割ったときの余りを a, b を用いて表すと $\boxed{\text{ウ}}$ となる．したがって $P(x)$ が x^2-x-6 で割り切れるとき，$a=\boxed{\text{エ}}$, $b=\boxed{\text{オ}}$ となる．

(17 関西学院大学 文系 (全学 2/1) 2(1))

°2.　$P=x^4+9x^3-12x^2+9x-3$ とする．$x=-5-2\sqrt{7}$ のとき，P の値を求めよ．

(17 京都府立大学 生命環境学部 1(1))

3.　$P(0)=1$, $P(x+1)-P(x)=2x$ を満たす整式 $P(x)$ を求めよ．

(17 一橋大学 法・経済・商・社会学部 3)

°4.　$2+\sqrt{10}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，次の値を求めよ．

(1) $a=\boxed{1}$

(2) $b=\sqrt{\boxed{2}\boxed{3}}-\boxed{4}$

(3) $a^2+2ab+b^2+2b=\boxed{5}+\boxed{6}\sqrt{\boxed{7}\boxed{8}}$

(4) $b^2+\dfrac{1}{b^2}=\boxed{9}\boxed{10}$

(5) $b^3+\dfrac{1}{b^3}=\boxed{11}\boxed{12}\sqrt{\boxed{13}\boxed{14}}$

(6) $b^4+\dfrac{1}{b^4}=\boxed{15}\boxed{16}\boxed{17}\boxed{18}$

(17 駿河台大学 S 方式 1)

5.　自然数 n ごとに定まる整数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n で，

$$x^{2n}+y^{2n}=(x+y)^{2n}+\sum_{k=1}^{n}a_k(xy)^k(x+y)^{2(n-k)} \qquad \cdots\cdots (*)$$

を満たすものが存在する．ただし，$(x+y)^0=1$ とする．同様に，n ごとに定ま

る整数 b_1，b_2，$\cdots$，b_n で，

$$x^{2n+1}+y^{2n+1}=(x+y)^{2n+1}+\sum_{k=1}^{n} b_k(xy)^k(x+y)^{2(n-k)+1} \qquad \cdots\cdots (**)$$

を満たすものが存在する．次の $\boxed{}$ をうめよ．ただし，$\boxed{④}$，$\boxed{⑥}$，$\boxed{⑦}$ には n の式で，他の $\boxed{}$ は数値でうめること．

(1) $n=1$ のとき，$x^2+y^2=(x+y)^2+a_1xy$ なので，$a_1=\boxed{①}$ である．

(2) $n=2$ のとき，$x^4+y^4=(x+y)^4+a_1xy(x+y)^2+a_2x^2y^2$ なので，$a_1=\boxed{②}$，$a_2=\boxed{③}$ である．

(3) $(*)$ の式に $x=-y=1$ を代入して $a_n=\boxed{④}$ を得る．

(4) $n=1$ のとき，$b_1=\boxed{⑤}$ である．

(5) $x^{2n+1}+y^{2n+1}=(x+y)A$ と因数分解できる．A に $x=-y=1$ を代入した値は $\boxed{⑥}$ である．よって $(**)$ において，$b_n=\boxed{⑦}$ である．

(17 関西大学 理系 (全学部 2/7) 2)

°6. i を虚数単位とする．$x=1-\sqrt{3}\,i$ のとき，$x^3-4x^2+10x-6$ の値は $\boxed{ク}$ である．

(17 茨城大学 後期 工学部 1(5))

7. n は 2 以上の整数とする．また，a, b は実数とする．以下の問いに答えよ．

(1) x^n-ax-b が $x-1$ で割り切れるとき，b を a を用いて表せ．

(2) x^n-ax-b が x^2+x-2 で割り切れるとき，a, b を n を用いて表せ．

(3) x^n-ax-b が x^2-2x+1 で割り切れるとき，a, b を n を用いて表せ．

(17 奈良女子大学 理・生活環境学部 5)

°8. 等式 $kx^2-kx+(k+1)xy-y^2-2y=0$ が k のどのような値に対しても成り立つような x, y の組は $\boxed{②}$ 組ある．

(17 関西大学 理系 (全学部 2/7) 4(2))

9. $x=\dfrac{2}{3-\sqrt{7}}$，$y=\dfrac{2}{3+\sqrt{7}}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $x+y=\boxed{1}$

(2) $x-y=\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}$

(3) $xy=\boxed{4}$

(4) $x^2+y^2=\boxed{5}\boxed{6}$

(5) $x^2 - y^2 = \boxed{7}\boxed{8}\sqrt{\boxed{9}}$

(6) $x^3 + y^3 = \boxed{10}\boxed{11}\boxed{12}$

(7) $x^3 - y^3 = \boxed{13}\boxed{14}\sqrt{\boxed{15}}$

(17 駿河台大学 B 方式 1)

°10.　整式 $x^3 + ax^2 + bx + 6$ を $x - 1$ で割ると 4 余り，$x + 2$ で割ると -20 余る．このとき a と b の値の組は $(a,\ b) = \boxed{(カ)}$ である．

(17 慶應義塾大学 看護医療学部 1(3))

11.　実数 x について，$A = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 5,\ B = x^2 + 2x + 2$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) 整式 A を整式 B で割った商と余りを求めよ．

(2) A を B の 2 次式で表せ

(3) 設問 (2) で求めた式を用いて，$\dfrac{A}{B}$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

(17 岩手大学 農学部 5)

°12.

x は正の実数で，$x^2 + \dfrac{4}{x^2} = 9$ を満たすとする．このとき

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = \boxed{アイ}$$

であるから，$x + \dfrac{2}{x} = \sqrt{\boxed{アイ}}$ である．さらに

$$x^3 + \frac{8}{x^3} = \left(x + \frac{2}{x}\right)\left(x^2 + \frac{4}{x^2} - \boxed{ウ}\right)$$
$$= \boxed{エ}\sqrt{\boxed{オカ}}$$

である．また

$$x^4 + \frac{16}{x^4} = \boxed{キク}$$

である．

(17 年 センター本試 I・A 第 1 問［1］)

1.2 方程式

13. 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ は 2 つの実数解 $-k$, $-k+4$ をもち，2 次方程式 $x^2+bx+a=0$ は少なくとも 1 つの正の実数解をもつ．ただし，k は自然数とする．このとき，

(i) a, b を k の式で表すと，$a=\boxed{(25)}k-\boxed{(26)}$，$b=k^2-\boxed{(27)}k$ である．

(ii) $a+b$ の値が最大のとき $b=\boxed{(28)(29)}$ であり，$a+b$ の値が最小のとき $b=\boxed{(30)(31)}$ である．

(17 慶應義塾大学 薬学部 1(4))

14. 実数 p, q, r に対して，x の 3 次多項式 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ を考える．以下の問に答えなさい．

(1) 複素数 α に対して，$f(\alpha)=0$ であるなら，$f(\overline{\alpha})=0$ であることを示しなさい．ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である．つまり，α の実部，虚部を各々 s, t とすれば，$\alpha=s+ti$, $\overline{\alpha}=s-ti$ である．ただし，i は虚数単位である．

(2) α, β, γ を 3 次方程式 $f(x)=0$ の 3 つの解とする．このとき，α, β, γ の少なくとも一つは実数であることを示しなさい．

(17 兵庫県立大学 経済・経営学部 3)

15. k を正の実数とし，2 次方程式 $8x^2-12kx+3k^2+8=0$ は $\sin\theta+2\cos\theta$, $2\sin\theta+\cos\theta$ を解に持つとする．ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ とする．以下の問いに答えなさい．

(1) $\sin\theta+\cos\theta$, $\sin\theta\cos\theta$ をそれぞれ k を用いて表しなさい．

(2) k の値を求めなさい．

(3) $\sin\theta$, $\cos\theta$ の値を求めなさい．

(17 首都大学東京 都市教養学部 (文系) 1)

16. x の 2 次方程式 $x^2+(a+1)x+a^2+a-1=0$ が実数解をもつような実数 a の値の範囲は

$$\boxed{}\leqq a\leqq\boxed{}$$

である．

a がこの範囲の値をとるとき，上の 2 次方程式の解 x がとり得る値の範囲は

$$\boxed{}\leqq x\leqq\boxed{}$$

である．

方程式 $x^2+(a+1)x+a^2+a-1=0$ を満たす整数の組 $(x,\ a)$ は全部で $\boxed{}$ 個ある．

(17 東京理科大学 理・薬学部)

°17. a, b を実数とする．4 次方程式 $x^4+ax^3+bx^2-4=0$ が複素数 $1-i$ を解にもつとき，a, b の値を求め，この方程式の他の解を求めよ．

(17 岡山県立大学 中期 情報工学部 1(1))

°18. p, q を 0 でない実数の定数とし，2 次方程式 $2x^2+px+2q=0$ の解を α, β とする．このとき，$\alpha^2+\beta^2$ を p, q で表すと $\boxed{\text{ア}}$ となる．さらに，2 次方程式 $x^2+qx+p=0$ の 2 つの解が $\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ であるとき，$p=\boxed{\text{イ}}$，$q=\boxed{\text{ウ}}$ である．

(17 関西学院大学 理工・総合政策・教育 (全学 2/1) 1(1))

19. 係数が実数の 3 次方程式 $x^2+ax^2+bx+a^2=0$ の解が α, $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$ (ただし，i は虚数単位とし，α, β は 0 以外の実数) とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a, b, a^2 を α, β を用いて表せ．

(2) a, b の満たす条件を $(a,\ b)$ 平面に図示せよ．

(17 東京女子医科大学 医学部 2)

所見 :「(a,b) 平面」と書くかな？

1.3 不等式

20. α, β, γ を実数とし，また a, b, c を正の実数とする．

(1) x, y, z の式 $\{x-(\cos\alpha)y-(\cos\beta)z\}^2+\{(\sin a)y-(\sin\beta)z\}^2$ を展開して簡単な形にせよ．

(2) 等式 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ が満たされているものとする．このとき不等式

$$a+b+c \geqq 2\sqrt{ab}\cos\alpha+2\sqrt{ac}\cos\beta+2\sqrt{bc}\cos\gamma$$

が成り立つことを示せ．

(3) $a+b+c \geqq \sqrt{3ab}+\sqrt{3ac}-\sqrt{bc}$ が成り立つことを示せ．また等号が成立するとき，比 $a:b:c$ を求めよ．

(17 三重大学 後期 工・教育学部 1)

21. a, b を自然数とし，不等式

$$\left|\frac{a}{b}-\sqrt{7}\right|<\frac{2}{b^4} \qquad \text{(A)}$$

を考える．次の問いに答えよ．ただし，$2.645 < \sqrt{7} < 2.646$ であること，$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい．

(1) 不等式 (A) を満たし $b \geqq 2$ である自然数 a, b に対して
$$\left|\frac{a}{b} + \sqrt{7}\right| < 6$$
であることを示せ．

(2) 不等式 (A) を満たす自然数 a, b の組のうち，$b \geqq 2$ であるものをすべて求めよ．

(17 大阪大学 理系 3)

22.

次の問いに答えよ．

(1) $x > 0$ のとき $\log x < 4\sqrt[4]{x}$ が成り立つことを証明せよ．

(2) x, y, z, w を正の実数とする．次の不等式を証明せよ．
$$\frac{4}{\sqrt[4]{xyzw}} \leqq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}$$

(3) a, b, c, d を正の実数とする．4 次式 $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d$ は正の実数 p, q, r, s を用いて
$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = (x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$$
と因数分解されるとする．このとき $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s}$ を，a, b, c, d のうち必要なものを用いて表せ．

(4) (3) において，次の不等式が成り立つことを証明せよ．
$$|\log d| < \max\left(a,\ \frac{c}{d}\right)$$
ただし，二つの実数 x, y のうち最大の数を $\max(x,\ y)$ で表す．たとえば，$\max(1,\ 2) = 2$，$\max(3,\ 3) = 3$ である．

(17 広島大学 後期 理学部 (数学) 3)

°23.

$a > 0$ とする．2 次不等式 $x^2 + (2-a)x - 2a < 0$ を解くと，$\boxed{\text{ア}} < x < \boxed{\text{イ}}$ となり，2 次不等式 $x^2 + 2(a-1)x - 4a > 0$ を解くと，$x < \boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}} < x$ となる．

この 2 つの 2 次不等式の解が共通範囲を持たないような a の値の範囲は，$\boxed{\text{オ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{カ}}$ となる．

(17 立命館大学 文系 (全学統一 2/2) 1(1))

1.4 最大・最小

24. 実数 $x,\ y,\ z$ が

$$x+y+z=1, \quad x+2y+3z=5$$

を満たすとする.

(1) $x^3+y^3+z^3-3xyz$ の最小値を求めよ.

(2) $z \geqq 0$ のとき, xyz が最大となる z の値を求めよ.

(17 大阪大学 文系 2)

25. $a>0$ とし, 平面上に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ 3)$, $\mathrm{B}(-4,\ 1)$, $\mathrm{C}(0,\ 5)$ をとる. また, 線分 BC 上の点 P に対して, 点 P から x 軸に引いた垂線と x 軸との交点を Q とする. 点 P が線分 BC 上を動くときの三角形 PQA の面積の最大値を $S(a)$ とすると, $\beta=\boxed{(セ)}$ として

$$S(a)=\begin{cases}\boxed{(ソ)} & (0<a<\beta) \\ \boxed{(タ)} & (a \geqq \beta)\end{cases}$$

と表せる.

(17 慶應義塾大学 看護医療学部 2(4))

°26. 点 O の東 30 m に点 A, 点 O の北 40 m に点 B がある. P は点 O から点 A に向って出発し, 同時に Q は点 A から点 B に向って出発する. どちらも毎秒 1 m で進むとき, PQ の距離が最小となるのは, $\boxed{アイ}$ 秒である. また, その時の距離は $\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$ m である.

(16 国士舘大学 理工・政経・法・文・21 世紀アジア・経営学部 5)

27. 辺の長さが 1 の正方形 ABCD の辺 BC 上の点 P, 辺 AD 上の点 Q について, 直線 AP と直線 BQ の交点を R とするとき, $\angle\,\mathrm{ARQ}=\dfrac{\pi}{4}$ であるとする. 三角形 ARQ の面積を S_1, 三角形 BRP の面積を S_2, 線分 BP の長さを a とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\angle\mathrm{PAB}+\angle\mathrm{QBA}$ の大きさを求めよ. また, 線分 AQ の長さが $\dfrac{1-a}{1+a}$ に等しいことを示せ.

(2) S_1 と S_2 を a で表せ.

(3) $\sqrt{S_1S_2}$ の最大値と, そのときの a の値を求めよ.

(17 岡山県立大学 情報工学部 2)

°28.

a を定数とし，$g(x)=x^2-2(3a^2+5a)x+18a^4+30a^3+49a^2+16$ とおく．2 次関数 $y=g(x)$ のグラフの頂点は

$$\left(\boxed{\text{セ}}a^2+\boxed{\text{ソ}}a,\ \boxed{\text{タ}}a^4+\boxed{\text{チツ}}a^2+\boxed{\text{テト}}\right)$$

である．

a が実数全体を動くとき，頂点の x 座標の最小値は $-\dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である．次に，$t=a^2$ とおくと，頂点の y 座標は

$$\boxed{\text{タ}}t^2+\boxed{\text{チツ}}t+\boxed{\text{テト}}$$

と表せる．したがって，a が実数全体を動くとき，頂点の y 座標の最小値は $\boxed{\text{ノハ}}$ である．

(17 年 センター本試験 I・A 第 1 問 [3])

29. a を実数とする．x の 2 次関数 $f(x)=x^2+ax+1$ の区間 $a-1 \leqq x \leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $m\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(2) $m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ．

(3) a が実数全体を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ．

(17 岡山大学 経済・教育学部 3)

30. 定数 a は $0 \leqq a \leqq 1$ をみたすとする．座標平面上に 4 点 O(0, 0)，A(1, 0)，B(1, 2)，C(a, 0) をとる．点 P は線分 OA 上，点 Q は線分 OB 上にあり，PQ ⊥ OA をみたすものとする．点 P が点 O と点 C 以外を動くときの △PQC の面積の最大値を S とする．

(1) $a=1$ のときの S を求めよ．

(2) S を a を用いて表せ．

(17 千葉大学 教育部 1)

1.5　関数とグラフ

31. $y=|x^2-3x-4|+3x+3$ のグラフを C，$y=a(x-4)+15$ のグラフを L とする．ただし，a は定数である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) C の概形をかけ．

(2) $-1 \leqq x \leqq 4$ における C と L の共有点の x 座標を a を用いて表せ．

(3) C と L の共有点の個数は，定数 a の値によってどのように変わるか．

(17 滋賀大学 教育・経済学部 2)

°32.　関数 $y = \dfrac{2}{e^x + 1}$ の逆関数を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(17 茨城大学 工学部 2(1))

33.　$a,\ b$ を実数とする．$y = |x^2 - 4|$ で表される曲線を C とし，$y = ax + b$ で表される直線を l とする．

(1) l が点 $(-2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど3つの共有点をもつような $a,\ b$ の条件を求めよ．

(2) l と C がちょうど3つの共有点をもつような点 $(a,\ b)$ の軌跡を ab 平面上に図示せよ．

(17 東北大学 理・医・歯・薬・工・農学部 1)

°34.　$a,\ b$ を定数とし，$a \neq 0$ とする．このとき次の 2 つの 2 次関数を考える．

$$y = x^2 + bx + 2b - 6 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$y = ax^2 + 2ax + a + 6 \qquad \cdots\cdots ②$$

① のグラフと直線 $y = x + 1$ の交点を P，Q とおくと，線分 PQ の長さは $b = \boxed{\text{ア}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{イ}}$ をとる．また，① のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に p だけ平行移動したとき ② のグラフに重なったとすると，$a = \boxed{\text{ウ}}$，$b = \boxed{\text{エ}}$，$p = \boxed{\text{オ}}$ である．

(17 関西学院大学 文系 (全学 2/1) 1(1))

1.6　集合と論理

°35.

実数 x に関する 2 つの条件 $p,\ q$ を

$$p : x = 1$$
$$q : x^2 = 1$$

とする．また，条件 $p,\ q$ の否定をそれぞれ $\overline{p},\ \overline{q}$ で表す．

(1) 次の $\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，下の⓪〜③のうちか

ら一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

q は p であるための $\boxed{\text{ケ}}$．

$\overline{p}$ は q であるための $\boxed{\text{コ}}$．

(p または $\overline{q}$) は q であるための $\boxed{\text{サ}}$．

($\overline{p}$ かつ q) は q であるための $\boxed{\text{シ}}$．

0 必要条件だが十分条件でない
1 十分条件だが必要条件でない
2 必要十分条件である
3 必要条件でも十分条件でもない

(2) 実数 x に関する条件 r を

$$r : x > 0$$

とする．次の $\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，下の 0 〜 7 のうちから一つ選べ．

3 つの命題

A :「(p かつ q) $\Longrightarrow r$」
B :「$q \Longrightarrow r$」
C :「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」

の真偽について正しいものは $\boxed{\text{ス}}$ である．

0 A は真，B は真，C は真
1 A は真，B は真，C は偽
2 A は真，B は偽，C は真
3 A は真，B は偽，C は偽
4 A は偽，B は真，C は真
5 A は偽，B は真，C は偽
6 A は偽，B は偽，C は真
7 A は偽，B は偽，C は偽

(17 年　センター本試　I・A 第 1 問［2］)

°36.　1 以上 100 以下のすべての自然数の集合を U とする．U の部分集合 A およ

び B を

$$A=\{n \mid n \in U \text{ かつ } n \text{ を } 5 \text{ で割ると } 2 \text{ 余る }\},$$
$$B=\{n \mid n \in U \text{ かつ } n \text{ を } 7 \text{ で割ると } 1 \text{ 余る }\}$$

と定めるとき，集合 $A \cup B$ に属する自然数の総和は $\boxed{\text{(い)}}$ である．

(17 慶應大学 医学部 1(2))

°37.　2 つの集合

$$A=\{x \mid x \text{ は整数},\ 1 \leqq x \leqq 1000\}$$
$$B=\{x \mid x \text{ は } 30 \text{ と互いに素な自然数 }\}$$

の共通部分 $A \cap B$ の要素の個数を求めよ．

(17 愛媛大学 工・教育・農学部 1(1))

♦38.　n を自然数とする．0 でない複素数からなる集合 M が次の条件 (I)，(II)，(III) を満たしている．

(I) 集合 M は n 個の要素からなる．

(II) 集合 M の要素 z に対して，$\dfrac{1}{z}$ と $-z$ はともに集合 M の要素である．

(III) 集合 M の要素 z，w に対して，その積 zw は集合 M の要素である．ただし，$z=w$ の場合も含める．

このとき，次の問に答えよ．

(1) 1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ．

(2) n は偶数であることを示せ．

(3) $n=4$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ．

(4) $n=6$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ．

(17 名古屋大学 理・医・工・農・情報学部 4)

39.　座標平面上に原点 O，点 A(1, a)，点 B(s, t) がある．以下の問いに答えよ．

(1) $a=1$ のとき，△OAB が正三角形となるような (s, t) をすべて求めよ．

(2) $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ．

(3) △OAB が正三角形であり，a が有理数であるとき，s と t のうち少なくとも 1 つは無理数であることを示せ．

(17 九州大学 文・教育・法・経済・医 (看護) 学部 2)

40. $\dfrac{\log 5}{\log 7}$ は無理数であることを示せ.

(17 宮城教育大学 教育学部 (中等教育=数学) 1(1))

1.7 整数

°41. $\dfrac{148953}{298767}$
を約分して，既約分数にせよ.

(17 横浜市立大学 医学部 1(1))

42. n は正の整数とする．3 次方程式 $x^3 - nx^2 + (n+3)x - 2 = 0$ が正の整数解をもつとき，その整数解と残りの解を求めよ.

(17 岡山県立大学 中期 情報工学部 1(2))

°43. 座標平面上の 2 点 A(5, 4)，B(−1, −6) を直径の両端とする円を C とし，線分 AB の垂直二等分線を l とする．以下の問いに答えよ.

(1) 円 C と直線 l の方程式をそれぞれ求めよ.

(2) 円 C 上にあり，x 座標と y 座標がともに整数である点をすべて求めよ.

(3) 直線 l 上にあり，x 座標と y 座標がともに整数である点をすべて求めよ.

(17 奈良女子大学 理学部 1)

♦44. 次の問に答えよ.

(1) 次の条件 $(*)$ を満たす 3 つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ.

$$(*) \quad a < b < c \text{ かつ } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \text{ である.}$$

(2) 偶数 $2n$ $(n \geqq 1)$ の 3 つの正の約数 $p,\ q,\ r$ で，$p > q > r$ と $p + q + r = n$ を満たす組 $(p,\ q,\ r)$ の個数を $f(n)$ とする．ただし，条件を満たす組が存在しない場合は，$f(n) = 0$ とする．n が自然数全体を動くときの $f(n)$ の最大値 M を求めよ．また，$f(n) = M$ となる自然数 n の中で最小のものを求めよ.

(17 名古屋大学 文・教育・法・経済・情報学部 3)

°45. 10 以下の正の素数は，2, 3, 5, 7 に限られ，それらは，103 の約数ではない．この事実を用いて，103 は素数であることを示しなさい.

(17 兵庫県立大学 経済・経営学部 1(2))

°46.　1 次不定方程式 $275x+61y=1$ のすべての整数解を求めよ．

(17 愛媛大学 工・教育・農学部 1(3))

47.　次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ について，次の条件 (ア) と (イ) が同値であることを示せ．

(ア) n が整数ならば $f(n)$ も整数である．

(イ) $f(0)$ が整数であり，かつ，すべての整数 n について $f(n+1)-f(n)$ も整数である．

(2) 素数 p, 整数 q に対して，関数 $f(x)$ を次のように定める．

$$f(x)=\frac{1}{p}x^2+\frac{1}{q}x$$

このとき，条件「n が 3 の倍数のとき，$f(n)$ も 3 の倍数である」をみたすような $p,\ q$ の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ．

(17 富山大学 人間発達科学・経済学部 1)

°48.　整式 $P(x)=x^4+2x^3-2x-1$ について，次の各問に答えよ．

(1) $P(x)$ を因数分解せよ．さらに，$x>1$ のとき，$P(x)>0$ であることを示せ．

(2) 自然数 m に対し，$m(m+1)^3$ は偶数であることを証明せよ．

(3) 次の条件 $(*)$ を満たす自然数 k の中で，最も大きいものを求めよ．

$(*)$　3 以上のすべての奇数 x について，$P(x)$ は k の倍数である．

(17 宮崎大学 教育学部 10)

49.　以下の各問に答えよ．

(1) $xy-x-11y+11$ を因数分解せよ．

(2) $x,\ y$ を 0 でない整数とする．$\dfrac{11}{x}+\dfrac{1}{y}=1$ を満たす $x,\ y$ の組をすべて求めよ．

(3) $x,\ z,\ w$ を 0 でない整数とする．$2z-3w=1$ と $\dfrac{11}{x}-\dfrac{1}{2z}+\dfrac{1}{3w}=1$ を同時に満たす $x,\ z,\ w$ の組をすべて求めよ．

(17 茨城大学 工学部 2)

50.　自然数 n に対して，$x+2y+5z=10n$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の総数を a_n とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $a_1,\ a_2$ を求めよ．

(2) $b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくとき，b_n を n の式で表せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(17 福井大学 医学部 1)

◊51. a を 3 で割り切れない正の整数とする．a を 3 で割ったときの商を b，余りを c とする．次の問いに答えよ．

(1) $c=2$ のとき，$2a+1=as+3t$ を満たす負でない整数 s，t を b を用いて表せ．

(2) n を $n \geqq 2a-2$ を満たす整数とする．このとき $n=as+3t$ を満たす負でない整数 s，t が存在することを示せ．

(17 東北大学 文・教育・法・経済・医 (看護) 学部 3)

所見：東北大は「存在する」ことを示す問題が好きですね．

52. 自然数の 2 乗となる数を平方数という．

(1) 自然数 a，n，k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，

$$a \geqq k^2+2k-1$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n(n+1)+7$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ．

(17 北海道大学 文系 1)

53. 負でない整数 n に対して，$n^2-40n+319$ が正の素数であるための必要十分条件は $n=30$ または，$n=10$ であることを示しなさい．

(17 兵庫県立大学 経済・経営学部 1(1))

54. 座標平面上の点 $(x,\ y)$ は，x，y がともに整数のとき，格子点という．関数

$$f(x)=\frac{1}{3}(x^3+3x^2-x-2)$$

について，次の問に答えよ．

(1) $y=f(x)$ のグラフ上には格子点が存在しないことを示せ．

(2) n が整数のとき，点 $(n,\ f(n))$ における $y=f(x)$ の接線を l とする．直線 l 上には無限に多くの格子点が存在することを示せ．

(17 香川大学 医学部 2)

◊55. 定数 p は素数とし，条件

$$a(ab-p^2)=c^2, \quad b \leqq 2c$$

をみたす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ を考える．a が素数であるとき，次の問いに答えよ．

(1) 自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を，p を用いて表せ.

(2) $a,\ b,\ c$ の最大公約数が 1 となるような自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を，p を用いて表せ.

(17 東京慈恵会医科大学 医学部 3)

56. 次の条件 (i)，(ii) をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ.

(i) N の正の約数は 12 個.

(ii) N の正の約数を小さい方から順に並べたとき，7 番目の数は 12.

ただし，N の約数には 1 と N も含める.

(17 東京工業大学 1)

57. 1000 から 2017 までの 4 桁の整数について，以下の問に答えよ.

(1) 3 と 4 の少なくとも一方で割り切れる整数の個数を求めよ.

(2) 1000 や 2002 のように異なる 2 種類の数字から成る整数の個数を求めよ.

(3) 2017 のように異なる 4 種類の数字から成る整数の個数を求めよ.

(17 岐阜大学 教育・医・工・地域科学・応用生物科学部 1)

58. a を実数とする．2 つの等式

$$3x + ay = 0, \quad (a+2)x - y = 3$$

を同時にみたす整数 $x,\ y$ が存在するとき，a の値とそのときの $x,\ y$ の値をそれぞれ求めよ.

(17 大阪府立大学 中期 工学域 1(2))

59.

(1) 百の位の数が 3, 十の位の数が 7, 一の位の数が a である 3桁(けた)の自然数を $37a$ と表記する.

$37a$ が 4 で割り切れるのは

$$a = \boxed{ア},\quad \boxed{イ}$$

のときである．ただし，$\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$ の解答の順序は問わない.

(2) 千の位の数が 7, 百の位の数が b, 十の位の数が 5, 一の位の数が c である 4 桁の自然数を $7b5c$ と表記する.

$7b5c$ が 4 でも 9 でも割り切れる $b,\ c$ の組は，全部で $\boxed{ウ}$ 個ある．これらのうち，$7b5c$ の値が最小になるのは $b = \boxed{エ}$, $c = \boxed{オ}$ のときで，$7b5c$ の値が最大になるのは $b = \boxed{カ}$, $c = \boxed{キ}$ のときである.

また，$7b5c = (6 \times n)^2$ となる b, c と自然数 n は

$$b = \boxed{\text{ク}}, \quad c = \boxed{\text{ケ}}, \quad n = \boxed{\text{コサ}}$$

である．

(3) 1188 の正の約数は全部で $\boxed{\text{シス}}$ 個ある．

これらのうち，2 の倍数は $\boxed{\text{セソ}}$ 個，4 の倍数は $\boxed{\text{タ}}$ 個ある．

1188 のすべての正の約数の積を 2 進法で表すと，末尾には 0 が連続して $\boxed{\text{チツ}}$ 個並ぶ．

(17 年 センター本試験 I・A 第 4 問)

60. (1) 自然数 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93 の中に，素数は $\boxed{16}$ 個ある．

(2) 2 つの自然数 m, n の最大公約数が 15，最小公倍数が 90 であるとき，$(m, n) = \left(\boxed{17}\boxed{18}, \boxed{19}\boxed{20}\right)$ である．ただし，$m < n < 90$ とする．

(3) 3827 と 1763 の最大公約数は，$\boxed{21}\boxed{22}$ である．

(4) 2 つの自然数 m, n を 7 で割った余りがそれぞれ 5, 6 であるとき，$m + n$, mn を 7 で割った余りは，それぞれ $r1\boxed{23}$，$r2 = \boxed{24}$ である．

(5) 自然数 a は 3024 である．a を素因数分解すると，異なる素因数の個数は $\boxed{25}$ 個あり，a の正の約数の個数は，$\boxed{26}\boxed{27}$ 個である．

(6) リンゴが 92 個ある．9 個入りの箱と 15 個入りの箱に詰めたら 7 箱できて，5 個余ったとき，9 個入りの箱数は，$\boxed{28}$ である．

(7) 自然数 N は 7 進法で表すと 2 つの数字 a，b を並べた 2 桁の自然数 ab であり，9 進法で表すと数字の並び方が反対である 2 桁の自然数 ba である．このとき，$a = \boxed{29}$，$b = \boxed{30}$ であり，N を 10 進法で表すと $N = \boxed{31}\boxed{32}$ である．

(17 駿河台大学 B 方式 2)

61. 整数 n がある整数の 2 乗で表されるとき，n は平方数であるという．2 つの平方数の和で表される整数全体の集合を A とする．たとえば，$0 = 0^2 + 0^2$ より $0 \in A$ であり，また，$13 = 2^2 + 3^2$ より $13 \in A$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 整数 a, b, x, y に対して，等式

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$$

が成り立つことを示せ．

(2) 2 つの整数 α, β が A の要素であるとき，積 $\alpha\beta$ は A の要素であることを示せ．

(3) 25, 50, 1250 のそれぞれが A の要素であることを示せ．

(17 静岡大学 理 (生物・地球)・教育・農学部 4)

62. 次の問いに答えよ．ただし，${}_m\mathrm{C}_k$ は m 個から k 個取る組合せの総数を表す.

(1) $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ に対して，${}_7\mathrm{C}_k$ は 7 の倍数であることを示せ.

(2) p は素数とし，k は $1 \leqq k \leqq p-1$ を満たす自然数とする．${}_p\mathrm{C}_k$ は p の倍数であることを示せ.

(3) すべての自然数 n に対して，n^7-n は 7 の倍数であることを数学的帰納法を用いて示せ.

(17 金沢大学 人間社会学域 2)

63. (1) 自然数 n の $n!$ について，下 3 桁に 0 が 3 個並ぶ n の最小値は, $\boxed{\text{アイ}}$ である.

(2) $n!$ を $1375n$ で割ったとき，余りが出ない n の最小値は, $\boxed{\text{ウエ}}$ である.

(3) $\dfrac{100!}{1375}$ の 1 の位から 0 が並ぶ桁数は, $\boxed{\text{オカ}}$ である.

(16 国士舘大学 理工・政経・法・文・21 世紀アジア・経営学部 4)

64. 多項式

$$Z=3p^4+4p^3q+2p^2q^2+4pq^3+3q^4$$

を考える．ただし，$p,\ q$ は自然数とする．次の問いに答えよ.

(1) $p+q=a,\ pq=b$ とするとき，Z を a と b を用いて表せ.

(2) $Z=3^2\times 11^2\times 19$ となるときの自然数 $p,\ q$ の組をすべて求めよ.

(17 名古屋市立大学 芸術工学部 5)

65. 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定めると，一般項は $a_n=\boxed{\text{ア}}$ である．このとき，a_n が 7 の倍数となるときの n の最小値を d とすると $d=\boxed{\text{イ}}$ であり，$n=7k+d\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して，a_n は 7 の倍数になる．この数列 $\{a_n\}$ の第 1 項から第 100 項までの項をすべて掛け合わせた数 $N=a_1a_2a_3\cdots a_{100}$ に対して，N を素因数分解したとき，素因数 7 の個数は $\boxed{\text{ウ}}$ 個であり，素因数 5 の個数は $\boxed{\text{エ}}$ 個である．また，N を 3 で割った余りは $\boxed{\text{オ}}$ である.

(17 同志社大学 文系 (全学部 2/5) 1(1))

66. $a,\ b$ を正の整数とするとき，次を証明せよ.

(1) a^3-a は 3 の倍数である.

(2) $a-b$ が 3 の倍数ならば，a^3-b^3 は 9 の倍数である.

(3) a^3-b^3 は，3 の倍数ならば 9 の倍数である．

(17 千葉大学 教育学部 3)

67. 自然数の 2 乗となる数を平方数という．

(1) 自然数 $a,\ n,\ k$ に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，

$$a \geqq k^2+2k-1$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n(n+1)+14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ．

(17 北海道大学 理系 1)

68. $x,\ y$ を自然数とするとき，$2x^2+xy-5x-y^2+y-30=0$ であるような組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(17 京都府立大学 生命環境学部 1(2))

◊69. 連立方程式

$$\begin{cases} x^2=yz+7 \\ y^2=zx+7 \\ z^2=xy+7 \end{cases}$$

を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で $x \leqq y \leqq z$ となるものを求めよ．

(17 一橋大学 法・経済・商・社会学部 2)

◊70. 自然数 n の正の約数のうち，2 番目に大きいものを $\langle\!\langle n \rangle\!\rangle$ と表す．ただし，$2 \leqq n \leqq 100$ とする．たとえば，$\langle\!\langle 5 \rangle\!\rangle=1$, $\langle\!\langle 9 \rangle\!\rangle=3$ である．次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=2}^{8} \langle\!\langle k \rangle\!\rangle$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{20} \langle\!\langle 3k \rangle\!\rangle$ を求めよ．

(3) $\langle\!\langle n \rangle\!\rangle=7$ を満たす n をすべて求めよ．

(4) $\langle\!\langle n^2 \rangle\!\rangle=n$ ならば，$\langle\!\langle n \rangle\!\rangle=1$ であることを証明せよ．

(17 年 立命館大 全学統一 文系 2 月 2 日 3)

◊71. 自然数 n の正の約数のうち，2 番目に大きいものを $\langle\!\langle n \rangle\!\rangle$ と表す．ただし，$2 \leqq n \leqq 100$ とする．たとえば，$\langle\!\langle 5 \rangle\!\rangle=1$, $\langle\!\langle 9 \rangle\!\rangle=3$ である．次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=2}^{8} \langle\!\langle k \rangle\!\rangle$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{20}\langle\!\langle 3k\rangle\!\rangle$ を求めよ．

(3) $\langle\!\langle n\rangle\!\rangle=7$ を満たす n をすべて求めよ．

(4) $\langle\!\langle n^2\rangle\!\rangle=n$ ならば，$\langle\!\langle n\rangle\!\rangle=1$ であることを証明せよ．

(17 立命館大学 文系 (全学統一 2/2) 3)

◇72. n を自然数とする．次の問いに答えよ．

(1) 8^n を 11 で割った余りが 3 となる n をすべて求めよ．

(2) 11^n を 17 で割った余りが 4 となる n をすべて求めよ．

(3) (1) の条件と (2) の条件を同時に満たす n をすべて求めよ．

(17 秋田大学 医学部 7)

73. 自然数 n に対して

$$A_n=\{x\,|\,x\text{ は，各位の数が 1 または 2 である } n \text{ 桁の自然数}\}$$

とする．たとえば $A_1=\{1,\ 2\}$，$A_2=\{11,\ 12,\ 21,\ 22\}$ となる．以下の問いに答えよ．

(1) A_3 の要素で，2^3 で割り切れるものを求めよ．

(2) A_4 の要素で，2^4 で割り切れるものを求めよ．

(3) すべての n に対し，A_n の要素で 2^n で割り切れるものが存在することを示せ．

(17 奈良女子大学 後期 理学部 (数物・化学生命環境) 3)

74. $m,\ n$ を 1 以上 10 以下の整数とする．3 点 O$(0,\ 0)$，A$(3,\ 4)$，B$(m,\ n)$ は同一直線上にないとする．

(1) △OAB の面積を最小にする B$(m,\ n)$ を求めよ．

(2) ∠AOB を最小にする B$(m,\ n)$ を求めよ．

(17 一橋大学 後期 経済学部 4)

75. 以下の問いに答えよ．

(1) $p,\ q$ は素数で $p<q$ とする．n は 50 以下の正の整数とする．このとき，$pq(n-p^2-q^2)$ がある正の整数の 2 乗となるような組 $(p,\ q,\ n)$ をすべて求めよ．

(2) n は正の整数とし，p は 3 以上の素数とする．$n^2+2pn+2p^2$ がある整数の 2 乗となるとき，n を p の式で表せ．

(17 千葉大学 後期 医・工・理 (数・情) 学部 6)

◊76. 次の問に答えよ．ただし，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい．

(1) 100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数を持たないものの個数を求めよ．

(2) 100 桁の自然数で，2 と 5 以外の素因数を持たないものの個数を求めよ．

(17 京都大学 文系 (総合人間・文・教育・法・経済学部) 2)

77. 以下の問いに答えよ．

(1) 2017 と 225 の最大公約数を求めよ．

(2) 225 との最大公約数が 15 となる 2017 以下の自然数の個数を求めよ．

(3) 225 との最大公約数が 15 であり，かつ 1998 との最大公約数が 111 となる 2017 以下の自然数をすべて求めよ．

(17 九州大学 文・教育・法・経済・医 (看護) 学部 4)

78. 次の問いに答えよ．

(1) a, b を整数の範囲で動かして考えるとき，整数 a^2+3b^2 を 6 で割ったときの余りとして実際に得られるものを 0 から 5 の中からすべてあげよ．

(2) $a^2+3b^2=2c^2$ を満たす整数 a, b, c は，$a=b=c=0$ に限ることを示せ．

(3) 実数 x, y が $x^2+3y^2=2$ を満たすとき，x と y の少なくとも一方が無理数であることを示せ．

(17 お茶の水女子大学 後期 理学部 (数学・情報科学) 1)

79. （i）a, b, c は整数で，$1 \leqq a \leqq b \leqq c$ を満たすとする．このとき，等式 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ が成り立つような組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．

(ii) 3 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の逆数の和が 1 となる確率を求めよ．

(17 東京農工大学 工・農学部 1(2))

◊80. 定数 p は素数とし，条件

$$a(ab-p^2)=c^2, \quad b \leqq 2c$$

をみたす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ を考える．a が素数であるとき，次の問いに答えよ．

(1) 自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を，p を用いて表せ．

(2) a, b, c の最大公約数が 1 となるような自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を，p を用いて表せ．

(17 年 東京慈恵医大 3)

°81. $23x+13y=5$ を満たす整数 $x,\ y$ の組で $|x|+|y|$ が最小になるものを求めよ.

(17 福岡教育大学 中等教育 (数学) 1(2))

82. n を 4 以上の整数とする.

(1) $(n+1)(3n^{-1}+2)(n^2-n+1)$ と表される数を n 進法の小数で表せ.

(2) 3 進数 $21201_{(3)}$ を n 進法で表すと $320_{(n)}$ となるような n の値を求めよ.

(3) 正の整数 N を 3 倍して 7 進法で表すと 3 桁の数 $abc_{(7)}$ となり, N を 4 倍して 8 進法で表すと 3 桁の数 $acb_{(8)}$ となる. 各位の数字 $a,\ b,\ c$ を求めよ. また, N を 10 進法で表せ.

(17 徳島大学 理工・医 (保健) 学部 2)

°83. 自然数 $a,\ b$ は $a+2b=126$ をみたす. a と b の最大公約数が 9 のとき, このような $a,\ b$ をすべて求めよ.

(17 岩手大学 教育・農・人文社会科学部 1(2))

84. n を負でない整数とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $2x+2y+z=n$ を満たす負でない整数 $x,\ y,\ z$ の組の総数を, $n=4$ と $n=5$ のそれぞれの場合に求めよ.

(2) $2x+2y+z=n$ を満たす負でない整数 $x,\ y,\ z$ の組の総数を, n を用いて表せ.

(3) $2x+2y+z \leqq n$ を満たす負でない整数 $x,\ y,\ z$ の組の総数を, n を用いて表せ.

(17 東北大学 後期 理 5・経済 4)

85. 5 進法で表された 2 つの数 $123_{(5)}$ と $24_{(5)}$ の積を 5 進法で表せ.

(17 札幌医科大学 1(3))

86. 自然数 a を 7 で割った余りを $R(a)$ と書くことにする. このとき以下の問いに答えよ.

(1) すべての自然数 n に対して $R(2^{n+3})=R(2^n)$ となることを示せ.

(2) $R(2^{2017})$ を求めよ.

(3) 自然数 m が $R(2^{2017}m+2^{29})=5$ を満たすとき, $R(m)$ の値を求めよ.

(17 岡山大学 経済・教育学部 2)

87. $32^x\cdot 128^y=8$ となる整数 $x,\ y$ の組で $|x-y|$ が最小となるものは 1 組であり, $x=2,\ y=-1$ であることを示せ.

(17 宮城教育大学 教育学部 (中等教育=数学) 1(2))

°88. 方程式 $11x + 15y = 100$ の整数解をすべて求めよ.

(17 信州大学 後期 理・繊維学部 1(2))

1.8 その他

89. 家から 1.4 km 離れた駅を 8 時 30 分に出る電車に乗るために，妹の楓(かえで)さんは 8 時に家を出た．妹が，お弁当を忘れていることに気がついた兄の国士君が 8 時 18 分に家を出て自転車で追いかけた．妹の歩く速さを毎分 70m，兄の自転車の速さを毎分 280m とすると，いつ兄が妹に追いつくのかを求める．8 時 x 分に追いつくものとして，その時の距離を考える．

妹が x 分歩いたとすれば妹の歩いた距離は，$\boxed{\text{アイ}}.x$ m である．

兄が自転車で走った距離は，$\boxed{\text{ウエオ}}\left(x - \boxed{\text{カキ}}\right)$ m である．

一方，兄が駅までにかかる時間は，$\boxed{\text{ク}}$ 分である．

兄は，8 時 $\boxed{\text{ケコ}}$ 分に，妹にお弁当を渡すことができるのだ．

(16 国士舘大学 理工・政経・法・文・21 世紀アジア・経営学部 3)

1.9 複素数

90. 複素数平面上の原点 O と 2 点 A$(2 - 4\sqrt{3}i)$，B$(3 + \sqrt{3}i)$ を考える．ただし，i を虚数単位とする．三角形 OAB の外側に，3 辺 AB，BO，OA をそれぞれ 1 辺とする正三角形 ALB，BMO，ONA を作る．以下の問いに答えなさい．

(1) 点 L，M，N を表す複素数をそれぞれ求めなさい．

(2) 直線 OL と直線 AM の交点を P とする．点 P を表す複素数を求めなさい．

(3) 3 点 B，P，N が一直線上にあることを示しなさい．

(17 首都大学東京 都市教養・都市環境・システムデザイン・健康福祉学部 2)

91. 複素数平面上の点 z が原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周上を動くとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 複素数 $w = \dfrac{z-1}{z-i}$ で表される点 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ．ただし，i は虚数単位である．

(2) (1) の図形を，原点を中心に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転して得られる図形を求めよ．

(17 静岡大学 理学部 (数) 2)

92. a を実数とする．$z = x + yi$ (x, y は実数) を複素数とし，$\overline{z} = x - yi$ とするとき，等式

$$z^3 = \overline{z} + a \qquad \cdots\cdots (*)$$

を考える．ここで i は虚数単位を表す.

(1) $a = 0$ のとき，$(*)$ を満たす z をすべて求めよ.

(2) $(*)$ を満たす z がちょうど 5 個存在するような a の値の範囲を求めよ.

(17 東北大学 後期 経済学部 2)

93. α は $0 < |\alpha| < 1$ を満たす虚数であるとする．複素数平面上の点の列 z_1, z_2, z_3, $\cdots$ を，$z_1 = 0$, $z_2 = 1$ および

$$\begin{cases} z_{2n+1} - z_{2n} = \alpha(z_{2n} - z_{2n-1}) & (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \\ z_{2n+2} - z_{2n+1} = \overline{\alpha}(z_{2n+1} - z_{2n}) & (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

で定める．ただし，虚数とは虚部が 0 でない複素数のことであり，また，$\overline{\alpha}$ は α に共役な複素数を表すものとする． このとき以下の問いに答えよ.

(1) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$z_{2n+2} - z_n = |\alpha|^2(z_{2n} - z_{2n-2}) \quad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

(2) 偶数番目の点の列 z_2, z_4, z_6, $\cdots$ および奇数番目の点の列 z_1, z_3, z_5, $\cdots$ は，それぞれ同一直線上にあることを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |z_n - w| = 0$ を満たす複素数 w を求めよ.

(17 岡山大学 理・工・環境理工・農・医・歯・薬・教育学部 4)

94. 複素数平面上に 3 点 O，A，B を頂点とする $\triangle$OAB がある．ただし，O は原点とする．$\triangle$OAB の外心を P とする．3 点 A，B，P が表す複素数を，それぞれ α, β, z とするとき，

$$\alpha\beta = z$$

が成り立つとする.

(1) 複素数 α の満たすべき条件を求め，点 A(α) が描く図形を複素数平面上に図示せよ.

(2) 点 P(z) の存在範囲を求め，複素数平面上に図示せよ.

(17 北海道大学 理系 3)

95. 虚部が正の複素数 z が表す複素数平面上の点を P とし，$w = \dfrac{z^2}{|z|}$ で与えられる点を Q とする．また，原点を O とする．

(1) z の極形式を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とするとき，w の極形式を求めよ．さらに $\triangle$OPQ の面積を r と θ を用いて表せ．

(2) z が $|z-4i| = 2|z-i|$ を満たして動くとき，$\triangle$OPQ の面積の最大値を求めよ．

(17 三重大学 工学部 2)

◇96. 複素数平面上の 3 点 A(α), B(β), C(γ) は正三角形 ABC をなし，$\alpha\beta\gamma = -1$ をみたしている．$\triangle$ABC の重心 D(δ) が実軸上にあり $\delta > -1$ であるとき，次の問いに答えよ．ただし，複素数平面上で複素数 z を表す点 P を P(z) と書く．

(1) $\triangle$ABC の外接円の半径 ℓ を δ の式で表せ．

(2) α, β, γ を δ の式でそれぞれ表せ．ただし，$-\pi \leqq \arg\alpha < \arg\beta < \arg\gamma < \pi$ とする．ここで $\arg z$ は複素数 z の偏角を表す．

(17 東京慈恵会医科大学 医学部 4)

97. w を 0 でない複素数，x, y を $w + \dfrac{1}{w} = x + yi$ を満たす実数とする．

(1) 実数 R は $R > 1$ を満たす定数とする．w が絶対値 R の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ．

(2) 実数 α は $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする．w が偏角 α の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ．

(17 京都大学 理系 (総合人間・教育・理・医・薬・農・工・経済学部) 1)

98. $f(x) = 8x^3 - 6x + 1$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f\left(\cos\dfrac{2\pi}{9}\right) = 0$ を示せ．

(2) 3 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつことを示し，これらのうちで最大のものが $x = \cos\dfrac{2\pi}{9}$ であることを示せ．

(3) 不等式 $\cos\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{3}{4} < \cos\dfrac{2\pi}{9}$ が成り立つことを示せ．

(4) 複素数 $z = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{7}}{4}i$ に対し，z^n の実部が正で虚部が負となり，かつ，z^{n+1} の実部と虚部がどちらも正となるような自然数 n のうち，最小のものを求めよ．

(17 金沢大学 後期 理工学域 (数物科学・電子情報・機械) 2)

◇99. s を正の実数とし，x の 2 次方程式 $x^2+6x+s+9=0$ の 2 つの解を α, β とする．ここで，$0 \leqq \arg\alpha < \arg\beta < 2\pi$ とする．複素数平面上の 3 点 O(0), A(α), B(β) に対し，$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{3}$ であるとする．3 点 A，B，C($-2+i$) を通る円を F とし，円 F の中心を P(γ) とする．ただし，i は虚数単位とする．次の問いに答えよ．

(1) s の値を求めよ．

(2) γ の値を求めよ．

(3) t を正の実数とする．$|z-\gamma|=|z-ti|$ を満たす点 z 全体のなす図形が円 F とただ 1 つの共有点をもつとき，t の値を求めよ．

(4) t を (3) で求めた値とし，点 Q(ti) をとる．また，R(δ) を円 F 上の点とする．$\angle\mathrm{QPR}=\dfrac{2}{3}\pi$ となるような δ の値をすべて求めよ．

(17 東京農工大学 工・農学部 2)

100. a, x, y は実数の定数とし，$0<a<1$, $0 \leqq y < 2\pi$ を満たすとする．複素数 z を

$$z=a^x\cos y+(a^x\sin y)\,i$$

によって定める．ただし，i は虚数単位である．

(1) $z\overline{z}$ と z^2 のそれぞれの実部と虚部を求めよ．ただし，$\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す．

(2) $x=0$ のとき，$z^2+\overline{z}=0$ を満たす y の値をすべて求めよ．

(3) $\overline{z}$ の実部が $\overline{z}$ の虚部より大きくなるような x と y の値の範囲を求めよ．

(4) 複素数 w を $w=\log_a(a^x\cos y)+\{\log_a(a^x\sin y)\}\,i$ によって定める．w の実部が w の虚部より大きくなるような x と y の値の範囲を求めよ．

(17 慶應義塾大学 経済学部 5)

◇101. θ を実数とする．虚部が 0 でない複素数 z に対して，複素数 w を

$$w=\frac{z\cos\theta+\sin\theta}{-z\sin\theta+\cos\theta}$$

により定める．次の問いに答えよ．

(1) $z=i$ のとき，w を計算せよ．

(2) z の虚部が正ならば，w の虚部も正であることを示せ．

(3) $z=2i$ とする．w の実部を x, 虚部を y とするとき，x, y を θ を用いて表せ．

(4) (3) において，$\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$ を x, y を用いて表せ．

(5) (3) において，θ が実数全体を動くとき，w の描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(17 埼玉大学 後期 理・工学部 2)

102. t を正の実数とする．t に対して，複素数 $\alpha = 2 + ti$ とし，α の共役な複素数を $\overline{\alpha}$ とする．方程式 $z^3 = -8$ の解で虚部が正のものを ω とする．複素数平面上の 3 点を $\mathrm{A}(\omega)$，$\mathrm{B}(\alpha\omega)$，$\mathrm{C}(\overline{\alpha}\omega)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) ω を極形式で表せ．ただし，ω の偏角 $\arg\omega$ は $0 \leqq \arg\omega < 2\pi$ とする．

(2) 線分 AB，AC の長さを t で表せ．

(3) 3 点 A，B，C を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径を r とする．t が r 正の実数全体を動くとき，$\dfrac{r}{t}$ の最小値とそのときの t の値を求めよ．

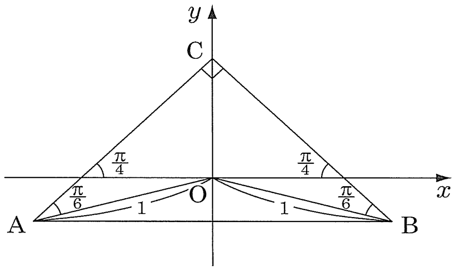
(17 年 同志社大 政策・文情・生医・スポ 2)

103. 2 つの複素数 $\alpha = 10000 + 10000\,i$ と $w = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}\,i$ を用いて，複素数平面上の点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ を $z_n = \alpha w^n$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ により定める．ただし，i は虚数単位を表す．2 と 3 の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$ として，以下の問いに答えよ．

(1) z_n の絶対値 $|z_n|$ と偏角 $\arg z_n$ を求めよ．

(2) $|z_n| \leqq 1$ が成り立つ最小の自然数 n を求めよ．

(3) 下図のように，複素数平面上の $\triangle\mathrm{ABC}$ は線分 AB を斜辺とし，点 $\mathrm{C}\left(\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)$ を一つの頂点とする直角二等辺三角形である．なお A，B を表す複素数の虚部は負であり，原点 O と 2 点 A，B の距離はともに 1 である．点 P_n が $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部に含まれる最小の自然数 n を求めよ．



(17 九州大学 医・歯・薬・工・理・経済・芸術工学部 5)

°**104.** i を虚数単位とし，$\alpha = \dfrac{\sqrt{2}(-1+i)}{2}$ とする．このとき $\alpha^2 = \boxed{(\text{エ})}$ であり，

$\alpha^{211} = \boxed{(オ)}$ である．

(17 慶應義塾大学 看護医療学部 1(2))

◇**105.** 複素数平面上で，原点 O と異なる点 A(α) をとり，単位円周上に点 B(β) をとる．複素数 α, β は $\arg\alpha - \arg\beta = \dfrac{\pi}{2}$ を満たし，さらに $\alpha+\beta$ は実数でないとする．

(1) β を α と $|\alpha|$ を用いて表せ．

(2) 線分 AB の垂直 2 等分線と直線 OA との交点を C(γ) とするとき，γ を α と $|\alpha|$ を用いて表せ．

(3) $\angle\mathrm{APB} = \dfrac{\pi}{2}$ を満たす原点と異なる虚軸上の点を P(z) とする．z を α, $\overline{\alpha}$ と $|\alpha|$ を用いて表せ．ただし，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数である．

(17 徳島大学 医・歯・薬学部 2)

106. 複素数 z_n を

$$z_1 = 1, \quad z_{n+1} = a(z_n + 1) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．ただし，i を虚数単位とし，$a = \dfrac{i}{2}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) a の絶対値 $|a|$ と偏角 $\arg a$ を求めよ．ただし，偏角の範囲は $0 \leqq \arg a < 2\pi$ とする．

(2) $z_{n+1} + b = a(z_n + b)$ となる複素数 b を求めよ．

(3) z_n の実部 x_n，虚部 y_n を求めよ．

(4) (3) の x_n と y_n について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n$ をそれぞれ求めよ．

(17 岐阜大学 教育・医・工学部 5)

107. n を 0 以上の整数とする．$x_n = 2\cos\dfrac{2n}{17}\pi$ のとき以下の問いに答えよ．

(1) $s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$ とするとき，$x_1(s+1) = 2s + 2$ となることを示せ．

(2) $t = x_1 + x_2 + x_4 + x_8$ とするとき，$t^2 + t - 4 = 0$ となることを示せ．

(3) $x_1 + x_4$ の値を求めよ．

(17 京都府立大学 生命環境学部 4)

108. a, b, c を実数とする 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とする．これらの解は次の 4 つの条件を満たす．

(i) $\gamma = -\dfrac{1}{2}$

(ii) $|\alpha| = |\beta| = 1$
(iii) α の虚部は正である
(iv) 複素数平面上の点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ は同一直線 L 上にある．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) a, b, c および α, β の値を求めよ．
(2) 点 $\mathrm{P}(z)$ が直線 L 上を動くとき，$w_1 = \dfrac{1+4z}{2z}$ で表される点 $\mathrm{Q}(w_1)$ の軌跡を複素数平面上に図示せよ．
(3) 動点 $\mathrm{R}(w_2)$ は，$\arg\left(\dfrac{\beta - w_2}{\alpha - w_2}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ を満たす．
このとき，$\mathrm{R}(w_2)$ の軌跡を複素数平面上に図示するとともに，(2) で求めた $\mathrm{Q}(w_1)$ との距離 $|w_1 - w_2|$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(17 旭川医科大学 2)

°109.

複素数平面において 2 点 $\mathrm{A}(1+i)$, $\mathrm{B}(5+3i)$ をとる．三角形 ABC が正三角形となる点 C に対応する複素数で虚部が最大のものは $3-\sqrt{3}+i\left(\boxed{①}\right)$ である．

(17 年 関西大 全学部日程 理系 2 月 7 日実施 4(1))

110. α を複素数の定数とし，自然数 n に対して複素数 z_n を

$$z_1 = 0, \quad z_{n+1} = \alpha z_n + 1 - \alpha$$

で定める．以下の各問に答えよ．

(1) z_2，z_3，z_4 をそれぞれ α を用いて表せ．
(2) 一般の n について z_n を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

以下では，$\alpha = \dfrac{1}{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$ とする．ただし，i は虚数単位を表し，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(3) $\dfrac{\theta}{\pi}$ が無理数であるとき，どんな自然数 n に対しても z_{n+1} は実数にならないことを示せ．
(4) 自然数 n に対して，複素数平面上の 2 点 z_n と z_{n+1} との距離を l_n とする．無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ の和 L を求めよ．さらに，θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を動くとき，L の最大値とそのときの θ の値を求めよ．

(17 茨城大学 理学部 2)

111. 以下の問いに答えよ．

(1) $|z| \leqq |z-(\sqrt{3}+i)|$，$|z-\overline{z}| \leqq 1$ および $|z-2i| \leqq 2$ を同時にみたす複素数 z に対応する点の領域を複素数平面上に図示せよ．

(2) (1) で得られた領域内の点に対応する複素数のうち，実部が最大となるものを α，実部と虚部の和が最大となるものを β とするとき，α と β を求めよ．

(3) 次の式で定義される w_n の実部を R_n とするとき，無限級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} R_n$ の和を求めよ．

$$w_n = \frac{\{1+(2-\sqrt{3})\,i\}(\sqrt{3}+i)^{3(n-1)}}{2^{4(n-1)}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(17 浜松医科大学 1)

112.

i を虚数単位とし，集合 L と M を

$$L = \{z \,|\, z \text{ は整数 } a,\ b \text{ を用いて } z=a+bi \text{ と表される複素数}\}$$
$$M = \left\{ z \,\middle|\, z \in L,\ \frac{5}{z} \in L,\ |z| \fallingdotseq 1,\ \left|\frac{5}{z}\right| \fallingdotseq 1 \right\}$$

で定める．複素数 $z=a+bi$ に対して，$z \in L$ ならば $|z|^2 = \boxed{(オ)}$ は整数である．また，$z \in M$ ならば $|z|^2 = \boxed{(カ)}$ であり，集合 M の要素の個数 $n(M)$ は $\boxed{(キ)}$ である．集合 M の要素 z のうち，実部が最も大きくかつ虚部が正となる z は $\boxed{(ク)}$ である．

(17 年 慶應大 理工 1(2))

◊**113.** 複素数平面上の点 $z\left(z \fallingdotseq -\dfrac{i}{2}\right)$ に対して，$w = \dfrac{z+2i}{2z+i}$ とする．

(1) 点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ．

(2) 点 z が点 α を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w は原点を中心とする半径 r の円周を描く．このような r と α の組をすべて求めよ．

(17 千葉大学 先進・理・薬・工・医・理学部 9)

114. $a,\ b,\ c,\ d$ を実数とし，$z,\ w$ を $z=a+bi, w=c+di$ で与えられる複素数とする．ただし原点 O と，点 A(z) , 点 B(w) は異なる 3 点で，同一直線上にないものとする．以下の問いに答えよ．

(1) $\cos\angle\mathrm{AOB}$，$\sin\angle\mathrm{AOB}$ および，$\triangle\mathrm{AOB}$ の面積を $a,\ b,\ c,\ d$ で表せ．ただし $0 < \angle\mathrm{AOB} < \pi$ とする．

(2) $z\overline{w}$ の虚部を a, b, c, d で表せ.
(3) 点 A と点 B を通る複素数平面上の直線と，原点との距離を z と w で表せ.

(17 三重大学 後期 工・教育学部 2)

°115. 複素数平面において 2 点 A$(1+i)$, B$(5+3i)$ をとる．三角形 ABC が正三角形となる点 C に対応する複素数で虚部が最大のものは $3-\sqrt{3}+i\left(\boxed{①}\right)$ である.

(17 関西大学 理系 (全学部 2/7) 4(1))

◊116. 実数 a, b, c に対して $F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$, $f(x)=x^2+cx+1$ とおく．また，複素数平面内の単位円周から 2 点 1, -1 を除いたものを T とする.

(1) $f(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ.
(2) $F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるならば,
$$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$$
を満たす実数 c_1, c_2 が存在することを示せ.
(3) $F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ.

(17 東京工業大学 5)

117. i を虚数単位とし，集合 L と M を
$$L=\{z\,|\,z\text{ は整数 }a,\ b\text{ を用いて }z=a+bi\text{ と表される複素数}\}$$
$$M=\left\{z\,\middle|\,z\in L,\ \frac{5}{z}\in L,\ |z|\neq 1,\ \left|\frac{5}{z}\right|\neq 1\right\}$$
で定める．複素数 $z=a+bi$ に対して，$z\in L$ ならば $|z|^2=\boxed{(オ)}$ は整数である．また，$z\in M$ ならば $|z|^2=\boxed{(カ)}$ であり，集合 M の要素の個数 $n(M)$ は $\boxed{(キ)}$ である．集合 M の要素 z のうち，実部が最も大きくかつ虚部が正となる z は $\boxed{(ク)}$ である.

(17 慶應義塾大学 理工学部 1(2))

118. 0 でない複素数 z に対し，$\alpha=z+\dfrac{1}{z}$, $\beta=iz+\dfrac{1}{iz}$ とする．ただし，i は虚数単位とする．以下の問いに答えよ.

(1) α が実数となる点 z の全体が表す図形を，複素数平面上に図示せよ.
(2) 等式 $|\alpha|=|\beta|$ をみたす点 z の全体が表す図形を，複素数平面上に図示せよ.

(17 奈良女子大学 理学部 3)

°119.　a, b, c を有理数とする．等式

$$\frac{(2\sqrt{3}+a)+(2\sqrt{3}-b)i}{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i}=c\sqrt{3}i$$

が成立しているとき，$a=$ $\boxed{\text{ア}}$，$b=$ $\boxed{\text{イ}}$，$c=$ $\boxed{\text{ウエ}}$ である．ただし，$i=\sqrt{-1}$ である．

(16 国士舘大学 理工学部 1)

120.　複素数平面上の原点 O と異なる 2 点 A(α)，B(β) に対して

$$3\alpha^2-6\alpha\beta+4\beta^2=0$$

が成り立つ．3 点 O，A，B を通る円を C とする．

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表せ．ただし，偏角 θ の範囲は $-\pi<\theta\leqq\pi$ とする．

(2) 円 C の中心と半径を α を用いて表せ．

(3) $|3\alpha-2\beta|$ を β を用いて表せ．

(4) 次が成り立つとき α を求めよ．

(ア) 点 z が円 C 上を動くとき $w=i\overline{z}$ も C 上にある．

(イ) $\alpha+\overline{\alpha}$ は正の実数である．

(ウ) $|3\alpha-2\beta|=2\sqrt{6}$

(17 名古屋工業大学 4)

°121.　次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 等式 $z^2=i$ を満たす複素数 z は 2 つある．それらを $x+yi$ (x, y は実数) の形で表せ．

(2) 等式 $w^2-2iw=1+i$ を満たす複素数 w は 2 つあり，それらを α, β とする．ただし，α の実部は β の実部より大きいとする．α, β を $x+yi$ (x, y は実数) の形で表せ．

(3) 複素数平面上で，原点を O とし，(2) で求めた α, β が表す点をそれぞれ A，B とするとき，三角形 OAB の面積を求めよ．

(17 宮崎大学 工学部 4)

◊122.　$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ とする．複素数平面上において，原点を中心とする半径 1 の円の上に異なる 5 点 $\mathrm{P}_1(w_1)$，$\mathrm{P}_2(w_2)$，$\mathrm{P}_3(w_3)$，$\mathrm{P}_4(w_4)$，$\mathrm{P}_5(w_5)$ が反時計まわりに並んでおり，次の 2 つの条件 (I)，(II) を満たすとする．

(I) $(\cos^2 a)(w_2-w_1)^2+(\sin^2 a)(w_5-w_1)^2=0$ が成り立つ．

(II) $\dfrac{w_3}{w_2}$ と $-\dfrac{w_4}{w_2}$ は方程式 $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ の解である．

また，五角形 $\mathrm{P_1P_2P_3P_4P_5}$ の面積を S とする．以下の問いに答えよ．

(1) 五角形 $\mathrm{P_1P_2P_3P_4P_5}$ の頂点 $\mathrm{P_1}$ における内角 $\angle \mathrm{P_5P_1P_2}$ を求めよ．

(2) S を a を用いて表せ．

(3) $R = |w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5|$ とする．このとき，$R^2 + 2S$ は a の値によらないことを示せ．

(17 筑波大学 6)

123. 複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w = \dfrac{1}{z}$ とする．

(1) α を 0 でない複素数とし，点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする．点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる．この円の中心と半径を求めよ．

(2) 1 の 3 乗根のうち，虚部が正であるものを β とする．点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ．

(17 東京大学 理科 3)

◊124. i を虚数単位とし，α と β を複素数で $\alpha \fallingdotseq 0,\ \beta = 1 + ti\ (t > 0)$ とする．このとき．数列 $\{z_n\}$ を次で定義する．

$$z_1 = \alpha,$$
$$z_{n+1} = \beta z_n\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

以下の各問に答えよ．

(1) 複素数平面において原点を O とし，z_n を表す点を P_n とする．三角形 $\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を $a,\ t,\ n$ を用いて表せ．

$\alpha = -1 + \sqrt{3}i,\quad t = \tan \dfrac{5}{12}\pi$ とする．z_n が正の実数となる番号 n を小さいほうから順に $m_1,\ m_2,\ m_3,\ \cdots$ とする．

(2) $n = m_1$ のとき z_n がどのくらいの大きさなのかを調べたい．$n = m_1$ のとき $|z_n - 10^p|$ の値が最小となる自然数 p を求めよ．

(3) 数列 $\{m_k\}$ の一般項を k を用いて表せ．

(17 札幌医科大学 2)

◊125. $\alpha = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}i$ とおき，複素数 $1,\ \alpha,\ \overline{\alpha}$ に対応する複素数平面上の点をそれぞれ P，Q，R とする．次の問に答えよ．

(1) 直線 PQ は複素数 β を用いて方程式 $\beta z + \overline{\beta}\overline{z} + 1 = 0$ で表される．この β を求めよ．

(2) 点 z が直線 PQ 上を動くとき，点 $w = \dfrac{1}{z}$ が描く複素数平面上の図形を求めよ．

(3) 点 z が三角形 PQR の周および内部を動くとき，点 $w = \dfrac{1}{z}$ の動く範囲を複素数平面上に図示し，その面積を求めよ．

(17 早稲田大学 基幹・創造・先進理工学部 1)

◇126. 3 つの複素数 α, β, z は次の関係式

$$\alpha + \beta = z,\ \alpha\beta = i\overline{z},\ \alpha\beta \fallingdotseq 0$$

を満たしているとする．ただし，i は虚数単位，$\overline{z}$ は z の共役な複素数とする．このとき $\dfrac{\alpha}{\beta}$ が実数であるような z の条件を求め，そのような z の集合を複素数平面上に図示せよ．

(17 早稲田大学 教育学部 2)

127. 複素数平面において，3 点 A$(1+2i)$，B$(3+4i)$，C(z) が正三角形の頂点となる複素数 z をすべて求めよ．ここで，i は虚数単位である．

(17 愛媛大学 医・理・教育学部 3(1))

128. $\alpha = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とおく．ここで，i は虚数単位である．

(1) α の絶対値 $|\alpha|$ および偏角 θ を求めよ．ただし，θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(2) $\beta = 2\left(\cos\dfrac{2}{7}\pi + i\sin\dfrac{2}{7}\pi\right)$ とおき，β, $\alpha\beta$, $\alpha^2\beta$ に対応する複素数平面上の点をそれぞれ P_1，P_2，P_3 とする．このとき，$\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の面積を求めよ．

(3) $\gamma = -1 + 4\alpha$ とおき，γ, γ^2, γ^3 に対応する複素数平面上の点をそれぞれ Q_1，Q_2，Q_3 とする．

(i) $\angle\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_3$ を求めよ．

(ii) $\triangle\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3$ の面積を求めよ．

(17 愛媛大学 医・工・理学部 7)

129. 複素数 α を $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ とおく．ただし，i は虚数単位を表す．以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$ の値を求めよ．

(2) $t = \alpha + \overline{\alpha}$ とおくとき，$t^3 + t^2 - 2t$ の値を求めよ．ただし，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数を表す．

(3) $\dfrac{3}{5} < \cos\dfrac{2\pi}{7} < \dfrac{7}{10}$ を示せ．

(17 九州大学 後期 理学部 (数学) 2)

130. $\mathrm{A}(\alpha)$ を原点と異なる複素数平面上の点とし，正の実数 r は $r \fallingdotseq |\alpha|$ をみたすとする．等式 $\left|\dfrac{1}{z} - \overline{\alpha}\right| = r$ をみたす複素数平面上の点 $\mathrm{P}(z)$ の描く図形を C で表す．ただし，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数を表す．以下の問に答えよ．

(1) C が円であることを示し，その中心と半径を求めよ．

(2) 原点 O を中心とする半径 1 の円を S で表す．C の中心が A，半径が r になるとき，C と S の共有点が存在することを示せ．さらに，このとき C と S の任意の共有点 Q に対して，$\mathrm{OQ} \perp \mathrm{AQ}$ が成り立つことを示せ．

(17 神戸大学 後期 理科系 3)

131. 次の三つの複素数を考える．

$$\alpha = 1 + i,\ \beta = 4 + 2i,\ \gamma = 3 + 3i$$

複素数平面上で，α, β, γ に対応する点をそれぞれ A, B, C とし，0 に対応する点を O，1 に対応する点を P_0 とする．点 P_1 を次の性質を満たす複素数平面上の点とする．

- P_1 に対応する複素数 z_1 の虚部は正である．
- $\mathrm{AB} : \mathrm{BC} : \mathrm{CA} = \mathrm{OP}_0 : \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 : \mathrm{P}_1\mathrm{O}$

さらに，複素数平面上の点 P_n $(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を次の性質を満たすように定める．

- $\triangle\mathrm{OP}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}$と$\triangle\mathrm{OP}_{n-1}\mathrm{P}_n$ は辺 OP_{n-1} 以外に共通部分をもたない．
- $\mathrm{AB} :\ \mathrm{BC} :\ \mathrm{CA} = \mathrm{OP}_{n-1} : \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n : \mathrm{P}_n\mathrm{O}$

点 P_n に対応する複素数を z_n とする．次の問いに答えよ．

(1) 複素数 z_1 を求めよ．

(2) 複素数 z_2 を求めよ．

(3) 正の整数 n に対し，$\triangle\mathrm{OP}_{n-1}\mathrm{P}_n$ の面積を n を用いて表せ．

(4) z_n の実部が正であり，かつ虚部が負となる最小の n を求めよ．必要ならば巻末にある三角関数表 (省略) を用いてもよい．

(17 広島大学 後期 理学部 (数学) 2)

132. 以下の問【I】と【II】に答えよ．

【I】(1) 0 でない複素数 z の極形式を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とする．このとき，$z + \dfrac{1}{z}$ の実部と虚部を r と θ を用いてそれぞれ表せ．ただし，i は虚数単位とする．

(2) z を実数ではない複素数とする．$z+\dfrac{1}{z}$ が実数であるとき，$|z|=1$ となることを示せ．

(3) z を実数ではない複素数とする．$\dfrac{z^2-2z+2}{z-1}$ が実数であるとき，$z\overline{z}-z-\overline{z}=0$ となることを示せ．ここで，$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す．

【II】複素数 α, β, γ が $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ および $\alpha+\beta+\gamma=0$ を満たすとき，

$$|\alpha-\beta|^2+|\alpha-\gamma|^2=6$$

となることを示せ．

(17 岐阜大学 後期 医・工・教育学部 5)

133.

2 つの複素数 $\beta=-1-i$, $\gamma=\dfrac{-\sqrt{3}+3i}{6}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\beta^8\gamma^8$ を求めよ．

(2) 数列 $1,\ \beta,\ \beta\gamma,\ \beta^2\gamma,\ \beta^2\gamma^2,\ \beta^3\gamma^2,\ \cdots$ の第 $2m$ 項までの和 S_{2m} を β, γ を用いて表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} S_{2m}$ の実部を求めよ．

(17 兵庫県立大学 工学部 2)

134.

次の問いに答えよ．

(1) $z^6+27=0$ を満たす複素数 z をすべて求め，それらを表す点を複素数平面上に図示せよ．

(2) (1) で求めた複素数 z を偏角が小さい方から順に z_1, z_2, $\cdots$ とするとき，z_1, z_2 と積 z_1z_2 を表す 3 点が複素数平面上で一直線上にあることを示せ．ただし，偏角は 0 以上 2π 未満とする．

(17 金沢大学 理工・医薬保健学域 1)

135.

t を実数の定数とし，i を虚数単位とする．3 つの複素数 α, β, γ を

$$\alpha=t+2i,\quad \beta=(3t+4)+(t^2+6)i,\quad \gamma=(t+2)+5i$$

とする．複素数平面上の 3 点 α, β, γ が同一直線上にあるときの t をすべて求めよ．

(17 茨城大学 工学部 2(3))

136.

α, β, γ を複素数とし，

$$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

を満たす複素数 z を考える．以下の問いに答えよ．

(1) z は

$$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$$

を満たすことを示せ.

(2) $|\alpha|=|\beta|\fallingdotseq 0$ と仮定し，また γ は負の実数であると仮定する．このとき，$(*)$ を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を $\alpha,\ \beta$ を用いて表せ.

(17 東北大学 理・医・歯・薬・工・農学部 5)

137.

複素数 $\alpha=2+3i,\ \beta=3+i$ に対して，$z=s\alpha+t\beta$ を考える．ただし，$s,\ t$ は実数で $s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ 1\leqq s+t\leqq 3$ とする．このとき，複素数平面上で z が存在する部分の面積は $\boxed{\text{シ}}$ である.

(17 早稲田大学 人間科学部 B 方式 4)

138.

t を正の実数とする．t に対して，複素数 $\alpha=2+ti$ とし，α の共役な複素数を $\overline{\alpha}$ とする．方程式 $z^3=-8$ の解で虚部が正のものを ω とする．複素数平面上の 3 点を $\mathrm{A}(\omega),\ \mathrm{B}(\alpha\omega),\ \mathrm{C}(\overline{\alpha}\omega)$ とする．次の問いに答えよ.

(1) ω を極形式で表せ．ただし，ω の偏角 $\arg\omega$ は $0\leqq\arg\omega<2\pi$ とする.

(2) 線分 AB，AC の長さを t で表せ.

(3) 3 点 A，B，C を頂点とする $\triangle$ABC の外接円の半径を r とする．t が r 正の実数全体を動くとき，$\dfrac{r}{t}$ の最小値とそのときの t の値を求めよ.

(17 同志社大学 理系 (政策・文化情報 (理系)・生命医科・スポーツ健康 2/7) 2)

139.

以下の問いに答えよ.

(1) $2|z|=|z-1+i|$ を満たす複素数平面上の点 z の全体が描く図形 F を図示せよ.

(2) z が (1) で求めた図形 F 上を動くとき，$|z+1+i|$ の最大値と最小値を求めよ.

(3) (1) で求めた図形 F 上の点 z のうち，z^2 が純虚数となる z の値をすべて求めよ.

(17 信州大学 後期 理・繊維学部 2)

§2 指数・対数

2.1 指数

°140. 不等式

$$\left(\frac{1}{8}\right)^x \leqq 7\left(\frac{1}{2}\right)^x - 6$$

をみたす実数 x の範囲を不等式で表すと $\boxed{\text{(あ)}}$ である．

(17 慶應大学 医学部 1(1))

°141. 方程式 $2^{2x+1} + 5 \cdot 2^x - 3 = 0$ を解け．

(17 岩手大学 理工学部 1(1))

°142. x, y を整数とするとき，次の式を満たす整数 a, b を x, y を用いて表せ．

$$\frac{4^x \times 6^{x+y} \times 12^{x-y}}{16^x \times 9^{2x-3y}} = 2^a \times 3^b$$

(17 愛媛大学 工・教育・農学部 1(2))

143. $f(x) = 2^{3x} + 2^{-3x} - 4(2^{2x} + 2^{-2x})$ とする．次の問いに答えよ．

(1) k を実数とする．x についての方程式 $2^x + 2^{-x} = k$ の実数解の個数を求めよ．

(2) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおく．$f(x)$ を t で表せ．

(3) x がすべての実数を動くとき，$f(x)$ が最小となるような x と，そのときの $f(x)$ の値を求めよ．

(17 大阪市立大学 商・経済・医 (看護)・生活科学部 2)

2.2 対数

144. 方程式 $\log_2 x + 2x^2 - 10x + 9 = 0$ は，$1 < x < 4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ．

(17 茨城大学 工学部 2(2))

145. 実数 x, y は $\log_2 x + \log_2 y = 2$ を満たす．

(i) $t = x + y$ とおく．$x^2 + y^2$ を t を用いて表せ．

(ii) $x^2 + y^2 + xy - 6x - 6y + 11$ の最小値とそのときの x と y の値を求めよ．

(17 福岡教育大学 中等教育 (数学) 1(1))

°146. 実数 $a,\ b$ は $a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ a+b=9$ を満たす.

(1) $\log_3 a + \log_3 b$ の最大値と最小値を求めよ.

(2) $\log_2 a + \log_4 b$ の最大値と最小値を求めよ.

(17 一橋大学 法・経済・商・社会学部 1)

°147. 不等式

$$(\log_2 x - 1)(\log_2 x + 2)(\log_2 x - 3)(\log_2 x + 4) \leqq 144$$

を満たす x の範囲は $\boxed{④}$ である.

(17 関西大学 理系 (全学部 2/7) 4(4))

°148. 不等式 $\log_{|x|}(x - 9y^2 + 2) > 2$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ.

(17 兵庫県立大学 中期 理学部 2)

149. a を 1 でない正の実数とする.以下の問いに答えよ.

(1) 方程式 $2^x \log_2 x - \dfrac{8}{\log_a 2} \log_a x = 0$ を満たす実数 x をすべて求めよ.

(2) 正の実数 A に対し,方程式 $\dfrac{2^x}{\log_a 2} \log_a A - 2 = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ.

(3) 正の実数 A に対し,方程式 $2^x \log_2 A + \dfrac{2^{-x}}{\log_a 2} \log_a A - 2 = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ.

(17 三重大学 教育・生物資源・人文学部 1)

°150. 不等式

$$\frac{1}{4} \log_{\frac{1}{3}}(3 - x) < \log_9(x - 1)$$

を満たす x の範囲は, $\boxed{セ} < x < \boxed{ソ}$ である.

(17 早稲田大学 国際教養学部 3(1))

°151. 次の等式 a), b), c) がそれぞれ成立している.a), b), c) それぞれについて y を x を用いて表し,x がすべての実数値をとるときに y のとりうる値の範囲を求めよ.

a) $\log_2 y - 2x + 3 = 0$

b) $\log_2 y + \log_2(x^2 + 1) - 3 = 0$

c) $\log_2 y - \log_4(x^2 + 1) - 1 = 0$

(17 香川大学 工学部 3)

152. 座標平面上に点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$ をとり，関数 $y=\log_2 x$ のグラフ上に 2 点 $\mathrm{B}(p,\ \log_2 p)$，$\mathrm{C}(q,\ \log_2 q)$ をとる．線分 AB を $1:2$ に内分する点が C であるとき，p，q の値を求めよう．

真数の条件により，$p>\boxed{\text{タ}}$，$q>\boxed{\text{タ}}$ である．ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という．

線分 AB を $1:2$ に内分する点の座標は，p を用いて

$$\left(\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}p,\ \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\log_2 p+\boxed{\text{ナ}}\right)$$

と表される．これが C の座標と一致するので

$$\begin{cases} \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}p=q & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④ \\[2ex] \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\log_2 p+\boxed{\text{ナ}}=\log_2 q & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

が成り立つ．

⑤は

$$p=\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}q^{\boxed{\text{ネ}}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

と変形できる．④と⑥を連立させた方程式を解いて，$p>\boxed{\text{タ}}$, $q>\boxed{\text{タ}}$ に注意すると

$$p=\boxed{\text{ノ}}\sqrt{\boxed{\text{ハ}}},\quad q=\boxed{\text{ヒ}}\sqrt{\boxed{\text{フ}}}$$

である．

また，C の y 座標 $\log_2\left(\boxed{\text{ヒ}}\sqrt{\boxed{\text{フ}}}\right)$ の値を，小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めると，$\boxed{\text{ヘ}}$ である．$\boxed{\text{ヘ}}$ に当てはまるものを，次の⓪〜ⓑのうちから一つ選べ．ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$ とする．

⓪ 0.3　① 0.6　② 0.9　③ 1.3　④ 1.6　⑤ 1.9

⑥ 2.3　⑦ 2.6　⑧ 2.9　⑨ 3.3　ⓐ 3.6　ⓑ 3.9

(17 センター本試験 第 1 問 (2))

°153. x と y は方程式

$$\log_2 7+\log_{\frac{1}{2}}(y+5)=2-\log_2(x+2)$$

を満たす.

(i) $y=3$ のとき，$x=\dfrac{\boxed{(1)(2)}}{\boxed{(3)}}$ である.

(ii) x と y が整数で，不等式 $1000<2^{y-x}<5000$ を満たすとき，$x=\boxed{(4)(5)}$，$y=\boxed{(6)(7)}$ である.

(17 慶應義塾大学 薬学部 1(1))

座標平面上に点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$ をとり，関数 $y=\log_2 x$ のグラフ上に 2 点 $\mathrm{B}(p,\ \log_2 p)$，$\mathrm{C}(q,\ \log_2 q)$ をとる．線分 AB を 1 : 2 に内分する点が C であるとき，p，q の値を求めよう．

真数の条件により，$p>\boxed{タ}$，$q>\boxed{タ}$ である．ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という．

線分 AB を 1 : 2 に内分する点の座標は，p を用いて

$$\left(\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}p,\ \frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\log_2 p+\boxed{ナ}\right)$$

と表される．これが C の座標と一致するので

$$\begin{cases}\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}p=q & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ④\\[2ex] \dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\log_2 p+\boxed{ナ}=\log_2 q & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ⑤\end{cases}$$

が成り立つ.

⑤は

$$p=\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}q^{\boxed{ネ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ⑥$$

と変形できる．④と⑥を連立させた方程式を解いて，$p>\boxed{タ}$, $q>\boxed{タ}$ に注意すると

$$p=\boxed{ノ}\sqrt{\boxed{ハ}},\quad q=\boxed{ヒ}\sqrt{\boxed{フ}}$$

である.

154.

また，C の y 座標 $\log_2\left(\boxed{\text{ヒ}}\sqrt{\boxed{\text{フ}}}\right)$ の値を，小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めると，$\boxed{\textbf{へ}}$ である．$\boxed{\text{へ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～ⓑのうちから一つ選べ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ とする．

⓪ 0.3　① 0.6　② 0.9　③ 1.3　④ 1.6　⑤ 1.9

⑥ 2.3　⑦ 2.6　⑧ 2.9　⑨ 3.3　ⓐ 3.6　ⓑ 3.9

(17 年 センター本試験 II・B 第 1 問 1［2］)

155. a を 1 でない正の実数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 方程式 $2^x \log_2 x - \dfrac{8}{\log_a 2}\log_a x = 0$ を満たす実数 x をすべて求めよ．

(2) 正の実数 A に対し，方程式 $2^x \log_2 A + \dfrac{2^{-x}}{\log_a 2}\log_a A - 2 = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ．

(17 三重大学 医学部 1)

2.3 常用対数

156. $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 7 = 0.8451$ とするとき，15^{50} は $\boxed{\textbf{イ}}$ 桁の整数である．また，15^{50} の最高位の数字は $\boxed{\textbf{ウ}}$ である．

(17 早稲田大学 人間科学部 A，B 方式 1(2))

°157. 3^{72} は $\boxed{\text{チツ}}$ 桁の整数であり，その最高位の数は $\boxed{\text{テ}}$ である．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(16 国士舘大学 理工学部 1(4))

°158. $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ とする．

(i) $\log_{10} 5 = \boxed{(\text{ア})}$ である．

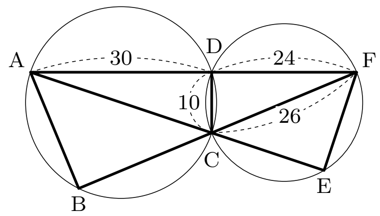
(ii) 27^{27} は $\boxed{(\text{イ})}$ 桁の整数で，27^{27} の正の約数は全部で $\boxed{(\text{ウ})}$ 個ある．

(17 慶應義塾大学 看護医療学部 1(1))

§3　三角関数

3.1　三角比

159. 図のような四角形 ABCD，四角形 DCEF と外接円があり，点 A，D，F は一直線上にある．同様に点 B，C，F と点 A，C，E も一直線上にある．$\mathrm{AD} = 30$，$\mathrm{CD} = 10$，$\mathrm{CF} = 26$，$\mathrm{DF} = 24$ である．このとき，四角形 ABCD の外接円の半径は $\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}$，



四角形 DCEF の外接円の半径は $\boxed{\text{エオ}}$ である．また，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}} = \dfrac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ である．

(16 国士舘大学 理工・政経・法・文・21 世紀アジア・経営学部 1)

3.2 図形への応用

◇160. $\triangle\mathrm{ABC}$ は鋭角三角形であり，$\angle\mathrm{A} = \dfrac{\pi}{3}$ であるとする．また $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径は 1 であるとする．

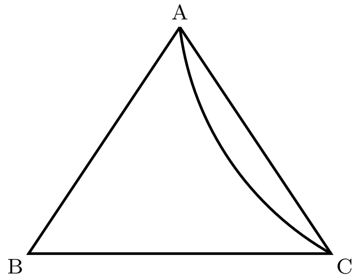
(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ の内心を P とするとき，$\angle\mathrm{BPC}$ を求めよ．

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円の半径 r の取りうる値の範囲を求めよ．

(17 京都大学 理系 (総合人間・教育・理・医・薬・農・工・経済学部) 4)

161. $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = x$，$\mathrm{BC} = 2$ とする．このとき，$\cos\angle\mathrm{BAC} = \boxed{\text{あ}}$，$\sin\angle\mathrm{BAC} = \boxed{\text{い}}$ であり，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径は $\boxed{\text{う}}$ である．

2 点 A，C を通る円の弧 AC で，図のように $\triangle\mathrm{ABC}$ の外部にはみ出さないものを考える．



このような弧のうち，円の半径が最小のものをとり，その円の中心を P とする．

$\triangle$ABC の外心と点 P の距離は，$1 < x \leqq$ $\boxed{\text{え}}$ のとき $\boxed{\text{お}}$ であり，$x \geqq$ $\boxed{\text{え}}$ のとき $\boxed{\text{か}}$ である．

(17 明治大学 1)

°162. 四角形 ABCD は円に内接し，それぞれの辺の長さは AB $= 2$, BC $= 3$, CD $= 3$, DA $= 4$ であるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 対角線 AC の長さを求めよ．

(2) 四角形 ABCD の面積を求めよ．

(17 兵庫県立大学 中期 理学部 1)

163. 座標平面上の 3 点 P$(x,\ y)$ $(x > 0,\ y > 0)$，A$(a,\ 0)$ $(a > 0)$，B$(0,\ b)$ $(b > 0)$ は，PA $=$ PB $= 1$ をみたすものとする．O を原点とし，線分 OA，AP，PB，BO で囲まれた図形の面積を S とする．次の問いに答えよ．

(1) $\angle$APB を固定して 3 点 P, A, B を動かす．S が最大となるとき，$x = y$ かつ $a = b$ であることを示せ．

(2) $\angle$APB を固定せず，条件 $x = y$ かつ $a = b$ のもとで 3 点 P, A, B を動かす．このとき，S の最大値を求めよ．

(17 大阪市立大学 理・医・工学部 4)

°164.

$\triangle$ABC において，AB $= \sqrt{3} - 1$, BC $= \sqrt{3} + 1$, $\angle$ABC $= 60^\circ$ とする．

(1) AC $= \sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ であるから，$\triangle$ABC の外接円の半径は $\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ であり

$$\sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}} + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である．ただし，$\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ の解答の順序は問わない．

(2) 辺 AC 上に点 D を，$\triangle$ABD の面積が $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ になるようにとるとき

$$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AD} = \frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}} - \boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

であるから，AD $= \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である．

(17 年 センター本試験 I・A 第 2 問 [1])

°165. 平面上の △ABC において，∠C の 2 等分線と辺 AB の交点を D，∠B の 2 等分線と辺 AC の交点を E とする．さらに，点 D は辺 AB を $2:1$ に，点 E は辺 AC を $t:1$ に，それぞれ内分しているとする．ただし，t は正の数とする．3 辺 BC，CA，AB の長さを a, b, c，3 つの内角 ∠A，∠B，∠C の大きさを x, y, z とそれぞれおく．以下の各問に答えよ．

(1) 線分 CD の長さを d とおく．△ACD の面積 S を b, d と z を用いて表し，△BCD の面積 T を a, d と z を用いて表せ．さらに，$S:T=b:a$ を示せ．

(2) $b:a=2:1$ を示せ．

(3) $c:a=t:1$ を示せ．

(4) $\cos x$ を t を用いて表せ．また，t のとり得る値の範囲を求めよ．

(5) $\cos x$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ．

(17 茨城大学 後期 理学部 (数学・情報数理) 4)

166. 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD を，頂点 A を中心として時計の針の回転と逆の向きに θ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$ だけ回転してできる正方形を AB′C′D′ とする．正方形 ABCD と AB′C′D′ の重なった部分の面積が $\dfrac{2}{3}$ であるとき，$\sin\theta=\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ である．

(17 早稲田大学 人間科学部 A 方式 5)

167. 鋭角三角形 ABC において，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}+1$，$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{4}$ とし，△ABC の外接円の半径を $\sqrt{2}$ とする．また，∠BAC の二等分線と辺 BC との交点を D とする．

(1) $\cos\angle\mathrm{ACB}$ を求めよ．

(2) CD の長さを求めよ．

(3) △ACD の面積を求めよ．

(17 富山大学 人間発達科学・経済学部 2)

◇168. n を 3 以上の整数とする．半径 1 の円に内接する正 n 角形の面積を I_n，外接する正 n 角形の面積を E_n とする．m を正の整数とし，$a_m=\cos\left(\dfrac{\pi}{3\cdot 2^m}\right)$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $a_2=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ が成り立つことを示せ．

(2) I_n と E_n を，n と三角比を用いて表せ．

(3) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3\cdot 2^m}\right)$ と $\tan\left(\dfrac{\pi}{3\cdot 2^m}\right)$ を，a_m を用いて表せ．

(4) 面積の比較により $\pi > I_n$ および $\pi < E_n$ となることを用いて，

$$3\cdot 2^m\sqrt{1-{a_m}^2} < \pi < 3\cdot 2^m\,\frac{\sqrt{1-{a_m}^2}}{a_m}$$

が成り立つことを示せ．

(5) (4) を用いて，

$$3(\sqrt{6}-\sqrt{2}) < \pi < 12(2-\sqrt{3})$$

が成り立つことを示せ．

(17 岐阜大学 教育・医・工・地域科学・応用生物科学部 3)

169. △ABC に半径 2 の円が内接し，$\cos\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{3}{5}$，$\cos\angle\mathrm{BCA} = \dfrac{5}{13}$ のとき，辺 BC の長さは $\boxed{\text{(ウ)}}$ であり，△ABC の面積は $\boxed{\text{(エ)}}$ である．

(17 東京慈恵会医科大学 医学部 1(2))

°170. △ABC において，∠A は直角で，∠B < ∠C とし，BC = 2 とする．∠B = θ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) 辺 AB，AC の長さ，および △ABC の面積 S を θ を用いて表せ．

(2) △ABC の内接円 O の半径 r を θ を用いて表せ．

(3) 辺 BC の垂直二等分線が，内接円 O と接するとき，θ と r の値を求めよ．

(17 金沢大学 人間社会学域 1)

°171. AB = 4, BC = 6, CA = 5 である三角形 ABC において，∠BAC の二等分線と辺 BC との交点を D，∠BCA の二等分線と辺 AB との交点を E，線分 AD と線分 CE との交点を I とするとき，次の問いに答えよ．

(i) cos∠BAC の値は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(ii) 三角形 ABC の面積は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(iii) 線分 BD の長さは $\boxed{\text{オ}}$ である．

(iv) 三角形 AEI の面積は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(17 早稲田大学 国際教養学部 1(2))

3.3 方程式・不等式

172. θ についての方程式 $\sin^3\theta - \cos\theta\sin^2\theta - \cos\theta\sin\theta - \cos\theta = 1$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ は,

$$\left(\sin\theta - \boxed{\text{ア}} - 1\right)\left(\sin^2\theta + \boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{ウ}}\right) = 0$$

と変形できるので，解を求めると，$\theta = \boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ である．ただし，$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{ウ}}$ に入る項はそれぞれ 1 つとし，$\boxed{\text{エ}} < \boxed{\text{オ}}$ とする．

(17 立命館大学 薬学方式 (2/2) 1(1))

173. a を定数とする．x に関する方程式

$$\sin^2 x + \frac{1}{2}|\cos x| + a - \frac{9}{8} = 0$$

について，次の問に答えよ．ただし，$0 \leqq x < 2\pi$ とする．

(1) この方程式が少なくとも 1 つの解をもつような定数 a の値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}} \leqq a \leqq \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である．

(2) この方程式がちょうど 8 個の解をもつような定数 a の値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}} < a < \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である．

(3) この方程式がちょうど 6 個の解をもつような定数 a の値は $a = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である．

(16 国士舘大学 理工学部 2)

°174. $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$-\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ を満たす θ のうち最大のものは $\theta = \boxed{(\text{ス})}$ である．

(17 慶應義塾大学 看護医療学部 2(3))

175. xy 平面において，連立不等式

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1, \quad \sin\left(\pi xy - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\pi xy - \frac{\pi}{4}\right) \geqq 1$$

の表す領域を D とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 領域 D を図示せよ.

(2) m を $m \geqq 1$ をみたす実数とする. 点 $(x,\ y)$ が領域 D 上を動くとき, $mx+y$ の最大値と最小値をそれぞれ m を用いて表せ.

(17 大阪府立大学 中期 工学域 3)

°176. $\sin 2x$ を $\sin x$ と $\cos x$ の式で表すと $\boxed{キ}$ となり, $\sin 3x$ を $\sin x$ の式で表すと $\boxed{ク}$ となる. また $0 < x < \pi$ とするとき, 方程式 $\sin 3x = 2\sin x$ の解は $x = \boxed{ケ}$, $\boxed{コ}$ である.

(17 関西学院大学 理工・総合政策・教育 (全学 2/1) 1(3))

177. 2 つの不等式 $0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}\pi$, $0 \leqq y \leqq 2\pi$ をみたす点 $(x,\ y)$ の領域を A とする. この A に属している点であって,

$$2\sin^2 x + (\sin y - \cos y)\sin x \geqq (\cos y - \sin y)\cos x + 1$$

という不等式をもみたす点の領域を B とする. 領域 A と領域 B の面積を, それぞれ, S_1 と S_2 とするとき, $\dfrac{S_2}{S_1}$ の値を求めなさい.

(17 埼玉大学 教育・経済学部 1)

◊178. a を実数とする. θ についての方程式

$$a\cos\theta + 2\sin\theta = 2a + 1$$

が $0 < \theta < \pi$ の範囲で 2 つの異なる解をもつのは

$$\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}} < a < \frac{\sqrt{\boxed{キ}} + \boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$$

のときである.

(17 早稲田大学 スポーツ科学部 2)

179. 整数係数の 3 次多項式 $f(x)$ が $f(0) = 1$ かつ $f\left(\cos\dfrac{\pi}{7}\right) = 0$ を満たすとき, $f(x)$ を求めよ.

(17 早稲田大学 教育学部 1(3))

180. 次の問に答えよ.

(1) 方程式 $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0$ を解け.

(2) $\cos 4\theta$ を $\cos\theta$ を用いて表せ.

(3) $\cos\dfrac{4\pi}{5} = -\cos\dfrac{\pi}{5}$ であることを示し, $\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ.

(17 宮城教育大学 教育学部 (中等教育・初等教育・特別支援) 1)

181. 実数 a に対し，$f(\theta)=\cos^2\theta+6a\sin\theta+8a-2\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とする．方程式 $f(\theta)=0$ が解をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

(17 京都府立大学 生命環境学部 1(3))

182.

連立方程式

$$\begin{cases} \cos 2\alpha+\cos 2\beta=\dfrac{4}{15} & \cdots\cdots\cdots\cdots ⑦ \\ \cos\alpha\cos\beta=-\dfrac{2\sqrt{15}}{15} & \cdots\cdots\cdots\cdots ⑧ \end{cases}$$

を考える．ただし，$0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ であり，$\alpha<\beta$ かつ

$$|\cos\alpha| \geqq |\cos\beta| \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

とする．このとき，$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ の値を求めよう．

2 倍角の公式を用いると，⑦から

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$$

が得られる．また，⑧から，$\cos^2\alpha\cos^2\beta=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{15}$ である．

したがって，条件⑨を用いると

$$\cos^2\alpha=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}},\quad \cos^2\beta=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である．よって，⑧と条件 $0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$，$\alpha<\beta$ から

$$\cos\alpha=\frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}},\quad \cos\beta=\frac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である．

(17 年 センター本試験 II・B 第 1 問［1］)

3.4 加法定理

°183. $\sin 75^\circ$ の値を求めよ．

(17 愛媛大学 工・教育・農学部 1(4))

184. 座標平面上の点で x 座標，y 座標がともに整数であるような点を格子点ということにする．

(1) 原点を中心とする半径 $\sqrt{7}$ の円の内部にある格子点で，原点から最も遠い点までの距離を求めよ．

(2) $\cos 15^\circ$ を求めよ．

(3) P，Q，R を異なる三つの格子点とする．$\angle\mathrm{PQR}$ は 15° にはならないことを示せ．

(17 三重大学 教育・生物資源・人文学部 2)

185. 座標平面上に点 O(0, 0)，A(4, 0)，B(1, 1)，C(k, k) をとる．ただし k は正の実数である．また $\angle\mathrm{OAB}$ を θ と表す．以下の問いに答えよ．

(1) $\cos\theta$，$\cos 2\theta$ を求めよ．

(2) $\angle\mathrm{OCA} = 2\theta$ となるように k を定めよ．

(3) k を (2) で求めたものとする．3 点 A，B，C を通る円と x 軸との交点で，A 以外のものを D と表す．このとき $\cos\angle\mathrm{DCA}$ を求めよ．また $\triangle\mathrm{OCD}$ と $\triangle\mathrm{ACD}$ の面積比を求めよ．

(17 三重大学 医学部 2)

186. 次の問いに答えよ．

(1) n を自然数とする．三角関数の加法定理を用いて，等式

$$\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n+1)\theta$$

を導け．

(2) $\cos 2\theta = T_2(\cos\theta)$，$\cos 3\theta = T_3(\cos\theta)$ を満たす整式 $T_2(x)$，$T_3(x)$ をそれぞれ求めよ．

(3) 自然数 n に対し，$\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$ を満たす整数係数の n 次の整式 $T_n(x)$ が存在することを示せ．

(4) 自然数 k に対し，$\cos\dfrac{\pi}{4k}$ は無理数であることを示せ．ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい．

(17 埼玉大学 理 (数学)・工学部 1)

187. 実数 a，b に対して

$$f(\theta) = \cos 3\theta + a\cos 2\theta + b\cos\theta$$

とし，$0 < \theta < \pi$ で定義された関数

$$g(\theta) = \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos\theta - 1}$$

を考える．

(1) $f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x = \cos\theta$ の整式で表せ．

(2) $g(\theta)$ が $0 < \theta < \pi$ の範囲で最小値 0 をとるための a, b についての条件を求めよ．また，条件をみたす点 $(a,\ b)$ が描く図形を座標平面上に図示せよ．

(17 東京大学 理科 1)

188. k を定数として θ の方程式

$$\cos 2\theta = k \sin\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える．

(1) この方程式が異なる二つの解を持つような k の範囲を求めよ．

(2) k が (1) の範囲にあるとして，二つの解を $\theta = \alpha,\ \beta$ とおく．$\sin\alpha\sin\beta$ を求めよ．さらに $\sin\alpha + \sin\beta$，$\cos(\alpha+\beta)$ の値を k を用いて表せ．

(17 三重大学 工学部 3)

◊189. p, q を自然数，α, β を

$$\tan\alpha = \frac{1}{p}, \quad \tan\beta = \frac{1}{q}$$

を満たす実数とする．このとき

$$\tan(\alpha + 2\beta) = 2$$

を満たす p, q の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ．

(17 京都大学 理系 (総合人間・教育・理・医・薬・農・工・経済学部) 3)

190. p, q を自然数，α, β を

$$\tan\alpha = \frac{1}{p}, \quad \tan\beta = \frac{1}{q}$$

を満たす実数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 次の条件

(A) $\quad \tan(\alpha + 2\beta) = 2$

を満たす p, q の組 $(p,\ q)$ のうち，$q \leqq 3$ であるものをすべて求めよ．

(2) 条件 (A) を満たす p, q の組 $(p,\ q)$ で，$q > 3$ であるものは存在しないことを示せ．

(17 京都大学 文系 (総合人間・文・教育・法・経済学部) 4)

191. xy 平面上に原点 O を中心とする単位円がある．単位円上に点 A をとり，半径 OA が x 軸の正の部分となす角を θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とする．さらに単位円上に点 B, C を，反時計回りに点A，B，C の順に並ぶようにとる．$\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\pi}{4}$, $\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{\pi}{3}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 A，B，C について，それぞれの座標を θ を用いて表せ．

(2) 3 点 A，B，C の x 座標の和が 0 となるときの θ に対し，$\tan\theta$ を求めよ．

(3) 3 点 A，B，C の x 座標の和の平方と，3 点 A，B，C の y 座標の和の平方との和を求めよ．

(17 秋田大学 教育文化・理工学部 2)

192. α, ω は定数で，$\omega > 0$ とする．媒介変数 t で表された曲線

$$x = 2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \quad y = \sin(\omega t + \alpha)$$

について，t を消去して x, y の方程式を求める．$\alpha = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，求める方程式は $\boxed{(ア)}$ である．また，$-\dfrac{\pi}{3} < \alpha < \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$\beta = \sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right)$ とおくと，求める方程式は

$$\boxed{(イ)}x^2 - \boxed{(ウ)}xy + \boxed{(エ)}y^2 = 1$$

である．ただし，$\boxed{(イ)}$, $\boxed{(ウ)}$, $\boxed{(エ)}$ には β の式を書きなさい．

(17 慶應義塾大学 理工学部 1(1))

◇193. $0 < A < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < B < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < C < \dfrac{\pi}{2}$ とし，$a = \tan A$, $b = \tan B$, $c = \tan C$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $A = \dfrac{\pi}{3}$, $B = \dfrac{\pi}{4}$, $C = \dfrac{5}{12}\pi$ のとき，a, b, c, $a+b+c$, abc の値をそれぞれ求めよ．

(2) $a+b+c = abc$ のとき，つねに $A+B+C = \pi$ が成り立つことを示せ．

(3) $a+b+c = abc$ かつ $C = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，$a+b$ の最小値，および，そのときの A, B の値をそれぞれ求めよ．

(17 静岡大学 理 (生物・地球)・教育・農学部 3)

3.5 最大・最小

194. 座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}\big(\sin\theta,\ \sin^2\theta\big)$, $\mathrm{B}\big(\cos\theta,\ \cos^2\theta\big)$ を考え，A，B 間の距離を L とする．ただし，θ は条件

$$(*) \quad 0 \leqq \theta < 2\pi \text{ かつ } \sin\theta - \cos\theta - 1 > 0$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) $(*)$ を満たす θ の範囲を求めよ．

(2) $t=\sin\theta\cos\theta$ とおくとき，t のとり得る値の範囲を求めよ．

(3) L を (2) の t を用いて表せ．

(4) L の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

(17 広島大学 経済・教育学部 1)

195. 座標平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}\left(3,\ \sqrt{3}\right)$，$\mathrm{B}(9,\ 0)$ がある．線分 OB 上に 2 点 P，Q を $\angle\mathrm{PAQ}=90^\circ$ となるようにとる．ただし，点 Q の x 座標は点 P の x 座標より大きいものとする．$\angle\mathrm{APQ}=\theta$ とし，$\triangle\mathrm{APQ}$ の面積を S とする．

(1) S を θ を用いて表せ．

(2) S の最小値，およびそのときの点 P と点 Q の x 座標を求めよ．

(3) S が $\triangle\mathrm{AOB}$ の面積の $\dfrac{2}{3}$ 倍となるとき，点 P と点 Q の x 座標を求めよ．

(17 千葉大学 教育・国際・文・法経・園芸・先進学部 2)

°196. 座標平面上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin 2\theta)$ について，次の問に答えよ．ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする．

(1) 点 P が原点 O に一致するような θ の値をすべて求めよ．

(2) 点 P が単位円周上にあるような θ の値をすべて求めよ．

(3) $t=\sin^2\theta$ とおくとき，OP^2 を t を用いて表せ．

(4) OP の最大値を求めよ．

(17 香川大学 教育・農・法学部 5)

197. 座標平面上に 2 点 A，B を以下のようにとる．

x 軸の正の部分を始線とし，
角 θ の動径と原点 O を中心とする半径 2 の円との交点を A とし，
角 2θ の動径と原点 O を中心とする半径 1 の円との交点を B とする．

さらに A に最も近い x 軸上の点を P とし，B に最も近い x 軸上の点を Q とする．ただし，A が x 軸上にあるときは A 自身を P とし，B が x 軸上にあるときは B 自身を Q とする．次の問いに答えよ．

(1) $0<\theta<\pi$ の範囲で三角形 OAB の面積と辺 AB の長さを θ で表せ．

(2) $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で線分 PQ の長さを θ で表せ．

(3) $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で線分 PQ の長さの最大値と，その時の θ の値を求めよ．

(4) $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で線分 PQ の長さが $\dfrac{5}{4}$ となるときの $\cos\theta$ の値を求めよ．

(17 岩手大学 理工学部 3)

°198.　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$s = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$, $t = \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $s^2 + t^2$ の値を求めよ．

(2) s および t のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) $s = -\dfrac{1}{2}$ のとき，t の値を求めよ．また，そのときの $\cos\theta$ の値を求めよ．

(17 関西大学 文系 (全学部 2/7) 1)

199.　関数 $y = 3\cos 2\theta + 4\sin 2\theta + 6\sin\theta + 12\cos\theta$ について，次の各問に答えよ．ただし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする．

(1) $x = \sin\theta + 2\cos\theta$ として，y を x の関数で表せ．

(2) y の最大値と最小値を求めよ．

(17 茨城大学 教育学部 3)

200.　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，関数 $f(x) = 4\sqrt{3}\cos x - 4\sin x + 5$ は $x = \dfrac{\boxed{(1)\,\vdots\,(2)}}{\boxed{(3)}}\pi$ で最大値 $\boxed{(4)\,\vdots\,(5)}$ をとり，$x = \dfrac{\boxed{(6)}}{\boxed{(7)}}\pi$ で最小値 $\boxed{(8)\,\vdots\,(9)}$ を とる．

(17 慶應義塾大学 商学部 1(1))

3.6　その他

201.　O を原点とする座標平面上において，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ を満たす実数 θ に対し，方程式

$$(1 + \sin\theta)x - (\cos\theta)y = \cos\theta$$

で表される直線を l_θ とする．$\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，直線 l_θ は x 軸と点 $\mathrm{P}\left(\boxed{\text{ケ}},\ 0\right)$ で交わり，y 軸と点 $\mathrm{Q}\left(0,\ \boxed{\text{コ}}\right)$ で交わる．また，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，直線 l_θ は y 軸と一致する．

一方，θ を媒介変数とする点 $\mathrm{R}\left(\boxed{\text{サ}},\ \sin\theta\right)$ は，直線 l_θ 上に存在する．

点 $(-1,\ 0)$ と点 $(1,\ 0)$ を結ぶ線分上に点 P が存在する θ の範囲は $\boxed{\text{シ}}$ である．また，点 P の x 座標を t と書くとき，$\sin\theta$, $\cos\theta$ は t を用いて

$$\sin\theta = \boxed{\text{ス}},\quad \cos\theta = \boxed{\text{セ}}$$

と表せる．

$-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$ を満たす実数 α に対して，θ が $-\dfrac{\pi}{2}$ から α まで変化するとき，点 R の軌跡を C_α とする．ただし，$\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ のとき，点 R の座標は $(0,\ -1)$ と定める．曲線 C_α と直線 l_α で囲まれた図形の面積を $S(\alpha)$ とする．

(1) $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$S(\alpha) = \boxed{\text{ソ}}$ である．$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ で，$\alpha = \cos\alpha$ を満たす α を β とする．このとき，$S(\beta) = \boxed{\text{タ}}$ である．

(2) $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$ のとき，$S(\alpha) = \boxed{\text{チ}}$ である．(1) の β に対して，$S(\pi - \beta) = \boxed{\text{ツ}}$ である．

(3) 曲線 C_α の長さの半分が $S(\alpha)$ に一致するとき，$\alpha = \boxed{\text{テ}}$ である．

(17 立命館大学 理系 (全学統一 2/2) 2)

§4 平面図形

4.1 点と直線

202. 正の実数 $a,\ b,\ c$ は $a + b + c = 1$ を満たす．連立不等式

$$|ax + by| \leqq 1, \quad |cx - by| \leqq 1$$

の表す xy 平面の領域を D とする．D の面積の最小値を求めよ．

(17 一橋大学 法・経済・商・社会学部 4)

203. a を正の実数とする．2 つの関数

$$y = \frac{1}{3}ax^2 - 2a^2x + \frac{7}{3}a^3, \quad y = -\frac{2}{3}ax^2 + 2a^2x - \frac{2}{3}a^3$$

のグラフは，2 点 A，B で交わる．但し，A の x 座標は B の x 座標より小さいとする．また，2 点 A，B を結ぶ線分の垂直二等分線を ℓ とする．

(1) 2 点 A，B の座標を a を用いて表せ．

(2) 直線 ℓ の方程式を a を用いて表せ．

(3) 原点と直線 ℓ の距離 d を a を用いて表せ．また，$a > 0$ の範囲で d を最大にする a の値を求めよ．

(17 筑波大学 1)

204. △ABC において，AB = 3，BC = 5，CA = 4 とする．△ABC の内接円の半径を r とすると，$r = \boxed{\text{サ}}$ であり，外接円の半径を R とすると，R = $\boxed{\text{シ}}$ となる．

また，内心と外心の距離は $\boxed{\text{ス}}$ であり，内心と垂心の距離は $\boxed{\text{セ}}$ となる．
この内心，外心，垂心の 3 点を頂点とする三角形の面積は, $\boxed{\text{ソ}}$ となる．

(17 立命館大学 薬学方式 (2/2) 1(3))

205.　k を実数とし，座標平面上で次の 2 つの放物線 C, D の共通接線について考える．

$$C:\ y = x^2 + k$$
$$D:\ x = y^2 + k$$

(1) 直線 $y = ax + b$ が共通接線であるとき，a を用いて k と b を表せ．ただし $a \fallingdotseq -1$ とする．

(2) 傾きが 2 の共通接線が存在するように k の値を定める．このとき，共通接線が 3 本存在することを示し，それらの傾きと y 切片を求めよ．

(17 東京大学 理科 5)

°206.　k を実数の定数とする．直線 $(k+2)x + (3k-2)y - 16 = 0$ は k の値に関係なく定点 P を通る．このとき，P の座標は $\boxed{\text{さ}}$ である．また，P と直線 $3x + 4y + 5 = 0$ の距離は $\boxed{\text{し}}$ である．

(17 茨城大学 後期 工学部 1(8))

207.　xy 平面で，次の 2 直線を考える．

$$\ell_1 : ax - y - a = 0$$
$$\ell_2 : (a-1)x - (a+1)y + a + 1 = 0$$

a の値にかかわらず，直線 l_1 は定点を通る．この点を A とする．a の値にかかわらず，直線 ℓ_2 は定点を通る．この点を B とする．また，直線 ℓ_1 と直線 l_2 との交点を C とする．実数 a が $a > 1$ の範囲を動くとき，次の問いに答えよ．

(1) 定点 A, B の座標は，それぞれ $\mathrm{A}\left(\boxed{\text{キ}},\ \boxed{\text{ク}}\right)$ と $\mathrm{B}\left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$ である．

(2) 直線 ℓ_1 と直線 ℓ_2 とのなす角を鋭角で求めると $\boxed{\text{サ}}$ 度である．

(3) 点 C が描く曲線に両端を入れて考えると，その長さは $\boxed{\text{シ}}$ である．

(4) 三角形 ABC の面積の最大値は $\boxed{\text{ス}}$ である．

(17 早稲田大学 国際教養学部 2)

208.　座標平面上の 3 点 A(1, 0)，B(3, 1)，C(2, 2) を頂点とする △ABC の内部および境界を T とおく．実数 a に対して，条件

$$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2 \leqq a$$

を満たす座標平面上の点 P の全体を D とする．ただし，AP は点 A と点 P の距離を表す.

(1) D が少なくとも 1 つの点 P を含むような a の値の範囲を求めよ.

(2) D が T を含むような a の値の範囲を求めよ.

(3) (1) のもとで，D が T に含まれるような a の値の範囲を求めよ.

(17 北海道大学 理系 5)

4.2　円

◊209.　xy 平面上に放物線 $y=x^2$ がある．t を正の実数とし，放物線 $y=x^2$ 上に点 O(0, 0)，P(−1, 1)，Q(t, t^2) をとる．3 点 O，P，Q を通る円を C とする．次の問いに答えよ.

(1) 円 C の中心の座標を t を用いて表せ.

(2) 円 C と放物線 $y=x^2$ の共有点の個数が 3 個となるような t をすべて求めよ.

(3) t が正の実数全体を動くとき，円 C の半径の最小値を求めよ.

(17 埼玉大学 後期 理・工学部 3)

4.3　円と直線

210.　座標平面上に 2 点 A$\left(0,\ -t^2\right)$，M(t, 0) をとる．ただし，$t>0$ とする．y 軸上に，AM ⊥ BM となるような点 B をとり，直線 AM 上に，BA = BC となるような，点 A と異なる点 C をとる．このとき，次の問に答えよ.

(1) 点 C の座標を求めよ.

(2) 点 C を中心とし，点 B を通る円の方程式を求めよ.

(3) (2) で求めた円上の点で，y 座標が最小となるような点の座標を求めよ.

(17 香川大学 教育・農・法学部 6)

211.　実数 a に対して，座標平面上の直線 $y=ax$ を ℓ_a とする.

(1) 点 $\left(1,\ 3+\sqrt{10}\right)$ を中心とする円 C が ℓ_a と y 軸の両方に接するとき，C の半径は $\boxed{(1)}$ であり，a の値は $\boxed{(2)}$ である.

(2) $a=2$ とする．ℓ_a と y 軸の両方に接する半径 2 の円の中心を頂点とする四角形の面積は $\boxed{(3)}\boxed{(4)}\sqrt{\boxed{(5)}}$ である.

(3) $a=\sqrt{3}$ とする．ℓ_a と y 軸の両方に接し，中心が第 1 象限にある 2 つの円 C_1, C_2 を考える．C_1 の半径を 1 とし，C_1, C_2 と ℓ_a との接点をそれぞれ P_1, P_2 とする．線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さが 4 であるとき，C_2 の半径は $\boxed{(6)}+\boxed{(7)\,(8)}\sqrt{\boxed{(9)}}$ である．

(17 慶應義塾大学 経済学部 1)

212. 実数 x, y, k は $x^2+y^2=3x+4y=kx-4$ を満たす．k のとりうる値の範囲を求めよ．

(17 一橋大学 後期 経済学部 1)

213. xy 平面上に円 $O: x^2+y^2=9$ と円 $C: (x-5\sqrt{2})^2+y^2=4$，点 $(a,\ a)$ を中心とする円 P がある．円 O は円 P に内接し，円 C は円 P に外接する．また，円 O と円 C の共通接線のうち，2 つの接点の y 座標がいずれも負となるものを接線 l とする．ただし，a は $a>0$ とする．このとき，

(i) $a=\dfrac{\boxed{(8)}\sqrt{\boxed{(9)}}}{\boxed{(10)}}$ である．

(ii) 接線 l の方程式は $y=\dfrac{\boxed{(11)}}{\boxed{(12)}}x-\dfrac{\boxed{(13)(14)}\sqrt{\boxed{(15)}}}{\boxed{(16)}}$ であり，接線 l が円 P によって切り取られる線分の長さは $\boxed{(17)}$ である．

(17 慶應義塾大学 薬学部 1(2))

°214. 円 $x^2+y^2-10x+4y=0$ と直線 $y=2x-7$ の交点を A，B とする．このとき，線分 AB の長さは $\boxed{(サ)}$ である．また，線分 AB の垂直二等分線の方程式は $y=\boxed{(シ)}$ である．

(17 慶應義塾大学 看護医療学部 2(2))

215. xy 平面上に原点 O を中心とした半径 2 の円 C がある．$p>2$ とし，点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ を通り，円 C に接する 2 本の直線を考える．これらの直線と円 C との接点を点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，点 $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ $(a_2>b_2)$ とする．また三角形 ABP の重心を点 G とする．以下の問に答えよ．

(1) 点 A と点 B の座標を p を用いて表せ．

(2) 点 G の座標を p を用いて表せ．

(3) 点 G が円 C の円周上にあるとき，$\angle\mathrm{APB}$ の大きさを求めよ．

(4) p が $p>2$ の範囲を動くとき，線分 OG の長さ d の最小値とそのときの p の値を求めよ．

(17 岐阜大学 教育・医・工・地域科学・応用生物科学部 2)

4.4 軌跡

216. 座標平面上の放物線 $y=x^2$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ $(t>0)$ をとる．原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り，直線 OP に垂直な直線を l とする．また，$0<a \leqq 1$ として，点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ をとる．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 直線 PA と l は交わることを示し，その交点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の座標を t と a を用いて表せ．

(2) t がすべての正の実数値をとって変化するとき，(1) で求めた点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡が $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ を通るとする．このとき，定数 a の値を求め，点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡を求めよ．

(17 金沢大学 理工・医薬保健学域 2)

217. 放物線上の異なる 2 個の点での接線が直交しているとする．このとき，接線の交点の軌跡が直線となることを証明しなさい．

(17 埼玉大学 教育・経済学部 4)

218. xy 平面上の単位円 C の外側の点 $\mathrm{R}(X,\ Y)$ から C へ 2 本の接線を引き，C との接点を P，Q とする．$\angle\mathrm{PRQ}$ を θ で表すとき，$\cos\theta$ は $X,\ Y$ を用いて $\cos\theta=\dfrac{\boxed{⑤}}{X^2+Y^2}$ と表される．$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき，点 R は原点を中心とする，半径 $2\sqrt{\boxed{⑥}}$ の円周上を動く．

(17 関西大学 理系 (全学部 2/7) 4(5))

219. 座標平面上に点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ がある．原点を中心とする半径 1 の円から点 A を除いた曲線を C とする．C 上の点 P に対し，A を始点とする半直線 AP 上に点 Q を以下の 2 つの条件 (i)，(ii) を満たすようにとる．

(i) 線分 PQ の長さは線分 BP の長さと等しい．

(ii) 点 P は線分 AQ 上にある．

点 P が C 上を動くとき，点 Q の軌跡を求め，図示せよ．

(17 千葉大学 後期 医・工・理 (数・情) 学部 4)

220. a を定数とし，曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ を C，直線 $y=a(x+1)$ を l とする．C と l が異なる 2 点で交わっているとき，次の問いに答えよ．

(1) a のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) C と l の 2 つの交点の x 座標を α, β とするとき $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ をそれぞれ a を用いて表わせ．

(3) C と l の 2 つの交点を結ぶ線分の中点の軌跡を求めよ．

(17 福岡教育大学 中等教育 (数学) 2)

4.5 領域

221. 実数 x, y が不等式 $x^2+y^2 \leqq 4$ を満たすとき，$Z=2x+3y$ の最大値は $\boxed{\text{カ}}$ であり，そのときの x の値は $\boxed{\text{キ}}$，y の値は $\boxed{\text{ク}}$ である．

また，$W=3x^2+y$ の最大値は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{コ}}$ である．

(17 立命館大学 薬学方式 (2/2) 1(2))

222. 座標平面上で，点 O(0, 0)，A(0, 1)，B(1, 0)，C(1, 1) を考える．点 P が点 B から点 C まで動くとき，正方形 AOBC の辺および内部において，線分 OP の垂直 2 等分線が通る範囲の面積を求めよ．

(17 早稲田大学 教育学部 1(1))

223. $f(x)=2-ax$, $g(x)=|bx-2|$ とする．ただし，a と b は $0<a<b$ を満たす定数である．次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $f(x)-g(x) \geqq 1$ を満たす x が存在するための a と b の条件を求めよ．

(2) a と b は (1) で求めた条件を満たしているとする．x と y が

$$f(x)-g(x) \geqq 1, \quad f(x) \geqq y \geqq g(x)$$

をともに満たす範囲を動くとき，$x+y$ の最大値および最小値を求めよ．

(17 お茶の水女子大学 理学部 3)

224. 不等式

$$(x^2+4y+6)\left(x^2+y^2-2x+\frac{7}{8}\right) \leqq 0$$

の表す領域を D とする．点 P$(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，次の問いに答えよ．

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) $k=x+y$ とおくとき，k のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) $x^3+y^3+3x^2y+3xy^2-x-y+2$ の最大値を求めよ．

(17 兵庫県立大学 中期 理学部 4)

225. a, b を実数とし，放物線 $y=(x-a)^2+b$ を Q とおく．また，直線 $y=x-1$ を l とおく．Q と l は共有点を持たないか，あるいは 1 点で接しているとする．

(1) a, b の満たす条件を求めよ．

(2) Q 上の点のうち l までの距離が最小となるものを A とおく．また，Q 上の点 B における Q の接線は，点 C において l と垂直に交わっているとする．このとき，3 点 A，B，C の座標を a, b を用いて表せ．

(3) a, b がさらに条件

$$a \geqq 0, \quad b \leqq 2, \quad b \leqq 2a+1$$

を満たすとき，(2) で求めた 3 点を頂点とする △ABC の面積の最大値と最小値を求めよ．

(17 北海道大学 後期 理 (数学，物理，生物，地球惑星)・工学部 4)

226. 連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2-2x+1 \\ y \leqq -x^2+4x+1 \end{cases}$$

の表す領域を D とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) D を座標平面上に図示せよ．

(2) a を実数とする．点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$-ax+y$ の最大値を $f(a)$ とする．$f(a)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた $f(a)$ に対し，関数 $b=f(a)$ のグラフをかけ．

(17 宮崎大学 教育学部 9)

4.6 平面幾何

°227. 三角形 ABC において，辺 AB を 3 : 2 に内分する点を D，辺 AC を 5 : 3 に内分する点を E とする．また，線分 BE と CD の交点を F とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) CF : FD を求めよ．

(2) 4 点 D，B，C，E が同一円周上にあるとする．このとき，AB : AC を求めよ．さらに，この円の中心が辺 BC 上にあるとき，AB : AC : BC を求めよ．

(17 香川大学 医学部 3)

228. $AB > AC$ となる三角形 ABC に対して，辺 BC の中点 M を通り辺 BC に垂直な直線が，三角形 ABC の外接円と交わる点を P，Q とする．ただし，弧 AB と交わる点を P とし，弧 BC と交わる点を Q とする．さらに，P，Q から直線 AB にそれぞれ垂線 PR, QS を引く．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\angle PBR = \angle PMR$ であることを示せ．

(2) 三角形 SMR は直角三角形であることを示せ．

(17 茨城大学 教育学部 2)

229. x を 1 より大きい実数とする．面積が 1 である三角形 ABC において，辺 BC, CA，AB をそれぞれ $x:1$ に内分する点をそれぞれ D，E，F とし，線分 BE と CF，CF と AD，AD と BE の交点をそれぞれ G，H，I とする．以下の問いに答えよ．

(1) 三角形 DEF の面積が $\dfrac{1}{2}$ となる x の値を求めよ．

(2) $FG:GC$ を x を用いて表せ．

(3) 三角形 GHI の面積が $\dfrac{1}{4}$ となる x の値を求めよ．

(17 奈良女子大学 生活環境学部 4)

°230. 一辺の長さが 6 である正三角形 ABC の外接円 O の弧 AB (ただし短いほうの弧) の上に，弧 AP : 弧 PB = 1 : 3 となる点 P をとる．点 P における円 O の接線と線分 CB の延長との交点を Q とするとき，$\angle PQB$ の大きさは $\boxed{\text{ア}}$ 度であり，線分 PQ の長さは $\boxed{\text{イ}}$ である．

(17 早稲田大学 国際教養学部 1(1))

°231.

△ABC において，$AB = 3,\ BC = 8,\ AC = 7$ とする．

(1) 辺 AC 上に点 D を $AD = 3$ となるようにとり，△ABD の外接円と直線 BC の交点で B と異なるものを E とする．このとき，$BC \cdot CE = \boxed{\text{アイ}}$ であるから，$CE = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

直線 AB と直線 DE の交点を F とするとき，$\dfrac{BF}{AF} = \dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ であるか

ら，AF $= \dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である.

(2) $\angle$ABC $= \boxed{\text{サシ}}^\circ$ である．△ABC の内接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ で

あり，△ABC の内心を I とすると BI $= \dfrac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である.

(17 年 センター本試験 I・A 第 5 問)

§5　2 次曲線

5.1　楕円

232.　楕円 $x^2 + 2y^2 = 1$ を D とする．r が正の実数のとき，点 $(1 - r,\ 0)$ を中心とする半径 r の円を C とする．次の問いに答えよ.

(1) D と C が 3 つの異なる共有点をもつような r の値の範囲を求めよ.

(2) r が (1) で求めた範囲にあるとき，(1) の 3 つの共有点が作る三角形の面積 $S(r)$ を求めよ.

(3) r が (1) で求めた範囲を動くとき，(2) で求めた $S(r)$ の最大値とそのときの r の値を求めよ.

(17 同志社大学 理系 (政策・文化情報 (理系)・生命医科・スポーツ健康 2/7) 3)

233.　実数 x, y が $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ を満たしながら変化するとき，$x^2 - \dfrac{y^2}{4} - 2xy$ の最大値は $\boxed{③}$ である.

(17 関西大学 理系 (全学部 2/7) 4(3))

234.　t は，$t > \dfrac{1}{2}$ を満たす実数とする．座標平面上に楕円 $x^2 + 4y^2 = 1$ が与えられている．点 P$(-1,\ -t)$ からこの楕円に引いた接線のうちで y 軸と平行でない接線を ℓ，その接点を Q$(a,\ b)$ とする．また，x 軸，y 軸および接線 ℓ で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 点 Q$(a,\ b)$ における接線 ℓ の方程式は，$ax + 4by = 1$ であることを示せ.

(2) a, b を，それぞれ t を用いて表せ.

(3) 面積 $S(t)$ を，t を用いて表せ.

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t}$ を求めよ．

(17 新潟大学 理系 3)

235. 次の問いに答えよ．

(1) 座標平面の 2 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ を焦点とし，これらの 2 点からの距離の和が 4 である点からなる楕円が以下の方程式で表されるとする．

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=1$$

このとき，定数 A, B, C, D, E の値を求めよ．

(2) 座標平面の 4 点 $(1,\ 1)$，$(1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ を通る楕円を考える．この楕円の 2 つの焦点から楕円上の点までの距離の和を L とするとき，この楕円の方程式を L を用いて表せ．

(3) (2) の楕円が点 $(2,\ 0)$ を通るとき，その楕円の焦点を求めよ．

(17 お茶の水女子大学 後期 理学部 (数学・情報科学) 3)

236. 座標平面において E を

$$\frac{x^2}{2}+y^2=1$$

で表される楕円とする．また，E 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ における E の接線を l_1 する．

(1) l_1 の傾きを求めよ．

l_1 上の点で x 座標が $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$ であるものを A とする．

(2) 点 A の y 座標を求めよ．

(3) 点 A を通り，傾きが m である直線と楕円 E が共有点をもつとき，その共有点の x 座標を m の式で表せ．

点 A を通り，楕円 E に接する直線で l_1 とは異なるものを l_2 とする．

(4) l_2 の傾きを求めよ．

楕円 E と l_2 の接点を Q とする．

(5) 点 Q の座標を求めよ．

(6) 三角形 PAQ の内部と楕円 E の内部の共通部分の領域を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

(17 東京理科大学 基礎工学部 5)

5.2　双曲線

°237.　双曲線 $H : x^2 - y^2 = 1$ 上の 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(s,\ t)$ $(t \neq 0)$ を考える．

(1) 点 A における H の接線と直線 BC の交点を P とするとき，P の座標を s と t を用いてあらわせ．
(2) 点 C における H の接線と直線 AB の交点を Q とするとき，Q の座標を s と t を用いてあらわせ．
(3) 点 B における H の接線と直線 AC の交点を R とするとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあることを証明せよ．

(17 大阪大学 理系 1)

5.3　極座標と極方程式

◊238.　O を原点とする座標平面上に長さ 1 の線分 AB がある．線分 AB の端点 A は x 軸上の $x \geqq 0$ の部分を，端点 B は y 軸上の $y \geqq 0$ の部分を動くものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 線分 AB が x 軸となす角 $\angle\mathrm{OAB}$ が θ であるとき，直線 AB を L_θ で表す．直線 L_θ の方程式を求めよ．ただし $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である．
(2) t は $0 < t \leqq 1$ を満たす定数とする．直線 $x = t$ と直線 L_θ との交点を P_θ とする．点 P_θ の y 座標が最大となる θ を α とするとき，$\cos\alpha$ を t を用いて表せ．
(3) 点 P_α の直交座標 $(x,\ y)$ を α を用いて表せ．また $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，点 P_α の極座標を求めよ．
(4) α が $0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，点 P_α の描く曲線を C とする．C 上の点 P_α における接線が L_α であることを示し，C の概形を図示せよ．

(17 旭川医科大学 3)

◊239.　座標平面における円 $x^2 + y^2 = 4$ を C とし，C の内側にある点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を 1 つ固定する．C 上に点 Q をとり，線分 QP の垂直二等分線と線分 OQ との交点を R とする．ただし O は座標原点である．点 Q が円 C 上を一周するとき，点 R が描く軌跡を $S(a,\ b)$ とする．

(1) $S(a,\ b)$ は長軸の長さ $\boxed{(あ)}$，短軸の長さ $\boxed{(い)}$ の楕円である．点 R の x 座標と y 座標をそれぞれ $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ (ただし $r > 0$ かつ $0 \leqq \theta < 2\pi$) とすると，$S(1,\ 1)$ の方程式は $r = \boxed{(う)}$ と表される．$S(1,\ 1)$ 上の点で y 座標が

最大となる点の座標を $(r_0\cos\theta_0,\ r_0\sin\theta_0)$ とすると $r_0=\boxed{(え)}$，$\theta_0=\boxed{(お)}$ である．

(2) t を $0<t<2$ の範囲で動かすとき，$S(t,\ 0)$ が通過してできる領域の面積は $\boxed{(か)}$ である．

(17 慶應大学 医学部 3)

§6 ベクトル

6.1 平面ベクトル

240. 1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている．点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を 2 : 1 に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ．

(17 東京大学 文科 2)

241. n を 4 以上の整数とする．座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している．$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OA_2}$，$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{OA_3}$，$\overrightarrow{d}=\overrightarrow{OA_4}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく．そして，線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するとする．

(1) $\overrightarrow{a}$ および $\overrightarrow{d}$ を，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$，k を用いて表せ．

(2) t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ．

(3) 不等式 $\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$ を示せ．

(17 千葉大学 教育・国際・文・法経・園芸・先進・理・薬・工・医・理学部 5)

242. 平面上に，$AB=3$，$AD=3$，$DC=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\sqrt{6}$ であり，辺 AB と辺 DC が平行な台形 ABCD がある．また，t を $0<t<1$ である実数とする．線分 BD を $t:(1-t)$ の比に内分する点を P とし，直線 AP と直線 BC の交点を Q とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 三角形 BCD の面積 S_0 を求めよ．

(2) 正の実数 s を $BQ:BC=s:1$ で定めるとき，$\overrightarrow{AQ}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ および s を用いて表せ．

(3) (2) の s を t を用いて表せ．

(4) 線分 PQ と線分 DC が共有点をもたない t の範囲を求めよ．

(5) t が (4) で求めた範囲にあるとき，四角形 PQCD の面積と三角形 ABP の面積が等しくなるときの t の値を求めよ．

(17 大阪府立大学 中期 工学域 2)

243. 三角形 ABC の内心を I，外心を O とし，辺 BC，CA，AB の長さを，それぞれ，a, b, c とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = r\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 r, s を，a, b, c を用いて表しなさい．

(2) 頂点 A に対応する内角の大きさが $\dfrac{\pi}{3}$ であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + u\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 t, u を，b, c を用いて表しなさい．

(17 埼玉大学 教育・経済学部 2)

244. 座標平面上に点 A$(-1,\ 0)$，B$(0,\ 2)$，C$(1,\ 0)$ がある．線分 AB 上に点 P，線分 BC 上に点 Q，線分 CA 上に点 R をとる．△ABC の外心を E とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) E の座標を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = l\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{EP}}$ の大きさを l を用いて表せ．

(3) △PQR の外心が E と一致するとき，l の値のとり得る範囲を求めよ．

(17 三重大学 後期 工・教育学部 3)

245. 座標平面上に点 A$(2,\ 0)$ をとり，原点 O を中心とする半径が 2 の円周上に点 B，C，D，E，F を，点 A，B，C，D，E，F が順に正六角形の頂点となるようにとる．ただし，B は第 1 象限にあるとする．

(1) 点 B の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \sqrt{\boxed{\text{イ}}}\right)$，点 D の座標は $\left(-\boxed{\text{ウ}},\ 0\right)$ である．

(2) 線分 BD の中点を M とし，直線 AM と直線 CD の交点を N とする．$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を求めよう．

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ は実数 r, s を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + r\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + s\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と 2 通りに表すことができる．ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \left(-\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\ \frac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \left(\boxed{\text{ク}},\ \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}\right)$$

であるから

$$r = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}, \quad s = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \left(-\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}, \ \frac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}\right)$$

である．

(3) 線分 BF 上に点 P をとり，その y 座標を a とする．点 P から直線 CE に引いた垂線と，点 C から直線 EP に引いた垂線との交点を H とする．

$\overrightarrow{\mathrm{EP}}$ が

$$\overrightarrow{\mathrm{EP}} = \left(\boxed{\text{テ}}, \ \boxed{\text{ト}} + \sqrt{\boxed{\text{ナ}}}\right)$$

と表せることにより，H の座標を a を用いて表すと

$$\left(\frac{\boxed{\text{ニ}}a^{\boxed{\text{ヌ}}} + \boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}, \ \boxed{\text{ハ}}\right)$$

である．

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ のなす角を θ とする．$\cos\theta = \dfrac{12}{13}$ のとき，a の値は

$$a = \pm\frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フヘ}}}$$

である．

(17 年 センター本試験 II・B 第 4 問)

246. t を $0 < t < \dfrac{1}{2}$ をみたす実数とする．三角形 OAB において，辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を O$'$，辺 BO を $t:(1-t)$ に内分する点を A$'$，辺 OA を $t:(1-t)$ に内分する点を B$'$ とし，線分 AA$'$ と BB$'$ の交点を P，BB$'$ と OO$'$ の交点を Q，OO$'$ と AA$'$ の交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OO'}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ．

(2) OR : RO$'$ を t を用いて表せ．

(3) 三角形 PQR の面積 M を三角形 OAB の面積 S と t を用いて表せ．

(17 大阪市立大学 理・医・工学部 2)

247. 座標平面上に点 A(2, 0) をとり，原点 O を中心とする半径が 2 の円周上に点 B，C，D，E，F を，点 A，B，C，D，E，F が順に正六角形の頂点となるようにとる．ただし，B は第 1 象限にあるとする．

(1) 点 B の座標は $\left(\boxed{ア},\ \sqrt{\boxed{イ}}\right)$，点 D の座標は $\left(-\boxed{ウ},\ 0\right)$ である．

(2) 線分 BD の中点を M とし，直線 AM と直線 CD の交点を N とする．$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を求めよう．

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ は実数 $r,\ s$ を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+r\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と 2 通りに表すことができる．ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\left(-\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}},\ \frac{\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\left(\boxed{ク},\ \sqrt{\boxed{ケ}}\right)$$

であるから

$$r=\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}},\quad s=\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$$

である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\left(-\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}},\ \frac{\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}\right)$$

である．

(3) 線分 BF 上に点 P をとり，その y 座標を a とする．点 P から直線 CE に引いた垂線と，点 C から直線 EP に引いた垂線との交点を H とする．

$\overrightarrow{\mathrm{EP}}$ が

$$\overrightarrow{\mathrm{EP}}=\left(\boxed{テ},\ \boxed{ト}+\sqrt{\boxed{ナ}}\right)$$

と表せることにより，H の座標を a を用いて表すと

$$\left(\frac{\boxed{ニ}a^{\boxed{ヌ}}+\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}},\ \boxed{ハ}\right)$$

である．

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ のなす角を θ とする．$\cos\theta = \dfrac{12}{13}$ のとき，a の値は

$$a = \pm\frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フヘ}}}$$

である．

(17 センター本試験 II・B 第 4 問)

248. 三角形 ABC において，辺 AB を $m:n$ に内分する点を P，辺 AC を $n:m$ に内分する点を Q，辺 BC の中点を M とする．ただし，$m>0$, $n>0$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{b}$ とおくとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) 線分 AM と PQ の交点を R とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，m, n を用いて表せ．

(3) $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AM}}$ を m, n を用いて表し，線分 PQ が三角形 ABC の重心を通らないことを示せ．

(17 香川大学 工・教育・農・法学部 1)

249. s を正の実数とする．鋭角三角形 ABC において，辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし，辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする．線分 CD と線分 AE の交点を F とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を求めよ．

(2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする．FG の長さが最大となるときの s を求めよ．

(17 東北大学 理 4 文 1)

250. 平面上に $\triangle\mathrm{ABC}$ と点 O があり，点 O は点 A，B，C と異なり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

を満たすものとする．次の問いに答えよ．

(1) 直線 OA と直線 BC の交点を P とする．長さの比 AP : PO を求めよ．

(2) 辺 AB を $8:3$ に内分する点を Q とする．直線 OQ と直線 CA は平行であることを示せ．

(3) 直線 OQ と直線 BC の交点を R とする．$\triangle\mathrm{APC}$ と $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積の比を求めよ．

(17 埼玉大学 後期 理・工学部 1)

◇**251.** x 座標，y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点とよぶ．格子点 O(0, 0) および A(50, 14) を考える．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=6$ を満たす格子点 P を一つ求めよ．

(2) m を自然数とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=6$ を満たす格子点 P のうち，長さ OP が m 番目に小さい点を P_m とする．P_1 および P_2 を求めよ．

(3) P_m を (2) で定めた格子点とする．自然数 k に対し，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+1}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+2}}$ を成分表示せよ．

(4) P_m を (2) で定めた格子点とする．Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}}$ を満たす点とする．四角形 $\mathrm{OQP}_{16}\mathrm{P}_{14}$ の周および内部に含まれる格子点をすべて求めよ．

(17 広島大学 理・工・生物生産・医・歯・薬・教育・総合科学部 5)

252. 三角形 OAB において，辺 AB を $1:2$ に内分する点を O'，辺 BO を $1:2$ に内分する点を A'，辺 OA を $1:2$ に内分する点を B' とし，線分 AA' と BB' の交点を P，BB' と OO' の交点を Q，OO' と AA' の交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\mathrm{OR}:\mathrm{RO}'=6:1$ となることを示せ．

(3) 三角形 PQR の面積 M を三角形 OAB の面積 S を用いて表せ．

(17 大阪市立大学 商・経済・医 (看護)・生活科学部 3)

253. 座標平面上で原点を O とし，3 点 A=$(-2,\ 1)$，B=$(3,\ -4)$，C=$(7,\ -1)$ をとり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．また，線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を P，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q，線分 PQ を $t:(1-t)$ に内分する点を R とする．ただし $0<t<1$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 点 R の座標を t を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ が垂直になる t の値を求めよ．

(17 岩手大学 教育・農・人文社会科学部 2)

254. 三角形 OAB において，$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 辺 AB の長さを求めよ．

(2) 点 O から辺 AB に垂線 OD を下ろすとき，D は辺 AB をどのような比で内分するかを求めよ．

(3) 点 A から辺 OB に下ろした垂線と OD との交点を H とする．三角形 OAH の面積を求めよ．

(17 岡山県立大学 中期 情報工学部 2)

6.2 内積

◇255. 平面上に三角形 OAB がある．実数 k に対して，直線 AB 上の点 C を $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす点とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 等式

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

が成り立つことを示せ．

(2) 等式

$$(1-k)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + k|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 + (1-k)|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 + k|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2$$

が成り立つことを示せ．

(3) 平面上の点 D が等式

$$(1-k)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + k|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2 + (1-k)|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 + k|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2$$

を満たすとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ の値を求めよ．

(17 静岡大学 理学部 (数)1 情報・工学部 4)

◇256. 座標平面の原点を O(0, 0) とする．以下の問いに答えよ．

(1) 座標平面上の異なる 3 点 P，Q，R が

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RQ}} + |\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 0$$

を満たしているとする．このとき $\overrightarrow{\mathrm{RP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ となることを示せ．

(2) 点 Q の座標を (3, 4) とし，点 R は $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}| = 1$ を満たしているとする．さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| \leqq 1$ を満たすすべての点 P に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RQ}} + |\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \leqq 0$$

が成り立っているとする．このとき点 R の座標を求めよ．

(17 岡山大学 経済・教育学部 4)

°257. 2 つのベクトル $(t+1,\ 2s,\ s+2)$，$(5t-3,\ s-2t,\ -s+2)$ が垂直となる s と t を求めよ．

(17 信州大学 後期 理・繊維学部 1(3))

°258. $\triangle$ABC とその重心 G に対して $\mathrm{AG}=2,\ \mathrm{BG}=3,\ \angle\mathrm{AGB}=\dfrac{2}{3}\pi$ であるとする．このとき，$\triangle$ABC の面積は $\boxed{\text{カ}}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{GC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{GA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{GB}}$ を用いて表すと $\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\boxed{\text{キ}}$ であるから，$\mathrm{GC}=\boxed{\text{ク}}$ である．また，$\cos\angle\mathrm{BGC}=\boxed{\text{ケ}}$ であり，$\mathrm{BC}=\boxed{\text{コ}}$ である．

(17 関西学院大学 文系 (全学 2/1) 2(2))

259. 平面上に点 O$(0,\ 0)$，A$(-1,\ 1)$，B$(2,\ 1)$，C$(5,\ -2)$ がある．点 P が $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ をみたしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}+\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である．

(17 早稲田大学 人間科学部 A，B 方式 3)

260. $\triangle$OAB において，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\sqrt{10}$，$\mathrm{OB}=3$ であるとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は $\boxed{\text{キ}}$，$\mathrm{OA}=\boxed{\text{ク}}$，$\mathrm{AB}=\boxed{\text{ケ}}$ である．また，$\triangle$OAB の面積は $\boxed{\text{コ}}$ となる．

次に，点 O を中心とする半径 $\sqrt{15}$ の円周上を点 P が動くとき，$\triangle$PAB の面積の最大値は $\boxed{\text{サ}}$ である．

(17 立命館大学 文系 (全学統一 2/2) 1(2))

°261. 座標平面上に原点 O$(0,\ 0)$ と 3 点 A$(2,\ -2)$，B$(p,\ q)$，C$(2,\ -18)$ がある．ただし，$p<0$ である．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は直交し，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ が成り立つ．このとき，$p=\boxed{\text{オカ}}$，$q=\boxed{\text{キク}}$ である．また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boxed{\text{ケ}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boxed{\text{コ}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表される．

(16 国士舘大学 理工学部 1(2))

°262. 平面上の定点 O を中心とする半径 1 の円周上に 3 点 A，B，C があり，

$$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

を満たしているとする．このとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boxed{\text{け}}$ である．

(17 茨城大学 後期 工学部 1(6))

263. 座標平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$，$\mathrm{C}(b_2,\ -b_1)$ を考える．さらに，$0 \leqq \theta_1 \leqq \pi$，$0 \leqq \theta_2 \leqq \pi$ に対し，

$$\mathrm{D}(a_1\cos\theta_1 - a_2\sin\theta_1,\ a_1\sin\theta_1 + a_2\cos\theta_1),$$
$$\mathrm{E}(b_1\cos\theta_2 - b_2\sin\theta_2,\ b_1\sin\theta_2 + b_2\cos\theta_2)$$

とおく．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$ を示せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} \fallingdotseq 0$ であるとする．$\theta_1 = \dfrac{\pi}{7}$ であるとき，θ_2 を求めよ．

(3) $\triangle\mathrm{OAB}$ の外接円の半径を r_1 とし，$\triangle\mathrm{ODE}$ の外接円の半径を r_2 とする．また，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S とする．$\mathrm{AB} : \mathrm{DE} = 2 : 3$ であるとき，$\triangle\mathrm{ODE}$ の面積を，S, r_1, r_2 で表せ．3 点 O，A，B は同一直線上にないものとし，3 点 O，D，E も同一直線上にないものとする．

(17 信州大学 医・理・経法・工学部 3)

264. ひし形 OABC において，辺 AB を $1:2$ に内分する点を D とし，対角線 AC を $3:1$ に内分する点を E とする．また，直線 OE と辺 BC の交点を F とする．$\angle\mathrm{DOF} = 90^\circ$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(2) $\cos\angle\mathrm{AOC}$ の値を求めよ．

(3) ひし形 OABC の面積が $\dfrac{20}{7}$ であるとき，辺 OA の長さを求めよ．

(17 滋賀大学 後期 経済学部 1)

265. 平面上の点O，A，Bに対して $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおき，$|\vec{a}| = 2$，$|\vec{a} - \vec{b}| = 1$，$(\vec{a} - \vec{b})\cdot\vec{a} = 1$ とする．ただし，ベクトル $\vec{x}$ の大きさを $|\vec{x}|$，ベクトル $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積を $\vec{x}\cdot\vec{y}$ と表す．

このとき $\vec{a}\cdot\vec{b} = \boxed{\text{(チ)}}$ であり，$|\vec{b}| = \boxed{\text{(ツ)}}$ である．また $\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線が辺 AB と交わる点を C とし，$\theta = \angle\mathrm{ACO}$ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ とすると，$\theta = \boxed{\text{(テ)}}$ であり，$\sin\theta = \boxed{\text{(ト)}}$ である．よって，三角形 OAC の外接円の半径は $\boxed{\text{(ナ)}}$ である．さらに，三角形 OAC の面積は $\boxed{\text{(ニ)}}$ である．

(17 慶應義塾大学 看護医療学部 3)

266. 1 辺の長さが 2 の正三角形とその内接円の接点を A，B，C とする．点 P が内接円の円周上にあるとき，次の問いに答えよ．

(1) 内接円の中心を O とするとき，線分 OA の長さを求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ の値を求めよ．

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2$ の値を求めよ．

(4) 点 P が円周上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の最大値および最小値を求めよ．

(17 徳島大学 理工・医 (保健) 学部 1)

267. 座標平面上の円 $C_1 : x^2+y^2-6x+4y+12=0$ とし，円 $C_2 : x^2+y^2+2x-2y-2=0$ とする．点 A の座標を $(1,\ -2)$ とし，点 P は C_1 上に，点 Q は C_2 上にあるとする．また，

$$f=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|^2$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) P の座標を $(3,\ -1)$ とする．Q が C_2 上の点全体を動くとき，f が最大となるときの Q の座標を求めよ．

(2) P の座標が $(3,\ -1)$ のとき，直線 AP を考える．C_2 上の点 R における C_2 の接線は直線 AP と垂直になるという．このときの R の座標をすべて求めよ．

(3) P を定めたとき，Q が C_2 上の点全体を動くときの f の最大値を m とする．P が C_1 上の点全体を動くとき，$m=0$ となるような P の座標をすべて求めよ．

(17 同志社大学 理系 (全学部 2/4) 3)

268. 平面上の点 O を中心とする半径 1 の円を C とする．円 C の内部に点 A がある．円 C の周上を 2 点 P，Q が条件 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を満たしながら動く．線分 PQ の中点を R とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$|\vec{a}|=r$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とする．ただし，$0<r<1$ とする．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2$ を内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を用いて表せ．

(2) 直線 OA 上の点 B で，$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ が 2 点 P，Q の位置によらず一定であるものを求めよ．また，このときの $|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ の値を r を用いて表せ．

(17 北海道大学 文系 2)

6.3 空間ベクトル

269. 座標空間において，4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(3,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ -1,\ 3)$ がある．このとき，次の問いに答えよ．

線分 AB を $3:1$ に外分する点を D とすると，点 D の座標は，$\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$ となる．

次に線分 CD を $s:(1-s)$ に内分する点を E とすると，点の座標は，s を用いて $\left(\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}}\right)$ と表される．

さらに，線分 OE を $t:(1-t)$ に内分する点を F とすると，直線 AF が $\triangle$OBC と垂直に交わるのは，$s=\boxed{\text{キ}}$，$t=\boxed{\text{ク}}$ のときである．

このとき，直線 AF と $\triangle$OBC の交点 P の座標は，$\left(\boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{サ}}\right)$ となる．

ここで，$\sin\angle\mathrm{BOC}$ の値は $\boxed{\text{シ}}$ であるので，$\triangle$OBC の面積は $\boxed{\text{ス}}$ となる．

また，四面体 OABC の体積は $\boxed{\text{セ}}$ となる．

(17 立命館大学 薬学方式 (2/2) 3)

270. 四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と表す．$0<s<1$, $0<t<1$ を満たす実数 s, t に対して，線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を D，線分 CD を $s:(1-s)$ に内分する点を E，線分 OE を $t:(1-t)$ に内分する点を F とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を s, t, $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 直線 AF が三角形 OBC と交わる点を G とするとき，$\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AG}}$ の値を求めよ．

(3) 直線 AF が三角形 OBC の重心を通るとき，s, t の値を求めよ．

(4) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{c}|=\sqrt{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{1}{4}$ とする．直線 BF が 3 点 O，A，C を通る平面と垂直であるとき，s, t の値を求めよ．

(17 福井大学 教育・国際地域学部 3)

◊271. 次の問に答えよ．

(1) 四面体 ABCD と四面体 ABCP の体積をそれぞれ V, V_{P} とする．

(i) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ が成り立つとき，体積比 $\dfrac{V_{\mathrm{P}}}{V}$ を求めよ．

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}+d\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ が成り立つとき，体積比 $\dfrac{V_{\mathrm{P}}}{V}$ を求めよ．

(2) 四面体 ABCD について，点 A, B, C, D の対面の面積をそれぞれ α, β, γ, δ とする．原点を O として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\delta\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

となる点 I を考える．四面体 ABCD の体積を V とするとき，3 点 A, B, C を通る平面と点 I の距離 r を求めよ．

(3) (2) の点 I は四面体 ABCD に内接する球の中心であることを示せ．

(17 早稲田大学 基幹・創造・先進理工学部 3)

272. α を実数とする．O を原点とする座標空間内に 3 点 A$(3,\ -3,\ -3)$，B$(3,\ -1,\ 3)$，C$(\alpha,\ 1,\ 1)$ がある．A を通り $\overrightarrow{m_1}=(1,\ 2,\ 1)$ に平行な直線を l_1 とする．B を通り $\overrightarrow{m_2}=(-1,\ 1,\ 1)$ に平行な直線を l_2 とする．点 P は l_1 上にあり，点 Q は l_2 上にある．$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ が最小となるとき，以下の問いに答えよ．

(1) P と Q の座標を求めよ．
(2) $\triangle$OPQ の面積を求めよ．
(3) 3 点 O，P，Q の定める平面を π とする．C を通り π の法線ベクトルに平行な直線を l_3 とする．l_3 と π の交点を H とする．H が $\triangle$OPQ の周上にあるとき，α の値をすべて求めよ．

(17 京都府立大学 生命環境学部 6)

273. xyz 空間に中心が点 $(0,\ 0,\ 1)$，半径が 1 の球面 S がある．球面 S 上の点 N$(0,\ 0,\ 2)$ と xy 平面上にある点 P$(a,\ b,\ 0)$ を結ぶ線分 NP が点 N と異なる点 Q で球面 S と交わる．さらに xy 平面上に 2 点 A$(2,\ 0,\ 0)$，B$\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$ をとる．次の問いに答えよ．

(1) a，b を用いて点 Q の座標を表せ．
(2) 点 P は直線 AB 上を動くとする．線分 NQ の長さの最大値とそのときの点 P の座標をそれぞれ求めよ．
(3) 点 P が直線 AB 上を動くとき，線分 QP の長さは (2) で求めた点 P で最小になることを示せ．

(17 秋田大学 医学部 8)

274. 直方体 OADB–CEGF について，

$$\mathrm{OA}=2\sqrt{5},\quad \mathrm{OB}=\sqrt{5},\quad \mathrm{OC}=2\sqrt{11}$$

である．$\triangle$DEF の内心を P として，

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とおくとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．
(2) $\vec{n}=\vec{a}+s\,\vec{b}+t\,\vec{c}$ が平面 DEF に垂直であるとき，s と t の値を求めよ．
(3) 点 P を通り平面 DEF に垂直な直線と平面 EFG との交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．また，長さ PQ を求めよ．

(17 宮城教育大学 教育学部 (中等教育=数学・理科・技術・家庭) 2)

275.　空間の 3 点 $(-2,\ 0,\ 0)$，$(0,\ -1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 2)$ を通る平面を α とする．α 上の点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{p}=(1,\ 1,\ -3)$ に平行な直線を l とする．l と xy 平面との交点を B とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 B の座標を求めよ．

(2) 平面 α に垂直で，大きさが 1 のベクトル $\overrightarrow{q}$ を求めよ．

(3) 線分 AB 上の点 C を中心とする半径 3 の球を平面 α で切る．切り口の面積が 8π であるとき，点 C の座標を求めよ．

(17 兵庫県立大学 工学部 5)

276.　空間内に原点 O と A，B，C を頂点とする四面体がある．△ABC の各辺の長さが，それぞれ $\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BC}=6$，$\mathrm{CA}=4$ となっている．また，△ABC の外心を P とする．このとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boxed{①}$ である．一方，定義より，点 P は $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}=\mathrm{CP}$ を満たすから $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boxed{②}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boxed{③}$ である．これらのことから，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boxed{④}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boxed{⑤}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表される．したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boxed{⑥}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boxed{⑥}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\boxed{⑤}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表される．

(17 関西大学 文系 (全学部 2/7) 2)

277.　座標空間に 4 点 $\mathrm{A}(-3,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{B}(1,\ 4,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 3,\ 5)$，$\mathrm{D}(2,\ 2,\ 7)$ をとる．A，B を通る直線を l とし，C，D を通る直線を m とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) l と m が垂直であることを示しなさい．

(2) P を l 上の点とし，Q を m 上の点とする．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ の両方に垂直であるとき，P，Q の座標をそれぞれ求めなさい．

(3) K，L を l 上の異なる 2 点とし，M，N を m 上の異なる 2 点とする．$\overrightarrow{\mathrm{LK}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は同じ向きに平行であり，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は同じ向きに平行であるとする．また，3 つの線分 KL，LM，MN は同じ立方体の 3 つの辺であるとする．このとき，線分 KN の中点の座標を求めなさい．

(17 首都大学東京 都市教養学部 5)

278. 座標空間に 4 点 A$(0,\ 1,\ 0)$，B$\left(\sqrt{3},\ 2,\ 0\right)$，C$\left(\sqrt{3},\ 2,\ 1\right)$，D$\left(-1,\ 1+\sqrt{3},\ 0\right)$ がある．線分 DC を $t:(1-t)$ に内分する点を P とする (ただし，$0<t<1$)．次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ をそれぞれ求めよ．

(2) 3 点 A，B，C が定める平面上に点 H を，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方と垂直になるようにとる．$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=u\overrightarrow{\mathrm{AB}}+v\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表すときの実数 u，v を求めよ．

(3) 点 P を中心とする半径 r の球が，3 点 A，B，C が定める平面に接するように点 P を定める．このときの t の値を r で表せ (ただし，$r<2$)．

(17 岩手大学 理工学部 2)

279. 座標空間における xy 平面上に，原点 O を一つの頂点とし，AB を斜辺とする直角三角形 OAB がある．また xy 平面上にない点 C をとり，C から xy 平面におろした垂線と xy 平面の交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{c}$ とおき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ を用いて表せ．

(2) 点 G を $\triangle$OAB の重心とし，点 H は O と G を通る直線上にあるとする．H が O と異なるとき，2 つの角 $\alpha=\angle\mathrm{AOC}$ と $\beta=\angle\mathrm{BOC}$ に対して，$\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ を $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ を用いて表せ．

(17 九州大学 後期 理学部 (数学) 1)

280. 四面体 OABC の辺 OC の中点と辺 AB の中点をそれぞれ P，Q とする．$0<t<1$ となる t に対し，辺 OB を $t:(1-t)$ に内分する点を R とする．また，3 点 P，Q，R を含む平面と辺 AC の交点を S とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{c}$ と表す．以下の問いに答えなさい．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ および t を用いて表しなさい．

(2) 座標空間において四面体 OABC の頂点の座標がそれぞれ O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ であるとき，四角形 PRQS の面積を t を用いて表しなさい．

(3) 四面体 OABC が (2) の場合に，四角形 PRQS の面積の最小値，およびそのときの t の値を求めなさい．

(17 首都大学東京 後期 都市教養・都市環境・システムデザイン学部 2)

281. 座標空間において，点 A$(2,\ -1,\ 0)$ を通りベクトル $\overrightarrow{v}=(-1,\ 0,\ 1)$ に平行な直線を l，直線 l 上の点で原点 O との距離が最小となる点を B とする．また，原点 O を中心とする半径 3 の球を S とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 B の座標を求めよ．

(2) 球 S 上の点 C は，x 座標が正であり，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OC}} \perp \vec{v}$ をみたしている．点 C の座標を求めよ．

(3) (2) の点 C に対し

$$\vec{n} = \cos\theta \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|} + \sin\theta \frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

とおき，$\vec{n}$ に垂直な平面で直線 l を含むものを α とする．このとき，平面 α と原点 O との距離 d と，平面 α と球 S が交わってできる円の半径 r を，それぞれ θ を用いて表せ．ただし，円ができない場合は $r = 0$ とせよ．

(17 金沢大学 後期 理工学域 (数物科学・電子情報・機械) 1)

°282. 原点を O とする座標空間内に 3 点 A(4, 0, 2)，B(2, 3, 3)，C(5, 3, 0) からなる三角形 ABC がある．2 点 A，B を通る直線上の点を D とする．次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を用いて表せ．

(2) 点 D が xy 平面上にあるとき，その座標を求めよ．

(3) xy 平面上の点 P(x, y, 0) が三角形 ABC を含む平面上にあるとき，x と y の関係式を求めよ．

(4) 点 P が (3) の条件を満たし，さらに，2 点 A，P を通る直線と 2 点 B，C を通る直線が直交するとき，点 P の座標を求めよ．

(17 名古屋市立大学 芸術工・経済学部 7)

283. 線分 OA，線分 OB，線分 AB の長さがそれぞれ $\sqrt{5}$，$\sqrt{8}$，3 である四面体 OABC に対して，辺 AB を $s : 1-s$ に内分する点を P，辺 OC を $t : 1-t$ に内分する点を Q とする ($0 < s < 1$，$0 < t < 1$)．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく．内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{c} = 0$，$\angle\mathrm{AOC}$ が $\frac{\pi}{3}$ であるとき，次の問いに答えよ．ただし，$\angle\mathrm{OCP}$ は鋭角であるとしてよい．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と s，t で表せ．

(2) 線分 PQ の長さが最小になるとき，$t = \frac{1}{2}$ であるとする．このとき線分 OC の長さを求めよ．

(3) (2) の状況のもとで s を求め，三角形 OPC の面積を求めよ．

(17 名古屋市立大学 医学部 1)

284. 四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とし，

$$|\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = 2,\ |\vec{c}| = \sqrt{5},\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 1,\ \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

とする．辺 OA の中点を D とし，点 P，Q をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ $(0 \leqq s \leqq 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ となるようにとり，線分 PQ の中点を R とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を s, t, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) s, t がそれぞれ $0 \leqq s \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，点 R の存在範囲の面積を求めよ．

(3) 直線 OR と面 ABC の交点を S とする．△SAB，△SBC，△SCA の面積比が $8:7:6$ となるとき，s と t の値を求めよ．

(17 福井大学 工学部 2)

285. 座標空間において，正四面体の3つの頂点が O(0, 0, 0)，A(1, 1, 0)，B(0, 1, 1) であるとき，z 座標が正である第4の頂点を C とする．$0 < p < 1$ を満たす p に対し，点 P は線分 OA を $p:(1-p)$ に内分する点とする．点 Q は直線 OB 上にあり，∠CPQ は直角になっている．次の問いに答えよ．

(1) 点 C の座標を求めよ．また，点 Q の座標を p で表せ．

(2) 点 Q は線分 OB 上にあって2点 O，B と異なるものとする．このとき，p が満たす条件を求め，四面体 OPQC の体積 V を p で表せ．

(3) (2) の四面体 OPQC の体積 V に対して，p が (2) の条件を満たしながら変化するとき，V を最大にする p の値を求めよ．

(17 同志社大学 理工学部 (2/10) 2)

286. 2つの定数 $a > 0$ および $b > 0$ に対し，座標空間内の4点を

$$\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ b,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1),\ \mathrm{D}(a,\ b,\ 1)$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) 点 A から線分 CD におろした垂線と CD の交点を G とする．G の座標を a, b を用いて表せ．

(2) さらに，点 B から線分 CD におろした垂線と CD の交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ がなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を a, b を用いて表せ．

(17 九州大学 医・歯・薬・工・理・経済・芸術工学部 2)

◊287. O を原点とする座標空間において，8点 $\mathrm{A}_1(1,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{A}_2(1,\ -1,\ 1)$, $\mathrm{A}_3(-1,\ -1,\ 1)$, $\mathrm{A}_4(-1,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{B}_1(1,\ 1,\ -1)$, $\mathrm{B}_2(1,\ -1,\ -1)$, $\mathrm{B}_3(-1,\ -1,\ -1)$, $\mathrm{B}_4(-1,\ 1,\ -1)$ を頂点とする立方体 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4 - \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3\mathrm{B}_4$ がある．また，正の定数 a, b, c に対し，原点を通りベクトル $(a,\ b,\ c)$ に垂直な平面を H とする．

(1) A_1，B_1 を通る直線と平面 H との共有点の z 座標は $\boxed{\text{ニ}}$ であり，点 A_4，B_4 を通る直線と平面 H との共有点の z 座標は $\boxed{\text{ヌ}}$ である．これより，4 つの線分 A_1B_1，A_2B_2，A_3B_3，A_4B_4 の全てと平面 H が共有点を持つための a, b, c が満たすべき必要十分条件は $\boxed{\text{ネ}}$ かつ $\boxed{\text{ノ}}$ である．a, b, c が $\boxed{\text{ネ}}$ かつ $\boxed{\text{ノ}}$ を満たすとき，立方体 $A_1A_2A_3A_4-B_1B_2B_3B_4$ の平面 H による切り口の面積は $\boxed{\text{ハ}}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ となる．

(注：$\boxed{\text{ネ}}$，$\boxed{\text{ノ}}$ には，a, b, c の関係式を入れよ．)

(2) 線分 A_1B_1 と平面 H が共有点を持たず，線分 A_4B_4 と平面 H が共有点を持つための a, b, c が満たすべき必要十分条件は $\boxed{\text{ヒ}}$ かつ $\boxed{\text{フ}}$ である．a, b, c が $\boxed{\text{ヒ}}$ かつ $\boxed{\text{フ}}$ を満たすとき，線分 A_3A_4 と平面 H，線分 A_2A_3 と平面 H はそれぞれ共有点を持つ．これらをそれぞれ点 P，Q とすると，点 P の y 座標は $\boxed{\text{ヘ}}$ であり，点 Q の x 座標は $\boxed{\text{ホ}}$ である．点 A_3，B_3 を通る直線と平面 H との共有点を R とすると，△PQR の面積は $\boxed{\text{マ}}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ である．よって，立方体 $A_1A_2A_3A_4-B_1B_2B_3B_4$ の平面 H による切り口の面積は $\boxed{\text{ミ}}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ となる．

(注：$\boxed{\text{ヒ}}$，$\boxed{\text{フ}}$ には，a, b, c の関係式を入れよ．)

(17 立命館大学 理系 (全学統一 2/3) 3)

288. 座標空間において，次のように立方体 OABC–DEFG の頂点をとる．

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(1,\ 1,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 1,\ 0)$$
$$\mathrm{D}(0,\ 0,\ 1),\ \mathrm{E}(1,\ 0,\ 1),\ \mathrm{F}(1,\ 1,\ 1),\ \mathrm{G}(0,\ 1,\ 1)$$

また，辺 OD 上に点 S$(0,\ 0,\ s)$，辺 AE 上に点 T$(1,\ 0,\ t)$，辺 CG 上に点 U$(0,\ 1,\ u)$ をとり，3 点 S，T，U で定まる平面を α とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 平面 α と直線 BF の交点を P とする．P の座標を s, t, u を用いて表せ．

(2) 平面 α による立方体 OABC–DEFG の切り口がひし形になるための s, t, u の条件を求めよ．ただし，$s=t=u=0$ のときは四角形 OABC が，$s=t=u=1$ のときは四角形 DEFG が切り口であるとする．

(17 滋賀大学 教育・経済学部 3)

289. m, n を整数とし，O を原点とする座標空間に 3 点 A$(m+2,\ n,\ 8)$, B$(n,\ -2m-3,\ 8)$, C$(8,\ 9,\ 0)$ をとる．

(i) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が平行であり，かつ $m+n \geqq 100$ となるような整数の組 $(m,\ n)$ のうち，m が最小であるものを求めよ．

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が垂直となるような正の整数の組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ．

(17 東京農工大学 工・農学部 1(1))

290.　正四面体 ABCD を考える．辺 BC を $1:5$ に内分する点を E とする．辺 AB 上に点 P を $\angle\mathrm{DPE}=90^\circ$ となるようにとるとき，$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}$ を求めなさい．

(17 信州大学 教育学部 2)

◊291.　四面体 OABC において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$, $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{6}$, $\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{4}$, $\angle\mathrm{COA}=\dfrac{\pi}{3}$ であるとする．次の問に答えよ．

(1) 頂点 C から三角形 OAB を含む平面に下ろした垂線を CD とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(2) 四面体 OABC の体積を求めよ．

(17 早稲田大学 教育学部 3)

292.　実数 $p,\ q$ は $0<p<1,\ 0<q<1$ を満たすとする．四面体 OABC において，辺 OA を $p:1-p$ に内分する点を P，辺 OB を $q:1-q$ に内分する点を Q，また，辺 BC を $p:1-p$ に内分する点を L とする．線分 PL と線分 QM が共有点 D を持つように辺 AC 上に点 M をとる．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，$|\vec{a}|=a$, $|\vec{b}|=b$, $|\vec{c}|=c$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $p,\ q,\ \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ．

(2) 辺 OC 上に点 R，辺 AB 上に点 N をとる．3 点 R，D，N が一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を $p,\ q,\ \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ．

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$, $p+q=1$ のとき，四角形 PQLM の面積 $S(p)$ を $p,\ a,\ b,\ c$ を用いて表せ．

(4) (3) で求めた $S(p)$ の最小値とそのときの p の値を $a,\ b,\ c$ を用いてそれぞれ表せ．

(17 同志社大学 文系 (全学部 2/5) 3)

◊293.　四面体 OABC を考える．点 D, E, F, G, H, I は，それぞれ辺 OA, AB, BC, CO, OB, AC 上にあり，頂点ではないとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が平行ならば $\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=\mathrm{CF}:\mathrm{FB}$ であることを示せ．

(2) D, E, F, G, H, I が正八面体の頂点となっているとき，これらの点は OABC の各辺の中点であり，OABC は正四面体であることを示せ．

(17 京都大学 理系 (総合人間・教育・理・医・薬・農・工・経済学部) 2)

294. 点 O を頂点とし，平行四辺形 ABCD を底面とする四角錐(すい)OABCD がある．辺 OA を $s:(1-s)$ に内分する点を P，辺 OC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q，辺 OB を $1:3$ に内分する点を R とする．ただし，$0<s<1$, $0<t<1$ とする．4 点 P，R，Q，D が同一平面上にあるとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{RD}}$ をそれぞれ表せ．

(2) t を用いて s を表せ．

(3) $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積が $\triangle\mathrm{OAC}$ の面積の $\dfrac{1}{6}$ となるとき，s の値を求めよ．

(17 秋田大学 教育文化・理工・国際資源学部 3)

295. 座標空間内の原点 O(0, 0, 0) を中心とする半径 1 の球面上の 3 点

$$\mathrm{A}\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ b,\ c\right),\ \mathrm{B}(0,\ 1,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$$

をとる．ここで b, c は $bc<0$ を満たす実数とする．原点 O を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に垂直な平面を α とする．B および C から α に下ろした垂線をそれぞれ BD，CE とおく．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ と，大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|$ をそれぞれ b, c を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とする．$\cos\theta$ の最大値と，最大値を与える点 A の座標を求めよ．

(17 東北大学 後期 理学部 6)

296. 原点を O とする座標空間において，3 点 A(2, 2, -1), B(3, 2, 0), C(2, 3, 0) の定める平面を α とする．また，原点 O から平面 α に垂線を下ろし，α との交点を Q とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 Q の座標を求めよ．

(2) $\angle\mathrm{OAQ}=\theta$ とする．$\cos\theta$ の値を求めよ．

(3) a, b, c は実数とし，点 P は次の式を満たすとする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

点 P が $a+b+c=0$ かつ $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1$ を満たしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の最大値を求めよ．

(17 大阪府立大学 現代システム科学・生命環境科学・地域保健学域 2)

297. xyz 空間の 2 点 A(0, 0, 2)，P(a, b, 0) を通る直線を l とする．また，点 (2, 0, 0) を中心とし，半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し，S のうち z 座標が $z>0$ を満たす部分を T とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) l 上に点 Q がある．実数 t を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ で定めるとき，点 Q の座標を a, b, t を使って表せ．

(2) l が S と相異なる 2 点で交わるような実数 a, b に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ．

(3) l が T と相異なる 2 点で交わるような実数 a, b に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ．

(17 名古屋大学 理・医・工・農・情報学部 3)

298. 四面体 OABC について次の問いに答えよ．ただし $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{4}$, $\angle\mathrm{COA}=\dfrac{\pi}{3}$ とし，四面体 OABC の体積を V，$\mathrm{OA}=a$, $\mathrm{OB}=b$, $\mathrm{OC}=c$ とおく．

(1) 点 B から 3 点 O，A，C を通る平面に垂線 BH を下ろす．このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

を満たす実数 x, y を a, b, c を用いて表せ．

(2) V を a, b, c を用いて表せ．

(3) 2 点 O，C を固定し，2 点 A，B を $a+b+c=6$ を満たす範囲で動かすとき，V の最大値を c を用いて表せ．また，そのときの a, b の値を c を用いて表せ．

(4) 点 O を固定し，3 点 A, B, C を $a+b+c=6$ を満たす範囲で動かすとき，V の最大値を求めよ．また，そのときの a, b, c の値を求めよ．

(17 お茶の水女子大学 理学部 (数学) 4)

299. 座標空間内の 4 点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(0, 2, 0)，C(0, 0, 3) を考える．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさは $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\boxed{\text{ア}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boxed{\text{イ}}$ である．また，三角形 ABC の面積は $\boxed{\text{ウ}}$ である．三角形 OAB の内接円の半径は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(2) 四面体 OABC の体積は $\boxed{\text{オ}}$ である．四面体 OABC に内接する球の中心を P，半径を r とするとき，四面体 PABC の体積を r を用いて表すと $\boxed{\text{カ}}$ である．r の値は $r=\boxed{\text{キ}}$ であり，点 P の座標は $\boxed{\text{ク}}$ となる．

(3) 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直で x 成分が 1 のベクトルは，$\boxed{\text{ケ}}$ である．点 P を通り平面 ABC に垂直な直線が xy 平面と交わる点の座標は $\boxed{\text{コ}}$ である．

(17 関西学院大学 理工・総合政策・教育 (全学 2/1) 2)

300. 座標空間内に異なる 4 点 O，A，B，C がある．線分 OB，AB，AC，OC を $2:1$ に内分する点をそれぞれ K，L，M，N とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{KL}}=\overrightarrow{\mathrm{NM}}$ を示せ．

(2) p，q を実数とし，点 O，A，B，C の座標をそれぞれ $(0,\ 0,\ 0)$，$(4,\ 6,\ 0)$，$(1,\ 1,\ 0)$，$(p,\ 3,\ q)$ とする．

(i) $\overrightarrow{\mathrm{KM}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{LN}}$ を p，q を用いて成分で表せ．

(ii) 四角形 KLMN がひし形となるための必要十分条件を p，q の式で表せ．

(iii) 四角形 KLMN が正方形となる p，q を求めよ．

(17 愛媛大学 工・理・教育学部 4)

301. 点 O を頂点とし，四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD が条件

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=1,\ \mathrm{OB}=\mathrm{OD}=2,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BD}},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BD}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

を満たすとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく．内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=t$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 四角形 ABCD がひし形であることを示せ．

(2) $\vec{d}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) $\vec{a}\cdot\vec{c}$ を t を用いて表せ．また，$\vec{b}\cdot\vec{d}$ を t を用いて表せ．

(4) 四角錐 OABCD の体積を t を用いて表せ．

(17 岐阜大学 後期 医・工・教育学部 2)

302. 座標空間において原点 O と点 A$(0,\ -1,\ 1)$ を通る直線を l とし，点 B$(0,\ 2,\ 1)$ と点 C$(-2,\ 2,\ -3)$ を通る直線を m とする．l 上の 2 点 P，Q と，m 上の点 R を △PQR が正三角形となるようにとる．このとき，△PQR の面積が最小となるような P，Q，R の座標を求めよ．

(17 京都大学 文系 (総合人間・文・教育・法・経済学部) 3)

303. 座標空間内の次のような 4 点 A，B，C，D を考える．A の座標は $\left(\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6}\right)$，3 点 B，C，D は，それぞれ x 軸，y 軸，z 軸上にある．さらに，これらの 4 点は同一平面上にあり，四角形 ABCD は平行四辺形である．このとき，次の問いに答えよ．

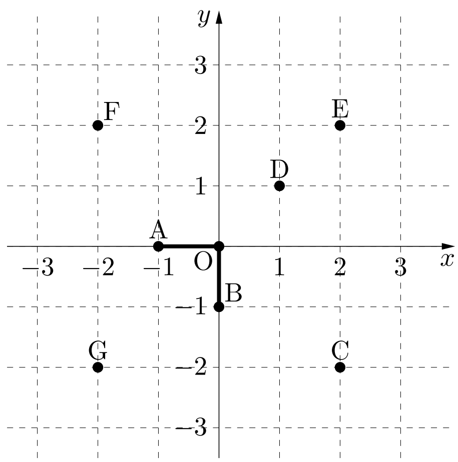
(1) 3 点 B，C，D の座標を求めよ．

(2) 平行四辺形 ABCD の面積を求めよ．

(3) 原点 O から平行四辺形 ABCD を含む平面に垂線 OH を下ろす．点 H の座標を求めよ．

(17 新潟大学 理系 2 文系 2)

304. xyz 空間に 4 点 O(0, 0, 0)，A(10, 0, 0)，B(0, 10, 0)，C(0, 0, 10) を頂点とする四面体 OABC がある．点 P は辺 OA の中点，点 Q は辺 AB 上の点，点 S は三角形 OBC の重心，点 R は線分 AS と平面 CPQ の交点とする．三角形 APQ の面積は $\dfrac{75}{4}$ である．このとき，



(1) $\overrightarrow{\mathrm{CS}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CO}}$ で表すと，$\overrightarrow{\mathrm{CS}} = \dfrac{\boxed{(41)}}{\boxed{(42)}}\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \dfrac{\boxed{(43)}}{\boxed{(44)}}\overrightarrow{\mathrm{CO}}$ である．

(2) 点 Q は辺 AB を $\boxed{(45)}$: $\boxed{(46)}$ に内分する点である．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \dfrac{\boxed{(47)}}{\boxed{(48)(49)}}\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ である．

(17 慶應義塾大学 薬学部 3)

305. 点 O を中心とする半径 r の球面上に 3 点 A，B，C があり，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{10}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 2$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -2$ であるとする．また，3 点 A，B，C を通る平面を α とし，点 O は平面 α 上にないとする．さらに，△ABC の重心を G とし，直線 OG 上に点 D があり，線分 DG の中点が点 O であるとする．

(1) △ABC の面積は $\boxed{(コ)}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boxed{(サ)}$ である．

(2) 点 P の位置ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + x\overrightarrow{\mathrm{OB}} + y\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ (x，y は実数) と表され，かつ直線 OP は平面 α に直交しているとする．このとき，$x = \boxed{(シ)}$，$y = \boxed{(ス)}$ である．いま，t を実数とし，点 H を $\overrightarrow{\mathrm{DH}} = t\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ によって決まる点とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \boxed{(セ)}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boxed{(ソ)}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \boxed{(タ)}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ である．さらに，点 H が平面 α 上にあるとすると，$t = \boxed{(チ)}$ である．

(3) 四面体 ABCD の体積は $\boxed{(ツ)}$ である．

(17 慶應義塾大学 理工学部 2)

306. $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする．座標空間に 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \cos 2\theta,\ \cos 3\theta)$，$\mathrm{B}(\sin\theta,\ \sin 2\theta,\ \sin 3\theta)$，$\mathrm{C}(\sin\theta,\ -\sin 2\theta,\ \sin\theta)$ がある．

(1) $\angle\mathrm{AOC}$ と $\angle\mathrm{BOC}$ は，θ によらず一定であることを示せ．

(2) $\angle\mathrm{AOB} = 90^\circ$ のとき，四面体 OABC の体積を求めよ．

(17 一橋大学 後期 経済学部 5-B)

§7 空間図形

7.1 空間座標

307. 座標空間内に点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$，点 $\mathrm{B}(2,\ 0,\ 0)$，点 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ -2)$，点 $\mathrm{D}(0,\ -2,\ 0)$ がある．線分 AC を $1:3$ に内分する点を E とし，線分 AD を $1:3$ に内分する点を F とする．直線 BC と平面 $x = \dfrac{3}{2}$ の交点を G とする．直線 BD と平面 EFG の交点を H とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 E，F，G，H の座標をそれぞれ求めよ．

(2) 三角形 FGH の面積を求めよ．

(17 九州大学 後期 工学部 3)

308. O を原点とする座標空間における 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{D}(0,\ 0,\ -1)$ をとる．

(1) 3 点 A，B，C の定める平面 ABC と原点を通る直線 l が交わる点を P とする．直線 l が点 $\left(1,\ \dfrac{1}{2},\ 1\right)$ を通るとき，点 P の座標は

$$\left(\boxed{\text{ト}},\ \boxed{\text{ナ}},\ \boxed{\text{ニ}}\right)$$

となる．

$0 < a < 1$ である実数 a を用いて，線分 AB を $a : (1-a)$ に内分する点を M としたとき，M の座標は

$$\left(\boxed{\text{ヌ}},\ \boxed{\text{ネ}},\ \boxed{\text{ノ}}\right)$$

と表せる．このとき，線分 MP の長さの 2 乗を a を用いて表すと，

$$\mathrm{MP}^2 = 2\left(a - \boxed{\text{ハ}}\right)^2 + \boxed{\text{ヒ}}$$

となる．よって，線分 MP の長さを最小にする a の値は $\boxed{\text{ハ}}$ となる．

(注：$\boxed{\text{ハ}}$，$\boxed{\text{ヒ}}$ には，数を入れよ．)

(2) 点 P を通る z 軸に平行な直線と 3 点 A，B，D の定める平面 ABD との交点を Q とする．(1) で求めた線分 MP の長さを最小にする a の値を用いるとき，線分 MQ の長さは $\boxed{\text{フ}}$ となるので，$\angle$PMQ を θ としたとき，$\cos\theta = \boxed{\text{ヘ}}$ となる．よって，$\triangle$PMQ の面積は $\boxed{\text{ホ}}$ となる．

3 点 P，M，Q の定める平面 PMQ へ点 C から垂線を下ろす．垂線の足を H とするとき，線分 CH の長さは $\boxed{\text{マ}}$ となる．よって，四面体 CPMQ の体積は $\boxed{\text{ミ}}$ となる．

(17 立命館大学 理系 (全学統一 2/2) 3)

7.2 直線

◊309. xy 平面上の直線 $x = y + 1$ を k，yz 平面上の直線 $y = z + 1$ を l，xz 平面上の直線 $z = x + 1$ を m とする．直線 k 上に点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0,\ 0)$ をとる．l 上の点 P_2 を $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 \perp l$ となるように定め，m 上の点 P_3 を $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3 \perp m$ となるように定め，k 上の点 P_4 を $\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4 \perp k$ となるように定める．以下，同様の手順で l，m，k，l，m，k，$\cdots$ 上の点 P_5，P_6，P_7，P_8，P_9，P_{10}，$\cdots$ を定める．

(1) 点 P_2, P_3 の座標を求めよ．

(2) 線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さを n を用いて表せ．

(17 一橋大学 法・経済・商・社会学部 5)

7.3 球

310. 点 O を原点とする座標空間に 2 つの平面 π_1 と π_2 がある．平面 π_1 の方程式は，$x - 2y + 3z + 1 = 0$ であり，平面 π_2 の方程式は，$3x + 4y - 7z - 5 = 0$ である．そして，平面 π_1 と π_2 の交線を ℓ とする．

(i) ある点の原点 O を基準とする位置ベクトル $\overrightarrow{p_0} = \left(1,\ \boxed{(19)},\ \boxed{(20)}\right)$ と，方向ベクトル $\overrightarrow{v} = \left(1,\ \boxed{(21)},\ \boxed{(22)}\right)$ を用いると，

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_0} + t\,\overrightarrow{v}$$

は直線 ℓ のベクトル方程式である．ここで，$\overrightarrow{p}$ は直線 ℓ 上の点の原点 O を基準とする位置ベクトルで，t は実数である．

(ii) 点 A$(2,\ -8,\ 3)$ を中心とする球面 S を考える．球面 S と直線 ℓ が 1 点のみを共有するとき，その共有点の座標は $\left(\boxed{(23)},\ \boxed{(24)\,\vdots\,(25)},\ \boxed{(26)\,\vdots\,(27)}\right)$ である．また，球面 S と直線 ℓ が異なる 2 点を共有し，その 2 つの共有点と点 A を頂点とする三角形の面積が $24\sqrt{35}$ であるとき，その 2 つの共有点の座標は

$\left(\boxed{(28)\,\vdots\,(29)},\ \boxed{(30)\,\vdots\,(31)\,\vdots\,(32)},\ \boxed{(33)\,\vdots\,(34)\,\vdots\,(35)}\right)$ と $\left(\boxed{(36)},\ \boxed{(37)\,\vdots\,(38)},\ \boxed{(39)}\right)$

である．

(iii) 直線 ℓ は x 軸に平行な平面 π_3 と y 軸に平行な平面 π_4 の交線でもある．このとき，平面 π_3 の方程式は

$$\boxed{\quad(\text{ウ})\quad} = 0$$

であり，平面 π_4 の方程式は

$$\boxed{\quad(\text{エ})\quad} = 0$$

である．（これらの方程式はできる限り簡単な形にせよ．）

(17 慶應義塾大学 商学部 3)

311. xyz 空間において点 O$(0,\ 0,\ 0)$ と A$(0,\ 0,\ 1)$ を結ぶ線分 OA を直径にもつ球面を σ とする．このとき以下の各問いに答えよ．

(1) 球面 σ の方程式を求めよ．

(2) xy 平面上にあって O と異なる点 P$(u,\ v,\ 0)$ に対して，線分 AP と球面 σ との交点を Q$(x,\ y,\ z)$ とするとき，$x,\ y,\ z$ を $u,\ v$ を用いて表せ．

(3) 点 R$(a,\ b,\ c)$ を，σ 上にあって O とも A とも異なる定点とする．σ 上にあって A とも R とも異なる点 Q が $\overrightarrow{\mathrm{OR}} \perp \overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ を満たしながら動くとき，直線 AQ と xy 平面との交点 P はどのような図形を描くか．$a,\ b,\ c$ を用いて答えよ．

(17 東京医科歯科大学 医学部 (歯・保健衛生)2)

°312. 点 O を原点とする座標空間において，3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 2)$ をとる．O から 3 点 A，B，C を含む平面に下ろした垂線の足を H とする．球面 $x^2+y^2+z^2=1$ を S とし，O から H にのばした半直線と球面 S との交点を P とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を成分で表せ．

(2) H の座標を求めよ．

(3) P の座標および線分 HP の長さを求めよ．

(17 宮崎大学 工・医・教育・農学部 3)

313. O を原点とする座標空間の 2 点 A$\left(1,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，B$\left(-1,\ 2,\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通る直線を ℓ とする．また，xy 平面上に点 C$(9,\ -3,\ 0)$ をとる．

(1) ℓ と yz 平面の交点の座標を求めよ．

(2) 点 C と ℓ 上の点 P を結ぶ線分 CP の長さが最小となるとき，P の座標を求めよ．

(3) 中心が直線 OC 上にある半径 1 の球面を S とする．S と ℓ が異なる 2 点 Q, R で交わるとき，線分 QR の長さが最大となる S の中心の座標と，線分 QR の長さの最大値を求めよ．

(17 慶應義塾大学 経済学部 4)

314. xyz 空間において点 O$(0,\ 0,\ 0)$ と点 A$(0,\ 0,\ 1)$ を結ぶ線分 OA を直径にもつ球面を σ とする．このとき以下の各問いに答えよ．

(1) 球面 σ の方程式を求めよ．

(2) xy 平面上にあって O と異なる点 P に対して，線分 AP と球面 σ との交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を示せ．

(3) 点 S$(p,\ q,\ r)$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AS}} = -|\overrightarrow{\mathrm{OS}}|^2$ を満たす，xy 平面上にない定点とする．σ 上の点 Q が $\overrightarrow{\mathrm{OS}} \perp \overrightarrow{\mathrm{SQ}}$ を満たしながら動くとき，直線 AQ と xy 平面との交点 P はどのような図形を描くか．$p,\ q,\ r$ を用いて答えよ．

(17 東京医科歯科大学 医学部 (医)2)

315. O を座標原点とする座標空間において，点 C$(0,\ 3,\ 4)$ を中心とする球があり，その球面 S の方程式を $x^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 1$ とする．このとき，S 上を動く点 P$(x,\ y,\ z)$ に関して，以下の問に答えなさい．

(1) P が，$y = z$ を満たしながら S 上を動くとき，原点 O から P までの距離 OP の最大値，および，最小値を求めなさい．

(2) P が S 上を自由に動くとき，原点 O から P までの距離 OP の最大値，および，最小値を求めなさい．

(3) 三角形 OCP の面積を A とする．A の最大値，および，そのときの y と z の満たす関係式を求めなさい．

(17 兵庫県立大学 経済・経営学部 4)

316. 空間上の 4 点 A, B, C, D が $\mathrm{AB} = 1$，$\mathrm{AC} = \sqrt{2}$，$\mathrm{AD} = 2\sqrt{2}$，$\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$，$\angle\mathrm{CAD} = 60^\circ$，$\angle\mathrm{DAB} = 90^\circ$ をみたす．このとき，この 4 点を通る球の半径を求めよ．

(17 横浜市立大学 医学部 1(3))

7.4 立体幾何

317. ある晴れた日，長さ 120 cm の棒を地面に対して垂直に立てたところ，地面にできた棒の影の長さは 90 cm であった．太陽光線はすべて平行であると仮定して，次の問いに答えよ．ただし，地面は水平であり，棒の太さおよび太陽の動きは考えないものとする．

(1) この時刻における，太陽光線と地面がなす角度 θ を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ とする．単位は度 (°) を用い，小数点以下を切り捨てて整数で答えよ．必要ならば巻末にある三角関数表 (省略) を用いてもよい．

(2) 長さ 120 cm の棒の一方の先端を地面の定点 A に固定し，常に棒が地面と 60° の角度をなすようにして，可能な限り棒を動かした．このとき，地面にできた棒の影の先端が描く軌跡はどのような図形であるか．たとえば,「 A から 60 cm 離れた点を中心とする，半径 $30\sqrt{2}$ cm の円」のように，言葉を用いて答えよ．

(3) 地面の上に直径 60 cm の球を置いた．このとき，地面にできた球の影はどのような形であるか．次の (a)∼(f) のうちから，最も適切なものを一つ選べ．ただし，点線は真上から見た球の位置を表している．

(4) (3) のとき，地面にできた球の影の面積を求めよ．ただし，円周率は π を用いよ．

(17 広島大学 後期 理学部 (数学) 5)

318. 1 辺の長さが 2 の正四面体 OABC の辺 OA 上に A 以外の点 P をとる．点 P から平面 ABC へ垂線をおろし，その垂線と平面 ABC の交点を H とする．$\mathrm{PA} = t$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 三角形 HBC の面積 S を t を用いて表せ．

(2) 線分 PH の長さを t を用いて表せ．

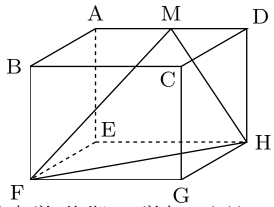
(3) 四面体 PHBC の体積 V が最大となるような t と，そのときの V の値を求めよ．

(17 大阪市立大学 商・経済・医 (看護)・生活科学部 4)

319. 座標空間において，xy 平面上に原点を中心とする半径 1 の円に内接する正六角形 ABCDEF がある．六角錐 P–ABCDEF において，頂点 P の座標を P$(0,\ 0,\ a)$ $(a > 0)$ とする．$\angle \mathrm{APB} = 45^\circ$ であるとき，a の値と，六角錐 P–ABCDEF の体積をそれぞれ求めよ．

(17 札幌医科大学 1(1))

°320. 図のような直方体 ABCD–EFGH において，AB $=$ 2，AD $=$ 4，BF $=$ 3 であるとする．辺 AD の中点を M とすると，三角形 MFH の面積は $\boxed{\text{す}}$ である．



(17 茨城大学 後期 工学部 1(9))

°321. 3 辺の長さが 5，6，7 の三角形を T とする．

(1) T の面積を求めよ．

(2) T を底面とする高さ 4 の直三角柱の内部に含まれる球の半径の最大値を求めよ．ただし，直三角柱とは，すべての側面が底面と垂直であるような三角柱である．

(17 北海道大学 後期　理 (数学，物理，生物，地球惑星)・工学部 1)

§8 有限数列

8.1 等差・等比

°322. 第 11 項から第 20 項までの和が 315，第 16 項から第 30 項までの和が 135 である等差数列の初項は $\boxed{\text{サシ}}$ で，公差は $\boxed{\text{スセ}}$ である．また，この数列において初めて負の数があらわれるのは第 $\boxed{\text{ソタ}}$ 項である．

(16 国士舘大学 理工学部 1(3))

323. 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を，$a_n = 86n + 3$，$b_n = 65n + 4$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義する．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 次の ① ～ ③ を満たす 0 または正の整数 $a,\ b,\ c$ を求めよ．

$$86 = 65 \times 1 + a \qquad \cdots\cdots ①$$
$$65 = a \times 3 + b \qquad \cdots\cdots ②$$
$$a = b \times 10 + c \qquad \cdots\cdots ③$$

(2) $a_k = b_l$ を満たす自然数 $k,\ l$ の組のうち，1 組を求めよ．

(3) $a_k = b_l$ を満たす自然数 $k,\ l$ の組は無数にあり，それらを

$$(k,\ l) = (k_1,\ l_1),\ (k_2,\ l_2),\ (k_3,\ l_3),\ \cdots$$

とする．ただし，$k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ とする．数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_{k_n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義するとき，$c_n \geqq 10^5$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

(17 宮崎大学 工・医学部 5)

8.2 和の計算

◊324. 自然数 n に対し，$a_n = 2^{n-1}\cos\dfrac{(n-1)\pi}{3}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ を考える．また，$\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n で表す．次の問いに答えよ．

(1) S_6 を求めよ．

(2) S_{50} を求めよ．

(3) $|S_n| \geqq 10^{50}$ となる最小の n の値を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

(17 名古屋市立大学 医・芸術工・経済学部 4)

◊325. $k,\ m,\ n$ を自然数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x$$

とする．このとき，$f(x)$ を

$$f(x) = 2\cos\boxed{\ \mathrm{X}\ } \times \sin\boxed{\ \mathrm{Y}\ }$$

の形で表したい．X，Y に入る式をそれぞれ答えよ．

(2) x を $\sin\dfrac{1}{2}x \neq 0$ をみたす実数とする．このとき，

$$\frac{\sin\left(m + \dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{1}{2}x} - \sum_{k=1}^{m}\cos kx$$

を求めよ．

(3) 関数

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\cos kx$$

に対して,

$$g_n(x) \geqq -\frac{n+1}{2}$$

がつねに成り立つことを証明せよ.

(17 横浜市立大学 医学部 2)

326. $a_n = [\log_3 n]$ により定義される数列 $\{a_n\}$ に対して，$S(n) = \sum_{i=1}^{n} a_i$ とおく．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，$[a]$ は a を越えない最大の整数を表す.

(1) k を 0 以上の整数とするとき，$a_n = k$ を満たす n の個数を k の式で表せ.

(2) m を正の整数とするとき，$S(3^m - 1)$ を m の式で表せ.

(3) $S(n) = 2017$ となる n の値を求めよ.

(17 福井大学 教育・国際地域学部 2)

327. 座標平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．n を自然数とし，連立不等式

$$\begin{cases} x \geqq y^2 \\ x + y \leqq n(n+1) \end{cases}$$

の表す領域を D_n とする．また，D_n に含まれる格子点の個数を a_n とする．このとき，次の各問に答えよ.

(1) 領域 D_2 を座標平面上に図示し，a_2 を求めよ.

(2) 直線 $x + y = n(n+1)$ 上にあり，D_n に含まれる格子点の個数を求めよ.

(3) $a_{n+1} - a_n$ を，n を用いて表せ.

(4) a_n を，n を用いて表せ.

(17 宮崎大学 医学部 6)

8.3 べき級数

328. 以下において考察する数列の項は，すべて実数であるとする.

(1) 等比数列 $\{s_n\}$ の初項が 1, 公比が 2 であるとき

$$s_1 s_2 s_3 = \boxed{\text{ア}}, \quad s_1 + s_2 + s_3 = \boxed{\text{イ}}$$

である.

(2) $\{s_n\}$ を初項 x，公比 r の等比数列とする．a, b を実数（ただし $a \neq 0$）とし，$\{s_n\}$ の最初の 3 項が

$$s_1 s_2 s_3 = a^3 \qquad \cdots\cdots ⑩$$
$$s_1 + s_2 + s_3 = b \qquad \cdots\cdots ⑪$$

を満たすとする．このとき

$$xr = \boxed{\text{ウ}} \qquad \cdots\cdots ⑫$$

である．さらに⑪，⑫を用いて r，a，b の満たす関係式を求めると

$$\boxed{\text{エ}}r^2 + \left(\boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}}\right)r + \boxed{\text{キ}} = 0 \qquad \cdots\cdots ⑬$$

を得る．⑬を満たす実数 r が存在するので

$$\boxed{\text{ク}}a^2 + \boxed{\text{ケ}}ab - b^2 \leqq 0 \qquad \cdots\cdots ⑭$$

である．

逆に a，b が⑭を満たすとき，⑫，⑬を用いて r，x の値を求めることができる．

(3) $a = 64, b = 336$ のとき，(2) の条件⑩, ⑪を満たし，公比が 1 より大きい等比数列 $\{s_n\}$ を考える．⑫, ⑬ を用いて $\{s_n\}$ の公比 r と初項 x を求めると，$r = \boxed{\text{コ}}$, $x = \boxed{\text{サシ}}$ である．

$\{s_n\}$ を用いて，数列 $\{t_n\}$ を

$$t_n = s_n \log_{\boxed{\text{コ}}} s_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定める．このとき，$\{t_n\}$ の一般項は $t_n = \left(n + \boxed{\text{ス}}\right) \cdot \boxed{\text{コ}}^{n+\boxed{\text{セ}}}$ である．

$\{t_n\}$ の初項から第 n 項までの和 U_n は，$U_n - \boxed{\text{コ}}U_n$ を計算することにより

$$U_n = \frac{\boxed{\text{ソ}}n + \boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \cdot \boxed{\text{コ}}^{n+\boxed{\text{ツ}}} - \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

であることがわかる．

(17 センター本試験 II?B 1 第 3 問)

329. 以下において考察する数列の項は，すべて実数であるとする．

(1) 等比数列 $\{s_n\}$ の初項が 1, 公比が 2 であるとき

$$s_1 s_2 s_3 = \boxed{\text{ア}}, \quad s_1 + s_2 + s_3 = \boxed{\text{イ}}$$

である．

(2) $\{s_n\}$ を初項 x，公比 r の等比数列とする．a, b を実数（ただし $a \neq 0$）と

し，$\{s_n\}$ の最初の 3 項が

$$s_1 s_2 s_3 = a^3 \quad \cdots\cdots ⑮$$
$$s_1 + s_2 + s_3 = b \quad \cdots\cdots ⑯$$

を満たすとする．このとき

$$xr = \boxed{\text{ウ}} \quad \cdots\cdots ⑰$$

である．さらに⑯，⑰を用いて r，a，b の満たす関係式を求めると

$$\boxed{\text{エ}}r^2 + \left(\boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}}\right)r + \boxed{\text{キ}} = 0 \quad \cdots\cdots ⑱$$

を得る．⑱を満たす実数 r が存在するので

$$\boxed{\text{ク}}a^2 + \boxed{\text{ケ}}ab - b^2 \leqq 0 \quad \cdots\cdots ⑲$$

である．

逆に a，b が⑲を満たすとき，⑰，⑱を用いて r，x の値を求めることができる．

(3) $a = 64, b = 336$ のとき，(2) の条件⑮, ⑯を満たし，公比が 1 より大きい等比数列 $\{s_n\}$ を考える．⑰, ⑱ を用いて $\{s_n\}$ の公比 r と初項 x を求めると，$r = \boxed{\text{コ}}$, $x = \boxed{\text{サシ}}$ である．

$\{s_n\}$ を用いて，数列 $\{t_n\}$ を

$$t_n = s_n \log_{\boxed{\text{コ}}} s_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定める．このとき，$\{t_n\}$ の一般項は $t_n = \left(n + \boxed{\text{ス}}\right) \cdot \boxed{\text{コ}}^{\,n+\boxed{\text{セ}}}$ である．$\{t_n\}$ の初項から第 n 項までの和 U_n は，$U_n - \boxed{\text{コ}}U_n$ を計算することにより

$$U_n = \frac{\boxed{\text{ソ}}n + \boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \cdot \boxed{\text{コ}}^{\,n+\boxed{\text{ツ}}} - \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

であることがわかる．

(17 年 センター本試験 II・B 第 3 問)

8.4 群数列

°330. 数列 $\{a_n\}$ を初項から順に群に分けると，第 m 群 $(m = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は，初項 1，公比 2，項数 m の等比数列となるとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a_k = 1024$ となる最小の k を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{l} a_n < 2000$ となる最大の l を求めよ．

(17 京都府立大学 生命環境学部 3)

331. 自然数の列

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \cdots$$

から 3 の倍数と 5 の倍数を除いて得られる数列を $\{a_n\}$ とおく．ただし，n は自然数とする．このとき，

(i) $a_5 = \boxed{(18)}$，$a_{10} = \boxed{(19)(20)}$，$a_{k+8} = a_k + \boxed{(21)(22)}$ である．

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n > 2000$ を満たす最小の m の値は $\boxed{(23)(24)}$ である．

(17 慶應義塾大学 薬学部 1(3))

332. $1,\ 5,\ 5^2,\ \cdots,\ 5^{k-1}(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を順番に並べて得られる次の数列を考える．

$$1,\ 1,\ 5,\ 1,\ 5,\ 5^2,\ 1,\ 5,\ 5^2,\ 5^3,\ 1,\ 5,\ 5^2,\ 5^3,\ 5^4,\ \cdots$$

(a) 第 40 項は $5^{\boxed{\text{ニ}}}$ である．

(b) 初項から第 777 項までに，1 である項は $\boxed{\text{ヌネ}}$ 個ある．

(c) 自然数 n に対し，初項から第 n 項までの和を S_n とする．$S_n \geqq 1000$ を満たす最小の n は $\boxed{\text{ノハ}}$ である．

(17 東京理科大学 理工学部)

333. 初項 $a_1 = 1$, 公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7 の倍数である項の個数を求めよ．

(2) $\{a$ 訂の初項から第 600 項のうち，7^2 の倍数である項の個数を求めよ．

(3) 初項から第 n 項までの積 $a_1a_2\cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n を求めよ．

(17 九州大学 医・歯・薬・工・理・経済・芸術工学部 3)

334. 自然数の列を次のように群に分け，第 n 群には連続する n 個の自然数が入るようにする．

1	2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9, 10	11, $\cdots$
第 1 群	第 2 群	第 3 群	第 4 群	

このとき，次の問に答えよ．

(1) 自然数 29 は第何群に入るか.
(2) 第 n 群に入る最小の自然数と最大の自然数を n を用いて表せ.
(3) 自然数 2017 は第何群に入るか.

(17 香川大学 工学部 2)

8.5 数学的帰納法

◊335. 次の条件によって定められる数列をそれぞれ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ とする.

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$b_1 = 1,\ b_2 = 2,\ b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$c_1 = 1,\ c_2 = 1,\ c_{n+2} = \frac{c_{n+1}(c_{n+1}+1)}{c_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ.

(1) a_3b_3, a_4b_3, a_4b_4 の値を求めよ.
(2) 次の等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ.

$$a_nb_{n+1} = a_{n+1}b_n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$a_{n+2}b_n = a_{n+1}b_{n+1} + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(3) n が 3 以上の自然数のとき, c_n は整数であることを示せ.

(17 同志社大学 理系 (全学部 2/4) 4)

336. 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2n}{n+1}a_n + \frac{2^{n+1}}{n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ.
(2) 一般項 a_n を推測し, それが正しいことを数学的帰納法によって示せ.
(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2}$$

(17 三重大学 工学部 1)

337. 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} = 3{a_{n+1}}^2 - 6a_{n+1}a_n + 3{a_n}^2 + a_{n+1}\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

を満たすとする．また，$b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $b_n \geqq 0$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ を示せ．

(2) b_n $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ の一の位の数が 2 であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) a_{2017} の一の位の数を求めよ．

(17 筑波大学 3)

338. t の関数 $f(t)$ は定数関数でないとし，すべての実数 α, β に対して次を満たすとする．

$$f(\alpha) \geqq 1, \quad 2f(\alpha)f(\beta) = f(\alpha+\beta) + f(\alpha-\beta)$$

(1) $f(0) = \boxed{(10)}$ であり，$f(2\alpha) = \boxed{(11)}\{f(\alpha)\}^2 + \boxed{(12)}\boxed{(13)}$ が成り立つ．

(2) 方程式 $x + \dfrac{1}{x} = 2f(\alpha)$ を満たす x を考える．等式

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \boxed{(14)}\boxed{(15)}$$

を用いると，$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \boxed{(16)}f\left(\boxed{(17)}\alpha\right)$ となることがわかる．

(3) さらに，等式

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) + \boxed{(18)}\boxed{(19)}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

を用いると，$x^3 + \dfrac{1}{x^3} = \boxed{(20)}f\left(\boxed{(21)}\alpha\right)$ となることがわかる．

(4) (2)，(3) より，一般に，自然数 n に対して

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \boxed{(22)}f\left(\boxed{(23)}n\alpha\right) \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つと推測される．この推測が正しいことを次のように確かめる．

$n = 1,\ 2,\ 3$ のとき ① は成り立つ．3 以上の自然数 k に対して，$n = k-1$ および $n = k$ のとき ① が成り立つと仮定すると，等式

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) + \boxed{(24)}\boxed{(25)}\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

より，$x^{k+1} + \dfrac{1}{x^{k+1}} = \boxed{(26)}f\left(\boxed{(27)}\left(k + \boxed{(28)}\right)\alpha\right)$ が成り立つことがわかる．よって，$n = k+1$ のときにも ① は成り立つ．

(5) $S_n = f(0) + \displaystyle\sum_{k-1}^{n-1} f(k\alpha)$ $(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ とする．$f(\alpha) > 1$ のとき，

$$S_n = \frac{1 + \boxed{(29)}\boxed{(30)}f(\alpha) + \boxed{(31)}\boxed{(32)}f((n-1)\alpha) + \boxed{(33)}\boxed{(34)}f(n\alpha)}{\boxed{(35)}\{1 - f(\alpha)\}}$$

となる．

(17 慶應義塾大学 経済学部 2)

339. 数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n - 1} \quad (n \geqq 1)$$

このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, $P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ とするとき，すべての自然数 n に対して

$$S_n = P_n$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) $a_n > 1$ $(n \geqq 1)$ を証明せよ.

(3) $a_n = \dfrac{b_n}{c_n}$ (ただし，b_n と c_n は互いに素な整数で $c_n > 0$) と表すとき，すべての自然数 n に対して

$$b_{n+1} = 2^{(2^{n-1})}, \quad c_{n+1} = b_{n+1} - c_1 c_2 c_3 \cdots c_n$$

が成り立つことを証明せよ.

(17 千葉大学 後期 医・工・理 (数・情) 学部 5)

340. 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2n}{n+1} a_n + \frac{2^{n+1}}{n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また自然数 p に対して二つの条件

(ア) ある自然数 k を用いて $p = 3 \times 2^k$ と表される

(イ) ある自然数 m, n $(m < n)$ を用いて $p^2 = a_m + a_n$ と表される

を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ.

(2) 一般項 a_n を推測し，それが正しいことを数学的帰納法によって示せ.

(3) 条件 (ア) が成り立っているとき，条件 (イ) が成り立つことを示せ.

(4) 条件 (イ) が成り立っているとき，条件 (ア) が成り立つことを示せ.

(17 三重大学 医学部 3)

°341. (1) n を自然数とするとき，次の等式を証明しなさい.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

(2) 次の和を求めなさい.

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + 99^3$$

(17 信州大学 教育学部 1)

◊342. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

以下の問いに答えよ．

(1) 2 以上の自然数 n に対して，$a_{n+2} > 2a_n$ が成り立つことを示せ．

(2) 2 以上の自然数 m は，数列 $\{a_n\}$ の互いに異なる k 個 $(k \geqq 2)$ の項の和で表されることを，数学的帰納法によって示せ．

(3) (2) における項の個数 k は，$k < 2\log_2 m + 2$ を満たすことを示せ．

(17 九州大学 後期 工学部 5)

°343. 自然数 n に対して，次の等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

(17 福井大学 工学部 1(2))

8.6 漸化式

344. 数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める．

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

以下の問いに答えなさい．

(1) a_3，a_4，a_5 を求めなさい．

(2) x，y についての 1 次不定方程式 $a_5x + a_4y = 1$ の整数解をすべて求めなさい．

(3) すべての自然数 n に対して，a_n と a_{n+1} が互いに素であることを示しなさい．

(17 首都大学東京 都市教養学部 (文系) 4)

345. 以下のようにして数列 $\{a_n\}$ を定義する．$a_1 = 1$ とする．$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，曲線 $y = x^5$ 上の点 $\left(a_n,\ {a_n}^5\right)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_{n+1} とする．このとき，数列 $\{a_n\}$ の漸化式は

$$a_{n+1} = \frac{\boxed{(10)}}{\boxed{(11)}}a_n$$

である．数列 $\{a_n\}$ の隣接する 2 項の差 $a_n - a_{n+1}$ が $\dfrac{1}{1000}$ 以下である自然数 n の最小値は $\boxed{(12)\,\vdots\,(13)}$ である．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

(17 慶應義塾大学 商学部 1(2))

346. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1}a_n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める．0 以上の整数 k に対して，k を 3 で割った余りを $R(k)$ とする．例えば，$R(5) = 2$ である．$b_n = R(a_n)$ とし，$s_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_8$ を求めよ．
(2) 0 以上の整数 $p,\ q$ に対して，$R(3p + q) = R(q)$ が成り立つことを示せ．
(3) $R(a_{n+1}a_n + 1) = R(b_{n+1}b_n + 1)$ が成り立つことを示せ．
(4) $b_{n+4} = b_n$ が成り立つことを示せ．
(5) 数列 $\{s_n\}$ の一般項を求めよ．

(17 岐阜大学 教育・医・工・地域科学・応用生物科学部 5)

347. 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n が次を満たす．

$$a_n + 2S_n = 3 \cdot 2^{n-1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) a_{n+1} と a_n の関係式を求めよ．
(2) 一般項 a_n を求めよ．
(3) $S_1 + 3S_2 + 3^2S_3 + \cdots + 3^{n-1}S_n$ を求めよ．

(17 徳島大学 医・歯・薬学部 1)

348. i を虚数単位とし，整数の数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は

$$(3 + 2i)^n = a_n + b_n i \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たす．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $n \geqq 2$ のとき，a_n および b_n をそれぞれ a_{n-1} と b_{n-1} を用いて表せ．
(2) ${a_n}^2 + {b_n}^2$ を n を用いて表せ．
(3) ${a_n}^2 + {b_n}^2 = (a_n + b_n i)(a_n - b_n i)$ であることを用いて，$\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

(17 滋賀大学 後期 経済学部 4)

349. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n + 4n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定められた数列 $\{a_n\}$ について考える．以下の問いに答えよ．

(1) $p,\ q$ を定数とする．$b_n = a_n + pn + q$ で定められる数列 $\{b_n\}$ が公比 3 の等比数列となる $p,\ q$ の値を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を n の式で表せ．

(3) $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ とする．$S_n > 3^{30}$ となる最小の自然数 n を求めよ．

(17 奈良女子大学 後期 理学部 (数物・化学生命環境) 1)

°350. 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1 = 1,\ 2a_{n+1} = a_n + 2\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ をみたすとき，この数列の一般項を求めよ．

(17 岩手大学 教育・農・人文社会科学部 1(3))

351. 以下の問いに答えよ．

(1) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = ca_n + d$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．ただし $c,\ d$ は定数であり，$c \neq 1$ とする．

(2) 正の数を項とする数列 $\{b_n\}$ により，座標平面上の点 $\mathrm{P}_n(b_n,\ b_{n+1})$，$\mathrm{Q}_n\left(\dfrac{\sqrt{b_{n+1}}}{3},\ b_{n+1}\right)$ を定める．また，原点を O とする．線分 OP_n と OQ_n の長さが等しいとき，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．ただし $b_1 = 1$ とする．

(17 三重大学 教育・生物資源・人文学部 3)

352. $p = 2 + \sqrt{5}$ とおき，自然数 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める．以下の問いに答えよ．ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい．

(1) $a_1,\ a_2$ の値を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ とする．積 $a_1 a_n$ を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ．

(3) a_n は自然数であることを示せ．

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ．

(17 東京大学 理 4 文 4)

353. r を自然数とする．数列 $\{a_n\}$ は条件

$$2^n a_n = n^2 + \sum_{k=1}^{r} 2^{k+n} a_k \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定められる．次の問いに答えよ．

(1) $r = 2$ とする．$a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の最大値を求めよ．また，そのときの n の値を求めよ．

(2) $r = 6$ とする．数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(17 東京農工大学 後期 工学部 1)

354. $\{a_n\}$ を数列とし，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく．c を定数とする．数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{S_n\}$ が関係式

$$a_1 = 2, \quad a_n = n^2 - 2S_n + C \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たしているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) C の値を求めよ．

(2) a_{n+1} を，a_n と n を用いて表せ．

(3) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_n - n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．このとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) 数列 $\{S_n\}$ の一般項を求めよ．

(17 静岡大学 理学部 (数)3 情報・工学部 1 教育・農学部 2)

°355. 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項までの和 S_n が，$S_n = n + 2a_n$ を満たしているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(17 福井大学 工学部 1(1))

◊356. 数列 a_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = \sqrt{3}, \quad a_{n+2} = a_{n+1}a_n$$

と定める．

(1) $a_{10} = 2^p 3^q \sqrt{r}$ と表すと，$p = \boxed{\text{ア}}$，$q = \boxed{\text{イ}}$，$r = \boxed{\text{ウ}}$ である．

(2) $\log_{10} a_n > 200$ を満たす最小の n は $\boxed{\text{エ}}$ である．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(17 早稲田大学 スポーツ科学部 1)

357. 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3 - 2a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n に対し，a_n は $\frac{1}{3} \leqq a_n < \frac{1}{2}$ を満たす有理数であることを示せ．

(2) 一般項 a_n を $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ (ただし，p_n，q_n は互いに素な自然数) と既約分数で表したとき，p_{n+1} を p_n と q_n で，q_{n+1} を p_n と q_n でそれぞれ表せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ.

(17 お茶の水女子大学 理・文教育・生活科学部 1)

◊358. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n + 3} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ.

(1) $a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ を求めよ.

(2) 一般項 a_n を推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ.

(3) 不等式 $a_n > 1 - 10^{-18}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする.

(17 新潟大学 理系 3 文系 3)

359. 座標平面上の 3 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{A}(3,\ 0),\ \mathrm{B}(1,\ 2)$$

を考える．C を線分 OA 上にあり，$\angle\mathrm{OBC} = 45^\circ$ を満たす点とする．また，P を x 座標が t である直線 OA 上の点とする．点 Q，R，P$'$ を次により定める.

(a) 点 P を通り傾きが 1 の直線と，直線 AB の交点を Q とする.

(b) 点 Q を通り直線 OB に垂直な直線と，直線 OB の交点を R とする.

(c) 点 R を通り直線 BC と同じ傾きをもつ直線と，直線 OA の交点を P$'$ とする.

次の問いに答えよ.

(1) 点 Q の座標を t を用いて表せ.

(2) 点 R の座標を t を用いて表せ.

(3) 点 P$'$ の座標を t を用いて表せ.

(4) 点 P$'$ の x 座標を $f(t)$ とする． 数列 $\{t_n\}$ を

$$t_1 = 2, \quad t_{n+1} = f(t_n) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．数列 $\{t_n\}$ の一般項を求めよ.

(17 広島大学 経済・教育学部 2)

360. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 8{a_n}^2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $b_n = \log_2 a_n$ とおく．b_{n+1} を b_n を用いてあらわせ.

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) $P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ とおく．数列 $\{P_n\}$ の一般項を求めよ.

(4) $P_n > 10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ.

(17 大阪大学 文系 3)

361. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{2}{1+a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める. 次のことを示せ.

(1) n が偶数のとき　$1 < a_{n+2} < a_n$

(2) n が奇数のとき　$a_n < a_{n+2} < 1$

(17 一橋大学 後期 経済学部 2)

8.7 応用 (確率と漸化式も含む)

362. 動点 P は時刻 0 で下図の正八面体 ABCDEF の頂点 A にいるとし, 次の規則に従って 1 秒ごとに頂点を移動する.

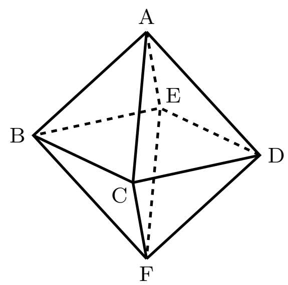
規則

P がある頂点 X にいるとき, その 1 秒後には X に隣り合う 4 個の頂点のいずれかにそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で移動する.
(例えば, 頂点 A に隣り合う頂点とは B, C, D, E のことである.)

自然数 n に対して, n 秒後に P が頂点 A にいる確率を a_n, 頂点 F にいる確率を b_n, 頂点 A にも F にもいない確率を c_n とする. このとき $b_2 = \boxed{(ヌ)}$, $c_2 = \boxed{(ネ)}$ である, また a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} を c_n の式で表すと

$$a_{n+1} = \boxed{(ノ)},\ b_{n+1} = \boxed{(ハ)},\ c_{n+1} = \boxed{(ヒ)}$$

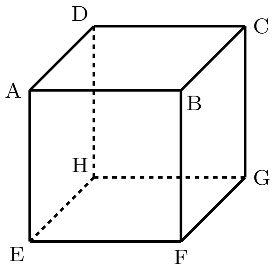
である. よって, 数列 $\{c_n)$ の一般項は $c_n = \boxed{(フ)}$ である.



(17 慶應義塾大学 看護医療学部 4)

◇363. 下図のような立方体を考える．この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する．時刻 0 では点 P は頂点 A にいる．時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する．例えば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる．自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ．
(2) $n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ．
(3) 自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ．



(17 名古屋大学 文・教育・法・経済・情報学部 2)

◇364. n を正の整数とする．A さんは 1 から n までの整数が書かれたカードを 1 枚ずつもち，B さんは 0 から n までの整数が書かれたカードを 1 枚ずつもっているとする．A さんと B さんが，次の試行を交互にくり返し行う．

- 相手のカードから 1 枚のカードをランダムに引く．引いたカードに書かれた整数と同じ整数のカードが自分のカードの中にある場合は，そのカードと引いたカードを一組みにして捨てる．そうでない場合は，引いたカードを自分のカードに加える．

試行の回数を，2 人のうちのどちらか一方が試行を行ったときに 1 回の試行を行ったものとして数える．試行の総回数が 100 回になった時点，もしくは，2 人のうちのどちらか一方のもっているカードがなくなった時点で試行を続けることをやめる．k が $1 \leqq k \leqq 99$ をみたす正の整数であるとき，以下の問に答えよ．

(1) $n=1$ とする．A さんから上の試行を始めるとき，試行の総回数が k となる確率 p_k を求めよ．

(2) $n=2$ とする．A さんから上の試行を始めるとき，試行の総回数が k となる確率 q_k を求めよ．

(3) $n=3$ とする．A さんから上の試行を始めるとき，試行の総回数が k となる確率 r_k を求めよ．

(17 神戸大学 後期 理科系 4)

365. n を自然数とする．1 枚のコインを $2n$ 回投げ，表が出た回数を数える．例えば $n=2$ のとき，4 回コインを投げ，表，表，裏，表と出たならば，表が出た回数は 3 である．コインを $2n$ 回投げ，表が出た回数を 3 で割った余りが 0, 1, 2 となる確率を，それぞれ a_n, b_n, c_n とするとき，次の問いに答えよ．

(1) a_1, b_1, c_1 を，それぞれ求めよ．

(2) a_2, b_2, c_2 を，それぞれ求めよ．

(3) a_n, b_n, c_n のうち，2 つは等しく，残りの 1 つはそれらより大きいことを示せ．

(4) a_n, b_n, c_n のうち，最大のものを n を用いて表せ．

(17 金沢大学 後期 理工学域 (数物科学・電子情報) 4)

366. 数直線上を次の規則で移動する動点 R を考える．

さいころを投げて 1 または 2 の目が出たときには R は $+1$ だけ移動し，
3 以上の目が出たときには -2 だけ移動する．

最初，R は原点にあるとし，ちょうど n 回移動した後の R の座標を X_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．整数 x に対し，$X_n \geqq x$ となる確率を $P(n,\ x)$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{1}{3} < r < 1$ および $\dfrac{2}{3}r^2 + \dfrac{1}{3}r^{-1} = 1$ を満たす実数 r がただ一つ存在することを示せ．

(2) x を整数とする．$P(1,\ x)$ を求めよ．さらに，(1) の r に対し，不等式 $P(1,\ x) < r^x$ が成り立つことを示せ．

(3) 自然数 n と整数 x に対し，$P(n+1,\ x)$ を $P(n,\ x-1)$ と $P(n,\ x+2)$ を用いて表せ．

(4) n を 2 以上の自然数とし，x を整数とする．(1) の r に対し，不等式 $P(n,\ x) < r^x$ が成り立つことを証明せよ．

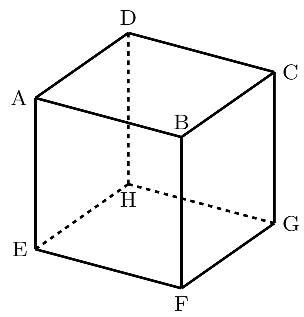
(17 広島大学 後期 理学部 (数学) 4)

367.　n を自然数とする．1つのさいころを n 回続けて投げるとき，出た目の数を順に X_1, X_2, $\cdots$, X_n と表し，それらの積を Y_n と表す．ただし，$Y_1 = X_1$ とする．また，Y_n を3で割ったときの余りが r であるという事象の確率を $P_n(r)$ $(r = 0,\ 1,\ 2)$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $P_2(0)$, $P_2(1)$, $P_2(2)$ をそれぞれ求めよ．
(2) $n \geqq 2$ のとき，$P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(2)$ のそれぞれを $P_{n-1}(1)$ と $P_{n-1}(2)$ を用いて表せ．
(3) $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(2)$ をそれぞれ求めよ．

(17 大阪府立大学 中期 工学域 4)

368.　立方体 ABCD–EFGH (右図参照) の頂点から頂点へ移動する点 P を考える．1回の移動で，点 P は辺で結ばれた隣の頂点のいずれかに，等しい確率で移動するものとする．また，点 P は最初に頂点 A にあるものとする．n 回の移動後に，点 P が頂点 A にある確率を p_n，頂点 B，D，E のいずれかにある確率を q_n，頂点 C，F，H のいずれかにある確率を r_n，頂点 G にある確率を s_n とする．次の問いに答えよ．



(1) p_2, q_2, r_2, s_2, p_3, q_3, r_3, s_3 を求めよ．
(2) p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}, s_{n+1} を p_n, q_n, r_n, s_n を用いて表せ
(3) $p_n + r_n$ を求めよ．
(4) k を自然数とする．p_{2k+2} を p_{2k} を用いて表せ．
(5) k を自然数とする．p_{2k}, r_{2k}, q_{2k+1}, s_{2k+1} を求めよ．

(17 埼玉大学 理 (数学)・工学部 3)

◇369.　赤玉2個，青玉1個，白玉1個が入った袋が置かれた円形のテーブルの周りに A，B，C の3人がこの順番で時計回りに着席している．3人のうち，ひとりが袋から玉を1個取り出し，色を確認したら袋にもどす操作を考える．1回目は A が玉を取り出し，次のルール (a)，(b)，(c) に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す．

(a) 赤玉を取り出したら，取り出した人を勝者とする．
(b) 青玉を取り出したら，次の回も同じ人が玉を取り出す．
(c) 白玉を取り出したら，取り出した人の左隣りの人が次の回に玉を取り出す．

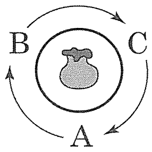
A，B，C の3人が n 回目に玉を取り出す確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$

とする．ただし，$a_1 = 1$，$b_1 = c_1 = 0$ である．以下の問いに答えよ．

(1) A が 4 回目に勝つ確率と 7 回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ．

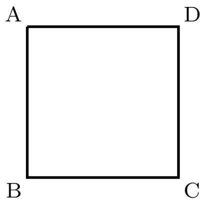
(2) $d_n = a_n + b_n + c_n$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ とおくとき，d_n を求めよ．

(3) 自然数 $n \geqq 3$ に対し，a_{n+1} を a_{n-2} と n を用いて表せ．



(17 九州大学 医・歯・薬・工・理・経済・芸術工学部 4)

370. X 君と Y 君がグラウンドにいる．そのグラウンドには右図のような正方形 ABCD が描かれている．Y 君の手元には 1 から 7 までの数字が 1 つずつ書かれた 7 枚のカードの入っている箱がある．



ここで次のような試行を考える．

Y 君は，この箱の中から無作為にカードを 1 枚取り出し，X 君にカードに書かれた数字を伝える．X 君はその数字にしたがって以下の規則で行動する．その後，Y 君は，取り出したカードをもとの箱に戻す．

〈規則〉

- 数字が 1 のとき，移動しない．
- 数字が 2，3 のとき，時計回りに隣の頂点に移動する．(例 A → D)
- 数字が 4，5 のとき，反時計回りに隣の頂点に移動する．(例 A → B)
- 数字が 6 のとき，時計回りに辺に沿って対角線上の頂点に移動する．(例 A → D → C)
- 数字が 7 のとき，反時計回りに辺に沿って対角線上の頂点に移動する．(例 A → B → C)

最初 X 君は頂点 A にいる．この試行を n 回繰り返した後，X 君が頂点 A にいる確率を P_n とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $P_1 = \boxed{\text{ア}}$，$P_2 = \boxed{\text{イ}}$ である．

(2) この試行を 2 回行った後，X 君が頂点 B にいる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ であり，頂点 C にいる確率は $\boxed{\text{エ}}$ である．したがって，$P_3 = \boxed{\text{オ}}$ である．

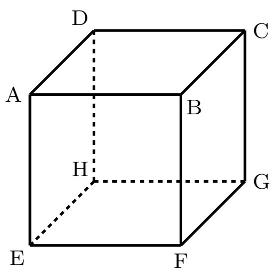
(3) $n \geqq 1$ のとき，P_{n+1} を P_n を用いて表すと，関係式 $P_{n+1} = \boxed{\text{カ}}$ が成り立つ．

したがって，$P_n = \boxed{\text{キ}} \left(-\dfrac{1}{7}\right)^n + \boxed{\text{ク}}$ である．

(17 立命館大学 薬学方式 (2/2) 4)

◊371. 下図のような立方体を考える．この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する．時刻 0 では点 P は頂点 A にいる．時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する．例えば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる．自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ．
(2) $n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ．
(3) 自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ．
(4) 自然数 $m \geqq 2$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率を t_m とする．このとき，$t_m < s_m$ となる m をすべて求めよ．



(17 名古屋大学 理・医・工・農・情報学部 2)

372. 三角形があり，その頂点を反時計回りの順に A，B，C とする．三角形 ABC において，点 P は頂点 A から出発し，1 秒経過することに隣の頂点へ移動する．ただし，反時計回りに移動する確率は $\dfrac{2}{3}$，時計回りに移動する確率は $\dfrac{1}{3}$ とする．n を自然数とし，点 P が頂点 A を出発してから n 秒経過したときに頂点 A, B, C にある確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n とする．次の問いに答えよ．

(1) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を，a_n，b_n，c_n を用いて表せ．
(2) a_{n+2} を c_n を用いて表せ．
(3) a_{n+6} を a_n を用いて表せ．
(4) 0 以上の整数 k に対して a_{6k+1} を求めよ．

(17 大阪市立大学 理・医・工学部 3)

373. 正四面体 ABCD の頂点を移動する点 P がある．点 P は，1 秒ごとに，隣の 3 頂点のいずれかに等しい確率 $\dfrac{a}{3}$ で移るか，もとの頂点に確率 $1-a$ で留まる．初め頂点 A にいた点 P が，n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする．ただし，$0<a<1$ とし，n は自然数とする．

(1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ．
(2) 確率 p_n を求めよ．

(17 北海道大学 文系 3)

◊374. 3g のおもり 1 個が片方の皿にのっているてんびんと，無数に用意された 1g, 2g，3g のおもりがある．以下の 2 つのルールに基づいて，てんびんの皿におもりを 1 個ずつのせる試行を行う．

1. てんびんがつり合っていないときには，総重量が軽い方の皿に 1g，2g，3g のおもりを無作為に 1 個選んでのせる．それぞれのおもりが選ばれる確率は $0<a<1$ として $\dfrac{a}{2}$，$\dfrac{a}{2}$，$1-a$ である．
2. てんびんがつり合った時点で試行をやめる．

n 回目の試行の結果，てんびんがつり合っていない確率を p_n，てんびんがつり合って試行が終了する確率を q_n とするとき，以下の各問に答えよ．

(1) p_1 と p_2 をそれぞれ a を用いて表せ．
(2) p_n の一般項を a と n を用いて表せ．
(3) q_n の一般項を a と n を用いて表せ．
(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nq_n$ を求めよ．

(17 札幌医科大学 3)

375. A，B，C の 3 人が以下の規則に従って試合を繰り返し行う．各試合において 2 人が対戦し，残りの 1 人は待機する．対戦ではどちらか一方が勝利し，引き分けはないものとする．

① 第 1 試合では，A と B が対戦し，C は待機する．
② 第 2 試合では，第 1 試合の勝者と C が対戦し，第 1 試合の敗者は待機する．
③ 同様に，第 $(n+1)$ 試合では，第 n 試合の勝者と第 n 試合で待機した者が対戦し，第 n 試合の敗者は待機する．

A と B が対戦したとき A が勝利する確率は $\frac{2}{3}$，B と C が対戦したとき B が勝利する確率は $\frac{1}{2}$，C と A が対戦したとき C が勝利する確率は $\frac{1}{3}$ である．第 n 試合において，A，B，C が待機する確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とする．

(1) 次の $\boxed{}$ に適する数を，解答用紙の指定のところに記入せよ．

$$a_2 = \boxed{ア},\ b_2 = \boxed{イ},\ c_2 = \boxed{ウ},\ c_3 = \boxed{エ}$$
$$a_{n+1} = \boxed{オ} b_n + \boxed{カ} c_n$$
$$b_{n+1} = \boxed{キ} a_n + \boxed{ク} c_n$$
$$c_{n+1} = \boxed{ケ} a_n + \boxed{コ} b_n$$

(2) $b_n - c_n$ を n の式で表せ．

(3) a_n を n の式で表せ．

(4) b_n を n の式で表せ．

(17 愛媛大学 医・工・理・教育・農学部 5)

376. 袋が 1 つと赤玉，白玉がそれぞれ 3 個ずつ用意されている．袋の中に玉が 3 個入った状態に対して，以下の操作 T を考える．

操作 T

(T1) 袋の中から無作為に玉を 2 個取り出す．

(T2) (a) 取り出した 2 個の玉の色が異なる場合は，取り出した 2 個の玉をそのまま袋に戻す．

(b) 取り出した 2 個の玉の色が同じ場合は，その色と異なる色の玉を 2 個の袋の中に入れる．

ここで次の 2 つの状態を考える．

状態 A: 袋の中に赤玉 2 個と白玉 1 個が入っている状態．

状態 B: 袋の中に白玉 3 個のみが入っている状態．

以下 n を自然数とし，状態 A から始めて操作 T を繰り返し行う．

(1) n 回の操作を繰り返し終えたとき状態 A である確率を p_n とすると，$p_1 = \boxed{(あ)}$ であり，一般に $p_n = \boxed{(い)}$ である．

(2) n 回の操作を終えるまでに状態 B が 1 回だけおこる確率を q_n とすると，$q_4 = \boxed{(う)}$ であり，一般に $q_n = \boxed{(え)}$ である．

(3) n 回の操作を終えるまでに状態 B がちょうど 2 回おこる確率を r_n とすると，$r_4 = \boxed{(お)}$ であり，一般に $n \geqq 3$ のとき $r_n = \boxed{(か)}$ である．

(17 慶應大学 医学部 2)

377. n を 2 以上の自然数とする．1 から n までの自然数の順列

$$a_1a_2\cdots a_n$$

のうち，$a_k < a_{k+1}$ を満たさないような k がただ 1 つだけある順列の総数を P_n とする．例えば $n=3$ の場合，条件を満たす順列全体は $\{132,\ 213,\ 231,\ 312\}$ であるので，$P_3=4$ である．P_{n+1} と P_n の関係式を求めよ．

(17 早稲田大学 教育学部 1(2))

378. n を自然数とする．n 個の箱すべてに，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている．各々の箱から 1 枚ずつカードを取り出し，取り出した順に左から並べて n 桁の数 X を作る．このとき，X が 3 で割り切れる確率を求めよ．

(17 京都大学 理系 (総合人間・教育・理・医・薬・農・工・経済学部) 6)

8.8 その他

◊**379.** n を自然数とする．1 から $3n+1$ までの自然数を並べかえて，順に

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n,\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n$$

とおく．また，次の条件 (C1)，(C2) が成立しているとする．

(C1) $3n$ 個の値

$$|a_1-a_2|,\ |a_2-a_3|,\ \cdots,\ |a_n-a_{n+1}|,$$
$$|a_1-b_1|,\ |a_2-b_2|,\ \cdots,\ |a_n-b_n|,$$
$$|a_1-c_1|,\ |a_2-c_2|,\ \cdots,\ |a_n-c_n|$$

は，すべて互いに異なる．

(C2) 1 以上 n 以下のすべての自然数 k に対し

$$|a_k-b_k| > |a_k-c_k| > |a_k-a_{k+1}|$$

が成り立つ．

このとき以下の各問いに答えよ．

(1) $n=1$ かつ $a_1=1$ のとき，a_2，b_1，c_1 を求めよ．

(2) $n=2$ かつ $a_1=7$ のとき，a_2，a_3，b_1，b_2，c_1，c_2 を求めよ．

(3) $n \geqq 2$ かつ $a_1=1$ のとき，a_3 を求めよ．

(4) $n=2017$ かつ $a_1=1$ のとき，a_{29}，b_{29}，c_{29} を求めよ．

(17 東京医科歯科大学 医学部 (医・歯・保健衛生)1)

380. 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項は，n を 3 で割ったときの余りの値であり，数列 $\{b_n\}$ の第 n 項は，n を 4 で割ったときの余りの値である．$a_n + b_n + 6$ が 10 で割り切れるときの n の値を，小さい方から順に並べてできる数列を $\{c_n\}$ とするとき，$c_9 = \boxed{\text{シ}}$，$c_{10} = \boxed{\text{ス}}$ である．

(17 早稲田大学 人間科学部 A 方式 4)

381. 表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ であるようなコインがある．ただし，$0 < p < 1$ である．このとき，下図のような正三角形の 3 頂点 A，B，C を次の規則で移動する動点 R を考える．

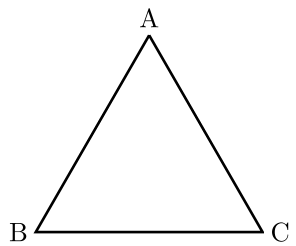
> コインを投げて表が出れば R は反時計まわりに隣の頂点に移動し，裏が出れば R は時計まわりに隣の頂点に移動する．

R は最初 A にあり，全部で $(2N+3)$ 回移動する．ここで，N は自然数である．移動回数がちょうど k に達したときに R が A に初めて戻る確率を P_k $(k = 2,\ 3,\ \cdots,\ 2N+3)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) P_2，P_3 を求めよ．

(2) P_{2m}，P_{2m+1} $(2 \leqq m \leqq N+1)$ を求めよ．

(3) $p = \dfrac{1}{2}$ とする．移動回数がちょうど $2N+3$ に達したときに R が A に 2 度目に戻る確率 Q を求めよ．



(17 広島大学 理・工・生物生産・医・歯・薬・教育・総合科学部 3)

§9 微分 (1)

9.1 極限

°382. 実数の定数 a, b に対し，等式 $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^2+ax+b}{x^2+x-2} = 7$ が成り立っているとき，$a = \boxed{\text{あ}}$，$b = \boxed{\text{い}}$ である．

(17 茨城大学 後期 工学部 1(1))

9.2 接線，法線

383. 三次関数

$$y = f(x) = x^3 - 4x$$

に対して，次の問いに答えよ．

(i) 点 $(1,\ -4)$ から曲線 $y = f(x)$ に引いた接線のうち，傾きが正の値となるものの方程式は，

$$y = \boxed{\text{タ}}$$

である．

(ii) (i) で求めた接線と曲線 $y = f(x)$ との共有点のうち，接点以外の点の座標は，$(x,\ y) = \left(\boxed{\text{チ}},\ \boxed{\text{ツ}}\right)$ である．

(17 早稲田大学 国際教養学部 3(2))

°384. 曲線 $y = 6x^3 - 3x$ と $y = \dfrac{3}{2}x^2 + a$ が共有点をもち，さらにその点において，それぞれの曲線の接線が等しくなるような定数 a の値を小さい方から順に並べると，$\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ となる．

(17 早稲田大学 人間科学部 A，B 方式 2)

385. 座標平面上の点 $(a,\ b)$ から曲線 $y = x^3 - 3x$ に引ける接線の本数を n とする．

(1) $n = 3$ をみたすような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ．

(2) $-3a < b$ かつ $n \leqq 2$ をみたすように点 $(a,\ b)$ が動くとき，$b - 3a$ の最小値を求めよ．

(17 千葉大学 教育・国際・文・法経・園芸・先進学部 6)

°386. xy 平面において，原点を中心とする半径 1 の円を C とする．a と b を実数とし，放物線 $D : y = x^2 + ax + b$ の頂点 $(p,\ q)$ が円 C 上にあるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $(p,\ q) = (\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ と表すとき，a と b を θ を用いて表せ．

(2) 放物線 D の $x = 1$ における接線が円 C の周を 2 等分するような a, b の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(3) 放物線 D の接線で円 C の周を 2 等分することを考える．そのような接線がただ一つ存在するような a, b の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(17 東北大学 後期 理・経済学部 1)

所見：「接線がただ一つ存在する」の処理が得点の分かれ目でしょうか.

387. (1) α, β は定数で，$\alpha>0$, $\beta>0$ とする．x の 3 次方程式

$$18x^3-6\alpha x+\beta=0$$

がただ1つの実数解をもつための必要十分条件は $\beta>\boxed{(フ)}$ である．$\beta=\boxed{(フ)}$ のとき，曲線 $y=18x^3-6\alpha x+\beta$ と x 軸で囲まれる部分の面積を α を用いて表すと $\boxed{(ヘ)}$ となる.

(2) 放物線 $C:y=3x^2$ 上の点 $\mathrm{P}\left(-a,\ 3a^2\right)$ $(a>0)$ における法線と C との交点で点 P と異なる点の x 座標を $X(a)$ とする．$X(a)=\boxed{(ホ)}$ であり，$a>0$ における $X(a)$ の最小値は $\boxed{(マ)}$ である.

次に，$x_0>0$ とし，点 $\mathrm{Q}(x_0,\ y_0)$ を放物線 C 上にない点とする．C 上の点における法線で点 Q を通るものがただ1つであるための必要十分条件は，$x\geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)=\boxed{(ミ)}$ に対して，$y_0<f(x_0)$ が成り立つことである.

(17 慶應義塾大学 理工学部 5)

388. 関数 $f(x)=(x-1)^2(x+1)^2$ について，次の問いに答えよ.

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減および極値を調べて，そのグラフの概形をかけ.

(2) t を定数とする．関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(t,\ f(t))$ における接線 ℓ の方程式を，t を用いて表せ.

(3) (2) で求めた接線 ℓ と関数 $y=f(x)$ のグラフが，異なる 3 つの共有点をもつための t の条件を求めよ.

(17 静岡大学 理 (物化)・情報・工学部 2)

°389. a を実数とする．座標平面内の曲線 $C:y=x^3-ax$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $a=5$ のとき，C の接線で点 $(1,\ 0)$ を通るものの方程式を求めよ.

(2) C の接線で点 $(1,\ 0)$ を通るものが 3 本存在するような a の範囲を求めよ.

(17 岡山大学 経済・教育学部 1)

390. a を定数とし，点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ から曲線 $C:y=x^3-2x^2+x$ に接線を引く．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 曲線 C 上の点 $\left(t,\ t^3-2t^2+t\right)$ における接線の方程式を求めよ.

(2) 点 P から曲線 C に引くことができる接線の本数が 1 本となるような a の値の範囲を求めよ.

(3) 点 P から曲線 C に引くことができる接線の本数が 2 本となるような a の値をすべて求めよ.

(17 滋賀大学 後期 経済学部 2)

391. $t>0$ とする．xy 平面上に直線 $l_1: x=t$ と放物線 $C: y=2x^2$ がある．C と l_1 の共有点を P とし，P における C の接線を l_2 とする．l_2 に関して l_1 と対称な直線を l_3 とし，l_3 と C の共有点のうち P と異なる点を Q とする．以下の問に答えよ.

(1) 接線 l_2 の方程式を求めよ.

(2) 直線 l_3 の方程式を求めよ.

(3) 線分 PQ の長さを t を用いて表せ.

(4) t が $t>0$ の範囲を動くとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ.

(17 岐阜大学 後期 医・工・教育学部 1)

9.3 極値，グラフ

392. a, b, c を実数とし，β, m をそれぞれ $0<\beta<1$, $m>0$ を満たす実数とする．また，関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\beta$, $-\beta$ で極値をとり，$f(-1)=f(\beta)=-m$，$f(1)=f(-\beta)=m$ を満たすとする.

(1) a, b, c, および β, m の値を求めよ.

(2) 関数 $g(x)=x^3+px^2+qx+r$ は，$-1 \leqq x \leqq 1$ に対して $f(-1) \leqq g(x) \leqq f(1)$ を満たすとする．$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくとき，$h(-1)$, $h(-\beta)$, $h(\beta)$, $h(1)$ それぞれと 0 との大きさを比較することにより，$h(x)$ を求めよ.

(17 筑波大学 2)

9.4 最大・最小

393. t を正の実数とする．$f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$ とおく．以下の問に答えよ.

(1) $2t^3-3t^2+1$ を因数分解せよ.

(2) $f(x)$ が極小値 0 をもつことを示せ.

(3) $-1 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値 m と最大値 M を t の式で表せ.

(17 神戸大学 文系 1)

394. 3 次式 $f(x) = x(x-1)(x-2)$ に対して，関数 $g(x) = \log_{27} f(x)$ を $0 < x < 1$ の範囲で定義する．このとき

$$f\left(\frac{2}{5}\right) = \boxed{①}, \quad g\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{3} + \boxed{②}\log_3 2 - \log_3 5$$

である．定義域を実数全体とする関数 $f(x)$ は，$x = \boxed{③}$ のとき極大値をとり，$x = \boxed{④}$ のとき極小値をとる．$g(x)$ の $0 < x < 1$ における最大値を M とすると，$M = \boxed{⑤}\log_3 2 - \dfrac{1}{2}$ であり，$M > g\left(\dfrac{2}{5}\right)$ である．3 つの実数 $\sqrt{6}$, $3^{\frac{5}{6}}$, $\dfrac{5}{2}$ のうち最も大きな数は $\boxed{⑥}$ である．

(17 関西大学 文系 (全学部 2/7) 3)

395. $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) $\log(\sin x) + \log(\cos x)$ の最大値を求めよ．

(2) $\log(\sin x) - 2\log(\sin 2x)$ の最小値を求めよ．

(17 兵庫県立大学 工学部 1)

◇396. $a > 0$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(t) = t^3 - 2at + 1$ の区間 $t \geqq 0$ における最小値を，a を用いて表せ．

(2) (1) で求めた最小値が 0 となるときの a の値を A とおく．A^3 を求めよ．

(3) 座標平面上の曲線 $y = x^4$ を C_1，点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする．C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ．

(4) 座標平面において，点 P が曲線 $y = x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0,\ a)$ の距離の最小値を考える．その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ．

(17 広島大学 理・工・生物生産・医・歯・薬・教育・総合科学部 2)

9.5 方程式への応用

397. t を 0 以上の実数とし，O を原点とする座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ で 3 つの条件

$$\mathrm{PQ} = 2, \quad p < q, \quad p + q = \sqrt{t}$$

をみたすものを考える．$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を S とする．ただし，点 P または点 Q が原点 O と一致する場合は $S = 0$ とする．

(1) p と q をそれぞれ t を用いて表せ.
(2) S を t を用いて表せ.
(3) $S = 1$ となるような t の個数を求めよ.

(17 千葉大学 教育・先進・理・薬・工・理学部 8)

398. n を自然数とする．a_0，a_1，$\cdots$，a_n を実数とし，a_n は正であるとする．(補足説明 :「$\underline{a_n}$ は正である」の a_n は「a_0，a_1，$\cdots$，$\underline{a_n}$」 において下線をつけた特定の a_n をさす．) このとき，関数

$$f(x) = a_n \cos nx + a_{n-1} \cos(n-1)x + \cdots + a_1 \cos x + a_0$$

の絶対値 $|f(x)|$ の最大値が a_n 以上であることを示したい．次の問いに答えよ.

(1) 3 次多項式 $T_3(X)$ を

$$T_3(X) = 4X^3 - 3X$$

とおくと，次の恒等式

$$\cos 3x = T_3(\cos x)$$

が成り立つことを示せ．また各自然数 n に対して，恒等式

$$\cos nx = T_n(\cos x)$$

が成り立つような X の n 次多項式 $T_n(X)$ が存在することを示せ.

(2) 関数 $|f(x)|$ の最大値が a_n より小さいと仮定すると，$a_n \cos(k\pi) - f\left(\dfrac{k}{n}\pi\right)$ の値は，k が偶数であるとき正，k が奇数であるとき負であることを示せ.

(3) (2) の仮定のもとで，方程式 $a_n \cos(nx) - f(x) = 0$ は区間 $[0,\ \pi]$ において少なくとも n 個の解を持つことを証明せよ.

(4) 実数 b_0，b_1，$\cdots$，b_{n-1} によって

$$a_n \cos nx - f(x) = b_{n-1}(\cos x)^{n-1} + b_{n-2}(\cos x)^{n-2} + \cdots + b_1 \cos x + b_0$$

と表せることを証明せよ.

(5) 設問 (3)，(4) の結論から矛盾が導かれることを示し，$|f(x)|$ の最大値が a_n 以上であることを示せ.

(17 お茶の水女子大学 後期 理学部 (数学・情報科学) 2)

♦399. 3 次の整式 $f(x) = x^3 + x^2 + px + q$ (ただし，$p \neq q$，$q \neq 0$)，および $g(x) = \dfrac{-1}{x+1}$ が次の条件 $(*)$ をみたすとする.

$(*)$　$f(x) = 0$ の任意の解 α に対して $g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解である.

次の問に答えよ.

(1) p, q の値を求めよ.

(2) $f(x)=0$ は $-2<x<2$ の範囲に 3 つの実数解をもつことを示せ.

(3) $f(x)=0$ の任意の解を $2\cos\theta$ とするとき，$2\cos 2\theta$, $2\cos 3\theta$ も解であることを示せ.

(4) $2\cos\theta$ $(0<\theta<\pi)$ が $f(x)=0$ の解であるとき，θ の値を求めよ.

(17 早稲田大学 基幹・創造・先進理工学部 5)

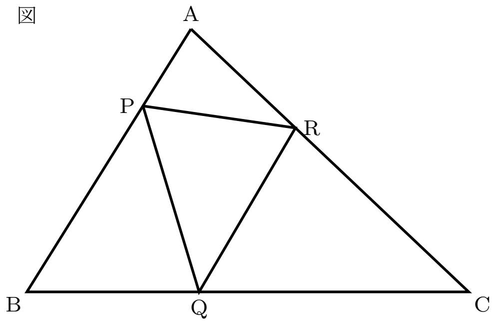
400. 図のような $\triangle$ABC の形をした土地があり，その土地開発を次のように計画している.

辺 AB を $\alpha:(1-\alpha)$ に内分する点を P，辺 BC を $\beta:(1-\beta)$ に内分する点を Q，辺 CA を $\gamma:(1-\gamma)$ に内分する点を R とする．図のように，$\triangle$ABC の中心部に全体の 25 % の面積を占める $\triangle$PQR の庭園と，その庭園を囲むように，商業施設建設のための 3 つの三角形の土地をつくる．ただし，$\alpha+\beta+\gamma=1$, $0<\alpha<\beta<\gamma<1$ を満たすようにする.

$\triangle$ABC，$\triangle$BPQ，$\triangle$CRQ，$\triangle$APR の面積をそれぞれ S, S_1, S_2, S_3 とすると，$\dfrac{S_1}{S}=\boxed{\text{ア}}$，$\dfrac{S_2}{S}=\boxed{\text{イ}}$，$\dfrac{S_3}{S}=\boxed{\text{ウ}}$ である．このとき，各三角形の面積の関係により，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\boxed{\text{エ}}$ が成立する.

$\alpha\beta\gamma=k$ とおくと，α, β, γ は，方程式 $x^3-\boxed{\text{オ}}x^2+\boxed{\text{カ}}x-k=0$ の実数解であるので，k のとりうる範囲は，$0<k<\boxed{\text{キ}}$ である．このとき，α, β, γ は，$0<\alpha<\boxed{\text{ク}}<\beta<\boxed{\text{ケ}}<\gamma<\boxed{\text{コ}}$ を満たしている.

図



(17 立命館大学 文系 (全学統一 2/2) 2)

◊401. a を整数とする．x に関する方程式

$$4x^3-(a+9)x-2(a-2)=0$$

について，次の問いに答えよ.

(1) 実数 k が解であるとき，a を k を用いて表せ.

(2) 少なくとも 1 つの解が自然数となるような a の値をすべて求めよ．

(3) 少なくとも 1 つの解が整数ではない正の有理数となるような a の値を求めよ．

(17 滋賀大学 教育・経済学部 1)

°402.　3 次方程式 $4x^3-4x^2+x-k=0$ が異なる 3 個の実数解をもつように，定数 k の値の範囲を定めよ．

(17 福井大学 工学部 1(3))

403.　a を実数とする．3 次方程式 $x^3-7x^2+15x-a=0$ が異なる 3 個の実数解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha<\beta<\gamma)$ を持つとする．次の問いに答えよ．

(1) 実数 a の取り得る値の範囲を求めよ．

(2) $1<\alpha$ かつ $\beta<3<\gamma$ となることを示せ．

(3) $\alpha+\beta=\gamma$ となるような a の値およびそのときの γ の値を求めよ．

(4) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を 3 辺の長さとする三角形が存在するための a についての条件を求めよ．

(17 お茶の水女子大学 理学部 (数学) 3)

§10　積分 (1)

10.1　定積分で表された関数

404.　$f(a)=\displaystyle\int_{-1}^{1}|x^3-x^2-a^2x+a^2|\,dx$ とおくとき，以下の問いに答えよ．ただし，$a\geqq 0$ とする．

(1) $x^3-x^2-a^2x+a^2=0$ となる x を求めよ．

(2) $f(a)$ を a を用いて表せ．

(3) $f(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

(17 福井大学 教育・国際地域学部 5)

405.　x について 1 次以上の整式で表される関数 $f(x),\ g(x)$ が

$$\begin{cases} f(x)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\{(x-t)f(t)+g(t)\}\,dt \\ g(x)=\left(\displaystyle\int_{-1}^{1}xf(t)\,dt\right)^2 \end{cases}$$

また，$g(x)$ の項のうち次数が最も高い項の係数は $\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ ある．また，$g(x)$ の項のうち次数が最も高い項の係数は $\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である．

(17 早稲田大学 スポーツ科学部 5)

406. 次の 2 つの条件をみたす x の 2 次式 $f(x)$ を考える．

(i) $y=f(x)$ のグラフは点 $(1,\ 4)$ を通る．

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 15$.

以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ の 1 次の項の係数を求めよ．

(2) 2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，α と β のみたす関係式を求めよ．

(3) (2) における $\alpha,\ \beta$ がともに正の整数となるような $f(x)$ をすべて求めよ．

(17 神戸大学 文系 2)

°407. p を実数の定数とする．関数 $f(x)$ が等式

$$\int_{p}^{x} f(t)\,dt + 2p + 3 = x^2 + 4x + 2$$

を満たすとき，$f(x) = \boxed{\text{か}}$ である．また，上の等式を満たす定数 p のうち，$p>0$ であるものは $p=\boxed{\text{き}}$ である．

(17 茨城大学 後期 工学部 1(4))

408. $a,\ b$ を実数とし，関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2-b)x + \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$$

を満たすとする．

(1) $f(0)$ の値を a を用いて表せ．

(2) 関数 $f(x)$ が $x>1$ の範囲で極大値を持つとする．このような $a,\ b$ が満たす条件を求めよ．また，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ．

(17 北海道大学 文系 4)

10.2　面積

409.　$a>0$ とし，放物線 $C: y=a(x-1)^2+1$ を考える．C 上の点 P における C の接線 l の方程式を $y=Ax+B$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) P の x 座標を s とするとき，A と B を a と s を用いて表せ．

(2) 接線 l は，原点 O(0, 0) を通り，傾きは正であるとする．このとき，l の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた接線 l と放物線 C および y 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ．

(4) $\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

(17 金沢大学 人間社会学域 3)

410.　$f(x)=4ax-x^2$，$g(x)=\dfrac{a^2}{3}x^2$ とする．ただし，$a>0$ とする．$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点を P_1，P_2 $(\mathrm{P}_1<\mathrm{P}_2)$ とし，囲まれた面積を $h(a)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) P_1，P_2 の座標を求めよ．

(2) $h(a)$ の最大値とそのときの a の値を求めよ．

(17 東京女子医科大学 医学部 1)

所見：$P_1<P_2$ という表記はないだろう．

411.　定数 $a<1$ に対し，放物線 $C_1: y=2x^2+1$，$C_2: y=-x^2+a$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 放物線 C_1，C_2 の両方に接する 2 つの直線の方程式をそれぞれ a を用いて表せ．

(2) C_1 と (1) で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_1，C_2 と (1) で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ．

(17 九州大学 文・教育・法・経済・医 (看護) 学部 1)

412.　実数 a，b が $0<a<b$，$a<b^3$ を満たすとき，曲線 $C_1: y=ax^2$ $(x \geqq 0)$，曲線 $C_2: y=bx^2$ $(x \geqq 0)$ について，次の問に答えよ．

(1) 曲線 C_1 と直線 $x=b$，および x 軸で囲まれた部分の面積を S_1，曲線 C_2 と直線 $y=a$，および y 軸で囲まれた部分の面積を S_2 とするとき，S_1，S_2 をそれぞれ a，b を用いて表せ．

(2) $S_1=S_2$ となるとき，a を b を用いて表せ．

(3) x 座標が b である曲線 C_1 上の点を P_1，y 座標が a である曲線 C_2 上の点を P_2 とする．曲線 C_1 と C_2，および直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ で囲まれた部分の面積を S_3 とする．$S_1 = S_2$ となるとき，S_3 を b を用いて表せ．

(4) $S_1 = S_2 = S_3$ となるとき，a，b の値を求めよ．

(17 香川大学 医学部 4 教育・農・法学部 7)

413. x の関数 $F(x)$ を

$$F(x) = |x+1| + \int_{-1}^{x} (1 - |t|)\,dt$$

によって定める．

(1) x の値について場合分けをして，それぞれの場合に $F(x)$ を x の整式で表せ．

(2) 曲線 $y = F(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) 曲線 $y = F(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ F(a))$，$\mathrm{B}(b,\ F(b))$ を通る直線の傾きを m とする．ただし，$a < b$ とする．A，B を結ぶ線分の中点が $\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$ であるとき，b と m のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ．

(17 慶應義塾大学 経済学部 6)

414. a を実数とする．xy 平面上の曲線 C を $y = x^3 + (a-4)x^2 + (-4a+2)x - 2$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 曲線 C は，a の値に関係なく 2 定点を通る．その定点を A，B とするとき，点 A と点 B の座標を求めよ．

(2) 曲線 C が点 A，点 B とは異なる点で線分 AB と交わる a の範囲を求めよ．

(3) a が (2) で求めた範囲にあるとき，線分 AB と曲線 C で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(4) (3) の S について，S の最小値とそのときの a の値を求めよ．

(17 岐阜大学 教育・医 (看護)・地域科学・応用生物科学部 4)

415. 曲線 $C : y = x^3$ の点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ $(t > 0)$ における接線を l とし，l と C とのもう一方の交点を Q とする．

(1) l の方程式を求めよ．

(2) Q の座標を求めよ．

(3) l と C とで囲まれた図形の面積が 3 であった．このときの t を求めよ．

(17 三重大学 教育・生物資源・人文学部 6)

416. 放物線 $y=-x^2+2ax+2b$ を C とする．放物線 $y=x^2$ と C によって囲まれた部分の面積が 9 となるような 2 つの実数の組 $(a,\ b)$ 全体の集合を X とおくとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $(3,\ 0)$ が X に属することを示しなさい．

(2) $(a,\ b)$ が X に属するとき，b を a の 2 次式として表しなさい．

(3) $(a,\ b)$ が X の要素全体を動くとき，点 $(1,\ 1)$ と C の頂点を結ぶ線分の中点 M の軌跡を求めなさい．

(17 首都大学東京 後期 都市教養・都市環境・システムデザイン学部 1)

◇**417.** xy 平面上に x の関数 $f(x)=x|x-a|-x$ のグラフ $y=f(x)$ がある．

$S(a)$ は，$y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形のうち，$0 \leqq x \leqq 1$ を満たす部分の総面積とする．ただし，a は $a \geqq 0$ とする．

(1) $0 \leqq x \leqq a+1$ における $f(x)$ の最小値は，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき $\dfrac{\boxed{(50)(51)}}{\boxed{(52)(53)}}$ であり，$a=\dfrac{3}{2}$ のとき $\dfrac{\boxed{(54)(55)}}{\boxed{(56)}}$ である．

(2) a が $0 \leqq a \leqq 1$ を満たすとき，$0 \leqq x \leqq a+1$ における $f(x)$ の最小値を a の式で表すと

$$\frac{\boxed{(57)(58)}}{\boxed{(59)}}a^2-\frac{\boxed{(60)}}{\boxed{(61)}}a-\frac{\boxed{(62)}}{\boxed{(63)}}$$

である．

(3) a が $0 \leqq a \leqq 1$ を満たすとき，$S(a)$ を a の式で表すと

$$\frac{\boxed{(64)(65)}}{\boxed{(66)}}a^3+\frac{\boxed{(67)}}{\boxed{(68)}}a+\frac{\boxed{(69)}}{\boxed{(70)}}$$

である．

(4) a が $0 \leqq a \leqq 2$ を満たすとき，$S(a)$ は $a=\dfrac{\boxed{(71)}+\sqrt{\boxed{(72)}}}{\boxed{(73)}}$ で最小になる．

(17 慶應義塾大学 薬学部 4)

418. 座標平面において 2 つの放物線 $A: y=s(x-1)^2$ と $B: y=-x^2+t^2$ を考える．ただし $s,\ t$ は実数で，$0<s,\ 0<t<1$ をみたすとする．放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし，放物線 B の $x \geqq 0$ の部分と x 軸

および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする．A と B がただ 1 点を共有するとき，$\dfrac{Q}{P}$ の最大値を求めよ．

(17 東京大学 文科 1)

419. a, b, c を正の整数，α を有理数とする．2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx - c$ に対して

$$\int_0^{1+\sqrt{2}} f(x)\,dx = -\alpha - (\alpha + 3)\sqrt{2}$$

が成り立つとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) p, q, r, s を有理数とする．$p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$ のとき，$p = r$ かつ $q = s$ であることを示せ．ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いてよい．

(2) a, b の値を求め，c を α を用いて表せ．

(3) $f(\alpha) = 0$ のとき，α の値を求めよ．

(4) (3) で求めた α について，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線を ℓ とする．このとき，曲線 $y = f(x)$ と接線 ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(17 静岡大学 理 (生物・地球)・教育・農学部 1)

420. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減表をかけ．

(2) $a > 0$ とする．直線 $y = a^2x$ と曲線 $y = |f(x)|$ の共有点の個数が 3 個であるとき，a の取り得る値の範囲を求めよ．

(3) a の値が (2) で求めた範囲にあるとする．直線 $y = a^2x$ と曲線 $y = |f(x)|$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 $S(a)$ を求めよ．

(17 関西学院大学 文系 (全学 2/1) 3)

421. a を定数として，$f(x) = x^2 - ax - \dfrac{a^2}{4}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸との共有点のうち，その x 座標が 0 以上のものを A とおく．曲線 $y = f(x)$ 上の点 A における接線の方程式を求めよ．

(2) $a > 0$ のとき，(1) で求めた接線と曲線 $y = f(x)$ および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) $a > 0$ のとき，連立不等式

$$y \leqq -2x^2, \quad y \geqq f(x), \quad x \geqq 0$$

の表す領域を D とする．D の面積を求めよ．

(17 宮城教育大学 教育学部 (中等教育・初等教育・特別支援) 3)

422. $f(x)=x^2$, $g(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+d$ に対し，2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共通接線の方程式を $y=l(x)$ とする．以下の問に答えなさい．

(1) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の座標を d を用いて表しなさい．また，$x=a$ における $y=f(x)$ の接線の方程式を求めなさい．

(2) $l(x)$ を d を用いて表しなさい．

(3) 2 つの放物線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ と共通接線 $y=l(x)$ で囲まれる領域の面積 S は，d の値に依存しないことを示しなさい．

(17 兵庫県立大学 経済・経営学部 2)

423. a, b は実数で，$a>0$ とする．放物線 $C_1: y=2-x^2$ と放物線 $C_2: y=x^2+2ax+b$ は 2 つの共有点 P，Q をもつとする．ただし，P の x 座標 x_{P} と Q の x 座標 x_{Q} は $x_{\mathrm{P}}<x_{\mathrm{Q}}$ を満たす．このとき，次の各問に答えよ．

(1) a, b の条件を求めて，それを ab 平面上に図示せよ．

(2) 点 P における C_1 の接線と点 Q における C_2 の接線は平行であることを示せ．

(3) $b=a^3-3a^2-6a+3$ のとき，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積の最大値を求めよ．また，そのときの a の値を求めよ．

(17 茨城大学 教育学部 1)

424. p を正の実数とする．放物線 $y=px^2$ を C_1，放物線 $y=-px^2+2px+\dfrac{1}{2p}$ を C_2 とし，C_1 と C_2 の 2 つの交点を A，B とする．ただし，A の x 座標を a，B の x 座標を b としたとき，$a<b$ である．また，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 A における C_1 の接線と C_2 の接線は垂直であることを示せ．また，点 B における C_1 の接線と C_2 の接線も垂直であることを示せ．

(2) S を p を用いて表せ．

(3) p がすべての正の実数を動くとき，$p=\tan\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくことにより，S の最小値を求めよ．

(17 大阪府立大学 現代システム科学・生命環境科学・地域保健学域 6)

425. 曲線 $y=x^3-4x+1$ を C とする．直線 l は C の接線であり，点 P(3, 0) を通るものとする．また，l の傾きは負であるとする．このとき，C と l で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(17 京都大学 文系 (総合人間・文・教育・法・経済学部) 1)

°426. 正の実数 h と関数 $f(x)=x^4$ に対し，以下の問いに答えなさい．

(1) $F(h)=\displaystyle\int_{1-h}^{1+h} f(x)\,dx$ を h の整式として表しなさい．

(2) 放物線 $y=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ が 3 点

$$(1-h,\ f(1-h)),\ (1,\ f(1)),\ (1+h,\ f(1+h))$$

を通るとき，c の値を求めなさい．また，a と b を h の整式としてそれぞれ表しなさい．

(3) (2) で求めた $a,\ b,\ c$ に対して，$G(h)=\displaystyle\int_{1-h}^{1+h}\{a(x-1)^2+b(x-1)+c\}\,dx$ を h の整式として表しなさい．

(4) (1) の $F(h)$ と (3) の $G(h)$ に対して，$\dfrac{F(h)-G(h)}{h^5}$ を求めなさい．

(17 首都大学東京 都市教養学部 4)

°427. 関数 $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$ について，方程式 $f(x)=0$ の解は，$x=\boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{ス}},\ \boxed{\text{セ}}$ である．ただし，$\boxed{\text{シ}}<\boxed{\text{ス}}<\boxed{\text{セ}}$ とする．

このとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{ソ}}$ である．

(17 立命館大学 文系 (全学統一 2/2) 1(3))

428. $P(x)$ を整式とし，整式 $Q(x)$ を $Q(x)=\displaystyle\int_1^x P(t)\,dt$ で定める．$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りは 2 であった．次の問いに答えよ．

(1) $Q'(1)$ の値を求めよ．

(2) $Q(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

(3) $Q(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りは 3 であった．$Q(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ．

(17 福岡教育大学 中等教育 (数学) 3)

429. 座標平面上の放物線 $y=-ax^2+b$ を C とし，P(1, 0)，Q(0, 2) とする．ただし，$a>0,\ 0<b<2$ とする．放物線 C は，2 点 P，Q を通る直線に接している．放物線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする．次の問いに答えよ．

(1) a を b で表せ．

(2) S を b を用いて表せ．

(3) $\dfrac{S}{\sqrt{b}}$ が最大になるように b の値を定めよ。

(17 新潟大学 人文・教育・経済・農・創生 4)

430.　放物線 $y=-x^2+x+2$ を C とし，C と x 軸との 2 つの交点を A，B とする．ただし，A の x 座標は B の x 座標より小さいとする．また，点 P は C 上を A から B まで動く．P が A，B と異なるとき，次の問いに答えよ．

(1) △PAB の面積が最大になるとき，P の座標および △PAB の面積を求めよ．

(2) 放物線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする．△PAB の面積が $\dfrac{S}{3}$ となる P の座標をすべて求めよ．

(3) 直線 $y=-2x+5$ を l とする．P と l の距離が最小になるとき，P の座標および P と l の距離を求めよ．

(17 愛媛大学 工・教育・農学部 2)

◇431.　$b,\ c$ を実数とする．2 次関数 $f(x)=-x^2+bx+c$ が

$$0 \leqq f(1) \leqq 2, \quad 5 \leqq f(3) \leqq 6$$

を満たすとする．

(1) $f(4)$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標 q のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標が 6 のとき，放物線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(17 大阪大学 理系 4)

◦432.　$b,\ c$ を実数，q を正の実数とする．放物線 $P: y=-x^2+bx+c$ の頂点の y 座標が q のとき，放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いてあらわせ．

(17 大阪大学 文系 1)

433.　$a>0$ に対して，関数 $f(x)=x^3-ax+a$，$g(x)=(x+a)^3$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点の個数が 2 個となるための a のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) a が (2) で求めた範囲にあるとき，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフで囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ．

(4) a が (2) で求めた範囲を動くとき，$\dfrac{S(a)}{a}$ の最大値とそのときの a の値を求めよ．

(17 同志社大学 文系 (全学部 2/5) 2)

°434. 関数 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+x$ を考える．ここで，a, b は実数とする．今，曲線 $y=f(x)$ が，ある直線 l に 2 点で接しており，その 2 つの接点の x 座標が -1 と 1 であることがわかっている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 定数 a, b の値と，直線 l の方程式を求めよ．

(2) 直線 l と同じ傾きを持ち，曲線 $y=f(x)$ と接する直線が l の他にもう 1 つある．その直線の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた直線と曲線 $y=f(x)$ とにより囲まれた領域のうち x 座標が 0 以上の部分の面積を求めよ．

(17 お茶の水女子大学 文教育・生活科学部 5)

°435. 原点を O とする xy 平面上にある放物線 $C: y=ax^2$ $(a>0)$ 上に点 P をとり，原点 O と点 P を結ぶ線分 OP の中点を Q とする．ただし，点 P が原点にあるとき，点 Q は原点とする．次の問いに答えよ．

(1) y 座標が 100 となる点 P の x 座標を求めよ．

(2) 点 P が放物線 C 上を動くとき，点 Q の軌跡を表す方程式を求め，図示せよ．

(3) 点 P の x 座標を x_1 $(x_1>0)$ とし，対応する点 Q の x 座標を x_2 とする．放物線 C と直線 $x=x_1$ と x 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とし，(2) で求めた点 Q の軌跡と直線 $x=x_2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする．このとき，$S_1:S_2$ を求めよ．

(17 秋田大学 教育文化・国際資源学部 4)

436. $f(x)=-x^2+2x+6|x|$ とする．以下の問いに答えなさい．

(1) $y=f(x)$ のグラフをかきなさい．

(2) a, b を $a<0<b$ となる実数とする．曲線 $y=f(x)$ の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線と点 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$ における接線が一致するとき，a, b の値を求めなさい．

(3) a, b を上の (2) で求めた値とし，2 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ を通る直線を ℓ とする．このとき，直線 ℓ の方程式を求めなさい．

(4) 直線 ℓ を上の (3) で求めたものとする．このとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 ℓ で囲まれた図形の面積 S を求めなさい．

(17 慶應義塾大学 看護医療学部 5)

◊437. a を正の定数とする．2 次関数 $f(x)=ax^2$ と 3 次関数 $g(x)=x(x-4)^2$ について，次の問に答えよ．

(1) 関数 $y=g(x)$ について，極値を求め，そのグラフを描け．

(2) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わることを示せ．

(3) 2つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた2つの部分の面積が等しくなるように a の値を定めよ．またそのとき，2つの曲線の交点の x 座標を求めよ．

(17 名古屋大学 文・教育・法・経済・情報学部 1)

438. 放物線 $C: y=x^2$ 上に2点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$ と $\mathrm{B}(2,\ 4)$ をとる．放物線 C 上の点 P は，2点 A と B の間を動くものとする．座標平面の原点を O とするとき，次の問いに答えよ．

(i) $\angle\mathrm{APB}=90$ 度となるような点 P の x 座標は $\boxed{テ}$ である．

(ii) $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ となるような点 P の x 座標は $\boxed{ト}$ である．

(iii) 曲線 C と線分 AP で囲まれる図形と，曲線 C と線分 BP で囲まれる図形の面積の和が最小となるような点 P の x 座標は $\boxed{ナ}$ である．

(iv) $\tan\angle\mathrm{OAP}=\dfrac{1}{2}$ となるような点 P の x 座標は $\boxed{ニ}$ である．

(17 早稲田大学 国際教養学部 3(3))

439. 中心 $(0,\ a)$，半径 r の円が放物線 $y=x^2$ と2点で接するとき，$a>\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ が成り立つ．また，2つの各接点における接線と放物線で囲まれる図形の面積が18であるとき，$a=\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$，$r=\dfrac{\sqrt{\boxed{ナ}}}{\boxed{ニ}}$ である．

(17 早稲田大学 スポーツ科学部 4)

440. 座標平面上の二つの曲線

$$C_1: y=4x^3-1,\quad C_2: y=x^3$$

を考える．$a>0$ に対して，x 座標が a である C_1 上の点を A とし，A における C_1 の接線を ℓ とする．次の問いに答えよ．

(1) C_1 と C_2 の交点の x 座標を P とする．p の値を求めよ．

(2) 直線 ℓ の方程式を，a を用いて表せ．

(3) 直線 ℓ が C_2 に接するとき，a の値を求めよ．

(4) (3) のとき，直線 ℓ と C_2 の接点を B とする．C_1, C_2 と線分 AB で囲まれた図形の面積を求めよ．

(17 広島大学 経済・教育学部 4)

441. α, β を実数とする．xy 平面上に放物線 $C_1: y=-\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}x-6$ と点 $\mathrm{A}(0,\ 6)$ を中心とする円 C_2 がある．C_1 と C_2 が共有点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ を通る共通の

接線をもつとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha=-2\sqrt{3},\ \beta=0$ となることを示せ．

(2) $C_1,\ C_2$ および半直線 $l: x=0\ (y<0)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(17 京都府立大学 生命環境学部 2)

442. 座標平面上に 2 つの放物線 $C_1: y=x^2,\ C_2: y=4(x-1)^2$ がある．$t \leqq \dfrac{2}{3}$ を満たす実数 t に対し，座標平面上において次の 2 つの条件を満たす部分の面積を $S(t)$ とする．

(a) $t \leqq x \leqq t+1$

(b) $x^2 \leqq y \leqq 4(x-1)^2$ または $4(x-1)^2 \leqq y \leqq x^2$

このとき，次の各問に答えよ．

(1) 放物線 $C_1,\ C_2$ の交点の x 座標 $\alpha,\ \beta$ (ただし，$\alpha<\beta$) を求めよ．

(2) $t \leqq -\dfrac{1}{3}$ のとき，$S(t)$ を，t を用いて表せ．さらに，関数 $S(t)$ は $t \leqq -\dfrac{1}{3}$ において減少することを示せ．

(3) $-\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき，$S(t)$ を，t を用いて表せ．
さらに，関数 $S(t)$ $\left(-\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\right)$ が最小となる t の値を求めよ．

(17 宮崎大学 教育・農学部 12)

°443. $a,\ b$ を実数とし，$a>0$ とする．$f(x)=ax^2+b,\ g(x)=|x+1|+|x-1|$ とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $g(x)=6$ をみたす x の値をすべて求めなさい．

(2) $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフがちょうど 3 点で接するような $a,\ b$ の値を求めなさい．

(3) $a,\ b$ が (2) で求めた値のとき，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフで囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めなさい．

(17 首都大学東京 都市教養学部 (文系) 3)

444. a を定数とし，$f(x)=ax^3-(2a-1)x^2-(a+4)x+2a+3$ とする．曲線 $C: y=f(x)$ は a の値に関わらず 3 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{R}(x_3,\ y_3)$ を通る．ただし，$x_1<x_2<x_3$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 P，Q，R の座標をそれぞれ求めよ．

(2) $f(x)$ が極値をもつような a の値の範囲を求めよ．

(3) $a=1$ のとき，線分 PQ と曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ．

(17 滋賀大学 教育・経済学部 4)

445. $p,\ q$ を実数とする．関数 $f(x) = x^2 + px + q$ の $-1 \leqq x \leqq 2$ における最小値が 0 以上となる点 $(p,\ q)$ 全体からなる領域を D とする．以下の問いに答えよ．

(1) pq 平面上に領域 D を図示せよ．

(2) D の点 $(p,\ q)$ で $q \leqq 5$ を満たすもの全体のなす図形の面積を求めよ．

(17 東北大学 文・教育・法・経済・医 (看護) 学部 2)

446. 曲線 $C : y = x^3 + 1$ と直線 $l_1 : y = 3x - 1$ が接する点を P とする．点 P を通り，P 以外の点 Q で C と接する直線を l_2 とする．次の問いに答えよ．

(1) 直線 l_2 の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C と直線 l_1 の共有点で点 P 以外の点を R とする．$l_1,\ l_2$ および C のうち Q から R までの部分によって囲まれた図形の面積を求めよ．

(17 名古屋市立大学 経済学部 6)

10.3 体積

447. 放物線 $C : y = 2x - x^2$ と直線 $l : y = ax$ について，定数 a が $0 < a < 2$ の範囲にあるとき，次の問いに答えよ．

(1) 放物線 C と直線 l で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ．

(2) 直線 l が，放物線 C と x 軸とで囲まれた部分の面積を二等分するときの a の値を求めよ．

(17 岩手大学 教育・農・人文社会科学部 4(ア))

10.4 微積混合

448. 関数 $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{9}{16}x$ の導関数を $f'(x)$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減，極値を調べ，そのグラフをかけ．

(2) a を正の定数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^a |f'(x)|\,dx$ を a 用いて表せ．

(17 宮城教育大学 教育学部 (初等教育・特別支援) 4)

449.

O を原点とする座標平面上の放物線 $y = x^2 + 1$ を C とし，点 $(a,\ 2a)$ を P とする．

(1) 点 P を通り，放物線 C に接する直線の方程式を求めよう．
C 上の点 $\left(t,\ t^2+1\right)$ における接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{ア}}tx - t^2 + \boxed{\text{イ}}$$

である．この直線が P を通るとすると，t は方程式

$$t^2 - \boxed{\text{ウ}}at + \boxed{\text{エ}}a - \boxed{\text{オ}} = 0$$

を満たすから，$t = \boxed{\text{カ}}a - \boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{ク}}$ である．よって $a \neq \boxed{\text{ケ}}$ のとき，P を通る C の接線は 2 本あり，それらの方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{コ}}a - \boxed{\text{サ}}\right)x - \boxed{\text{シ}}a^2 + \boxed{\text{ス}}a \qquad \cdots\cdots ①$$

と

$$y = \boxed{\text{セ}}x$$

である．

(2) (1) の方程式①で表される直線を ℓ とする．ℓ と y 軸との交点を $\mathrm{R}(0,\ r)$ とすると，$r = -\boxed{\text{シ}}a^2 + \boxed{\text{ス}}a$ である．$r > 0$ となるのは，$\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のときであり，このとき，三角形 OPR の面積 S は

$$S = \boxed{\text{チ}}\left(a^{\boxed{\text{ツ}}} - a^{\boxed{\text{テ}}}\right)$$

となる．

$\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のとき，S の増減を調べると，S は $a = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ をとることがわかる．

(3) $\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のとき，放物線 C と (2) の直線 ℓ および 2 直線 $x = 0$, $x = a$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}a^3 - \boxed{\text{ヒ}}a^2 + \boxed{\text{フ}}$$

である．$\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \leqq a < \boxed{\text{タ}}$ の範囲において，T は $\boxed{\text{ヘ}}$．$\boxed{\text{ヘ}}$ に当てはまるものを，次の⓪〜⑤のうちから一つ選べ．

⓪ 減少する
① 極小値をとるが，極大値はとらない
② 増加する
③ 極大値をとるが，極小値はとらない

④ 一定である　⑤ 極小値と極大値の両方をとる

(17 年 センター本試験 II・B 第 2 問)

450. 曲線 $y=x^3$ 上に点 $\mathrm{P}\left(a,\ a^3\right)$ をとる．ただし $0<a<2$ とする．また，原点と P と点 $(2,\ 8)$ の 3 点を通る放物線を $y=f(x)$ とする．

(1) $f(x)$ を a を用いて表せ.

(2) $x^3>f(x)$ となる x の範囲を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^2 |x^3-f(x)|\,dx$ を求めよ.

(4) (3) の積分の値を最小にする a の値を求めよ.

(17 三重大学 教育・生物資源・人文学部 5)

451. 曲線 $C: y=x^3+x^2-2x$ と直線 $L: y=px+q$ について，次の問いに答えよ．ただし，$p,\ q$ は実数とする．

(1) $p=1,\ q=-1$ のとき，曲線 C と直線 L の共有点は 3 個存在し，その x 座標の値は $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ である．ただし，$\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{イ}} < \boxed{\text{ウ}}$ とする.

(2) $q=0$ のとき，

(a) 曲線 C と直線 L が接する場合，p の値は $\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ となる．ただし，$\boxed{\text{エ}} < \boxed{\text{オ}}$ とする.

(b) 曲線 C と直線 L の共有点が 1 個しか存在しないための条件は，p を用いて表すと，$\boxed{\text{カ}}$ となる.

(3) $p=-1$ のとき，

(a) 曲線 C と直線 L が接する場合，q の値は $\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ となる．ただし，$\boxed{\text{キ}} > \boxed{\text{ク}}$ とする.

(b) q の値が $\boxed{\text{キ}}$ の場合，曲線 C と直線 L で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{ケ}}$ となる.

(c) q の値が $\boxed{\text{ク}}$ の場合，曲線 C と直線 L で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{コ}}$ となる.

(17 立命館大学 薬学方式 (2/2) 2)

10.5 その他

452. A 社は工場 F_A で商品 P_A を製造している．商品 P_A の製造費用を表す変数は，製造量 x の関数であるとする．この関数を $c(x)$ で表す．以下の分析を容易にするため，$c(x)$ は区間 $x \geqq 0$ を定義域とする関数とし，$c(0) = 0$ とする．また，正の実数 u に対して，関数 $c(x)$ の $x = u$ における微分係数が定まるとし，その値を $x = u$ における限界費用といい，$m(u)$ で表す．さらに，$a(x) = \dfrac{c(x)}{x}$ と定め，正の実数 u に対して，$a(u)$ を $x = u$ における平均費用という．ここで，

$$m(x) = x^2 - 8x + 17 \qquad \cdots\cdots ①$$

であることがわかったとする．

(i) 区間 $x > 0$ において，限界費用が最小となる製造量を x_m で表すと $x_m = \boxed{(14)}$ であり，平均費用が最小となる製造量を x_a で表すと $x_a = \boxed{(15)}$ である．

(ii) $\displaystyle\int_{x_m}^{x_a+1} |m(x) - a(x)|\, dx = \frac{\boxed{(16)\,(17)}}{\boxed{(18)}}$ である．

(iii) この問いでは，限界費用 $m(x)$ を特定する式①は仮定しないことにする．その場合でも，ある $\overline{x} > 0$ に対して，平均費用 $a(x)$ が区間 $0 < x \leqq \overline{x}$ において単調に減少するならば，すなわち，$0 < u < v \leqq \overline{x}$ ならば $a(u) > a(v)$ となるならば，

$$x_1 + x_2 \leqq \overline{x}, \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0$$

を満たす任意の x_1，x_2 に対して，

$$c(x_1 + x_2) < c(x_1) + c(x_2)$$

となることを証明せよ．(その証明は解答用紙 B の (ア) 欄に記せ．)

(iv) B 社は工場 F_B で商品 P_A と同等な商品 P_B を製造している．商品 P_B の製造費用は，商品 P_A の製造費用と同じであるとする．すなわち，B 社における商品 P_B の製造費用は，製造量 x の関数 $c(x)$ で定まる．

ここで，A 社が B 社を買収したとし，商品の製造は A 社が工場 F_A ですべてまとめて行うこととする．(商品が同等なので，工場 F_A で製造した商品 P_A を B 社の顧客に提供しても何ら問題はない．また，このとき，工場 F_B における製造量は 0 になる．) 買収前と比較して，製造を集約することによって両社合わせた製造費用が節約される度合いを求めてみよう．

買収時点での商品 P_A と商品 P_B の製造量を，それぞれ u_1 と u_2 ($u_1 > 0,\ u_2 > 0$) とする．このとき，節約される費用は，再び，限界費用 $m(x)$ に対して式 ① を仮定すると，

$$u_1 u_2 \left(\boxed{\quad (イ) \quad} \right)$$

となる．(もしこの値が負となる場合は，製造費用は節約ではなく追加されることになる．)

(17 慶應義塾大学 商学部 2)

§11 無限数列

11.1 極限

453. $$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ を考える．2 つのベクトル $\overrightarrow{p_n}=(a_n,\ a_{n+1})$ と $\overrightarrow{p_{n+1}}=(a_{n+1},\ a_{n+2})$ のなす角を θ_n とする．ただし，$0 \leqq \theta_n \leqq \pi$ である．以下の問に答えよ．

(1) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $\tan\theta_n$ を n の式で表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n=0$ を示せ．ただし，必要であれば $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$0<\theta<\tan\theta$ であることを用いてよい．

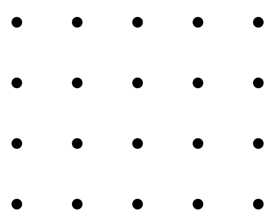
(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n\theta_n$ を求めよ．

(17 神戸大学 後期 理科系 1)

454. 平面全体に縦横同じ間隔で電球が置かれていて，次の規則で点滅を繰り返すとする．

初めはすべての電球が消えている．
ある 1 個の電球が 1 秒後に点灯し，2 秒後にその周りに隣接する 8 個の電球が点灯する．3 秒後には，さらにその外側に隣接する電球が点灯する．一般に $n+1$ 秒後には，n 秒目に初めて点灯した電球の外側に隣接する電球が点灯する．
一度点灯した電球は「2 秒間点灯して次の 1 秒間消灯」を繰り返す．

下の図は電球の配置の一部分を示している．



$n \geqq 1$ とする．n 秒後に初めて点灯する電球の個数を a_n とし，n 秒後に点灯している電球の個数を b_n として，次の問に答えよ．

(1) a_n を n を用いた式で表せ．

(2) b_n を n を用いた式で表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n^2}$ を求めよ．

(17 早稲田大学 教育学部 4)

455. xy 平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．また，実数 a に対して，a 以下の最大の整数を $[a]$ で表す．記号 [ ] をガウス記号という．以下の問いでは N を自然数とする．

(1) n を $0 \leqq n \leqq N$ を満たす整数とする．点 $(n,\ 0)$ と点 $\left(n,\ N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right)$ を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ．

(2) 直線 $y = x$ と，x 軸，および直線 $x = N$ で囲まれた領域 (境界を含む) にある格子点の個数を $A(N)$ とおく．このとき $A(N)$ を求めよ．

(3) 曲線 $y = N\sin\left(\dfrac{\pi x}{2N}\right)$ $(0 \leqq x \leqq N)$ と，x 軸，および直線 $x = N$ で囲まれた領域 (境界を含む) にある格子点の個数を $B(N)$ とおく．(2) の $A(N)$ に対して $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{B(N)}{A(N)}$ を求めよ．

(17 筑波大学 5)

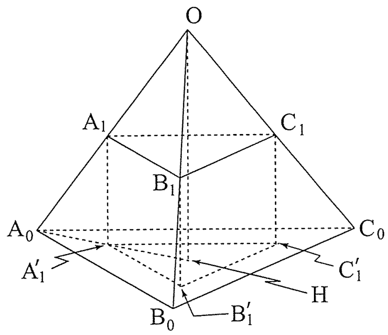
11.2 級数

456. 1 辺の長さが a_0 の正四面体 $\mathrm{OA_0B_0C_0}$ がある．図のように，辺 $\mathrm{OA_0}$ 上の点 $\mathrm{A_1}$，辺 $\mathrm{OB_0}$ 上の点 $\mathrm{B_1}$，辺 $\mathrm{OC_0}$ 上の点 $\mathrm{C_1}$ から平面 $\mathrm{A_0B_0C_0}$ に下ろした垂線をそれぞれ $\mathrm{A_1A_1}'$，$\mathrm{B_1B_1}'$，$\mathrm{C_1C_1}'$ としたとき，三角柱 $\mathrm{A_1B_1C_1} - \mathrm{A_1}'\mathrm{B_1}'\mathrm{C_1}'$ は正三角柱になるとする．ただし，ここでは底面が正三角形であり，側面が正方形である三角柱を正三角柱とよぶことにする．同様に，点 $\mathrm{A_2}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{C_2}$，$\mathrm{A_2}'$，$\mathrm{B_2}'$，$\mathrm{C_2}'$，$\cdots$ を次のように定める．正四面体 $\mathrm{OA}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$ において，辺 OA_k 上の点 A_{k+1}，辺 OB_k 上の点 B_{k+1}，辺 OC_k 上の点 C_{k+1} から平面 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$ に下ろした垂線をそれぞれ $\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+1}'$，$\mathrm{B}_{k+1}\mathrm{B}_{k+1}'$，$\mathrm{C}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}'$ としたとき，三角柱 $\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{B}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1} - \mathrm{A}_{k+1}'\mathrm{B}_{k+1}'\mathrm{C}_{k+1}'$ は正三角柱になるとする．辺 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$ の長さを a_k とし，正三角柱 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k - \mathrm{A}_k'\mathrm{B}_k'\mathrm{C}_k'$ の体積を V_k とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 点 O から平面 $\mathrm{A_0B_0C_0}$ に下ろした垂線を OH とし，$\theta = \angle\mathrm{OA_0H}$ とするとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ．

(2) a_1 を a_0 を用いて表せ.

(3) V_k を a_0 を用いて表し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} V_k$ を求めよ.



(17 神戸大学 理系 3)

°457. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{5^k}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$

(16 国士舘大学 理工学部 1(1)(i))

458. θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ をみたす定数とし，自然数 n に対して $a_n=\tan\dfrac{\theta}{2^n}$ とおく.

(1) 数列 $\{2^n a_n\}$ の極限を求めよ.

(2) n が 2 以上のとき $\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{2}{a_{n-1}}=a_n$ が成り立つことを示せ.

(3) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k}$ とおく．n が 2 以上のとき S_n を a_1 と a_n で表せ.

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ の和を求めよ.

(17 名古屋工業大学 3)

459. 数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める.

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=1+\frac{1}{1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) a_5 を求めよ.

(2) a_{n+1} を a_n の式で表せ.

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}$ が収束することを示し，その和を求めよ.

(17 千葉大学 医・理学部 11)

°460. 1 辺の長さが 2 の正三角形を △OAB とする．△OAB の内接円を C_1 とする．2 辺 OA，OB と円 C_{n-1} に接する円を C_n として C_n $(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を定める．以下の問いに答えよ．

(1) k を自然数とする．C_k の半径が C_1 の半径の 0.001 倍未満となる最小の k を求めよ．

(2) C_n の面積を s_n とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ の値を求めよ．

(17 京都府立大学 生命環境学部 5)

461. 自然数 n に対して

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+2k}, \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3}, \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi}{n+2k}$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．ただし，$x > 0$ のとき $\sin x < x$ が成り立つことを用いてよい．

(1) $x > 0$ のとき不等式 $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x$ が成り立つことを示せ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ．

(3) 数列 $\{b_n\}$ の極限を求めよ．

(4) 数列 $\{c_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ．

(17 名古屋工業大学 後期 工学部 (第一部) 2)

11.3 漸化式

462. $a,\ b,\ k$ は 0 ではない実数とし，i は虚数単位とする．複素数からなる数列 $\{z_n\}$ を次の漸化式で定める．

$$z_1 = a + bi, \quad z = (k+2i)z_{n-1} + 2\overline{z_{n-1}} \qquad (n = 2,\ 3,\ \cdots)$$

数列 $\{z_n\}$ の一般項を次の手順で求める．まず，$z_n = x_n + y_n i$ とおく．ただし，x_n，y_n は実数である．このとき数列 $\{z_n\}$ の漸化式から，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ に関する漸化式

$$\begin{cases} x_n = \left(\boxed{\text{コ}}\right) x_{n-1} - \boxed{\text{サ}}\, y_{n-1} \\ y_n = \boxed{\text{シ}}\, x_{n-1} + \left(\boxed{\text{ス}}\right) y_{n-1} \end{cases} \qquad (x = 2,\ 3,\ \cdots)$$

を得る．これより $x_n - y_n = \boxed{\text{セ}}$ を得る．したがって，数列 $\{x_n\}$ は漸化式

$$x_n = \boxed{\text{ソ}}\, x_{n-1} + \boxed{\text{タ}} \qquad (n = 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たす．これより，数列 $\{x_n\}$ の一般項は

$$x_n = \boxed{\text{チ}} \qquad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

と求まり，数列 $\{y_n\}$ の一般項も

$$y_n = \boxed{\text{ツ}} \qquad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

と求まる．

（注：$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{タ}}$～$\boxed{\text{ツ}}$ は，a，b，k，n を用いて表せ．$\boxed{\text{ソ}}$ を用いて表せ.）

次に，z の実部 x_n と虚部 y_n との比を調べる．

(1) $a = b$ のとき，$\dfrac{x_n}{y_n} = \boxed{\text{テ}}$ である．また，$a < 0$ かつ $k > 0$ のとき，$\arg z_n = \boxed{\text{ト}}$ である．ただし，z_n の偏角 $\arg z_n$ は $0 \leqq \arg z_n < 2\pi$ とする．

(2) $a \fallingdotseq b$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \boxed{\text{ナ}}$ である．

(17 立命館大学 理系 (全学統一 2/3) 2)

463. 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が次の関係を満たしている．

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 2 \\ a_{n+1} = 4a_n - 2b_n & (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \\ b_{n+1} = a_n + b_n & (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

次の問いに答えよ．

(1) $a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n)$ を満たす α，β を求めよ．

(2) (1) を使って a_n，b_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ を求めよ．

(17 岡山県立大学 情報工学部 1)

◇464. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a_n > \sqrt{7}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_n - \sqrt{7}}{a_n + \sqrt{7}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定めるとき，$b_{n+1} = {b_n}^2$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\lim_{n\to\infty} 2^{-n}\log(a_n-\sqrt{7})$ を求めよ．

(17 金沢大学 理工・医薬保健学域 4)

465. $c,\ p$ は定数とする．漸化式

$$a_1=c,\quad a_{n+1}=4a_n+p^n+9\quad (n \geqq 1)$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ に対して，$b_n=\dfrac{\alpha_n}{4^{n-1}}$ $(n \geqq 1)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) $b_{n+1}-b_n$ を $n,\ p$ の式で表せ．
(2) $c=-2,\ p=4$ のとき，a_n を n の式で表せ．
(3) $p=3$ のとき，a_n を n と c の式で表せ．
(4) $p=3$ のとき，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{3^{n-1}}\right\}$ が収束するように c の値を定めよ．また，そのときの極限値 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{3^{n-1}}$ を求めよ．

(17 関西学院大学 理工・総合政策・教育 (全学 2/1) 4)

466. 数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める．

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{3}{a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) n は自然数とする．不等式 $a_n>\sqrt{6}$ を証明せよ．
(2) n は自然数とする．不等式 $a_{n+1}-\sqrt{6}<\dfrac{1}{4}(a_n-\sqrt{6})^2$ を証明せよ．
(3) 数列 $\{a_n\}$ の収束，発散について調べ，極限があればその極限を求めよ．

(17 大阪府立大学 現代システム科学・生命環境科学域 3)

467. 定数 $c>0$ に対し，$f(x)=e^{-cx}$ とおく．ここで，e は自然対数の底である．

(1) 方程式 $x=f(x)$ は $0<x<1$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ．

数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を，$a_1=1$ とし，$n \geqq 1$ に対し，$a_{n+1}=f(a_n)$ と定める．また，α を (1) の解とする．

(2) すべての自然数 n に対し，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$|a_{n+1}-\alpha| \leqq c|a_n-\alpha|$$

以下，$0<c<1$ とする．

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ を示せ．

(4) 座標平面において，点

$$(a_1,\ a_2),\ (a_2,\ a_2),\ (a_2,\ a_3),\ (a_3,\ a_3),\ (a_3,\ a_4),\ (a_4,\ a_4),\ \cdots$$

を順に線分で結び，$(2n-1)$ 本目までの線分の長さの和を S_n とおく．すなわち，

$$S_n = |a_1 - a_2| + 2(|a_2 - a_3| + \cdots + |a_n - a_{n-1}|)$$

である．このとき，次が成り立つことを示せ．

2 以上のすべての自然数 n に対して，$S_n < \dfrac{1+c}{1-c}(1-e^{-c})$

(17 東京理科大学 理工学部)

468.　数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める．

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{3}{a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3 を求めよ．

(2) n は自然数とする．不等式 $a_n > \sqrt{6}$ を証明せよ．

(3) n は自然数とする．不等式 $a_{n+1} - \sqrt{6} < \dfrac{1}{4}(a_n - \sqrt{6})^2$ を証明せよ．

(17 大阪府立大学 現代システム科学・地域保健学域 4)

469.　実数 c に対して，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}|a_n| + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める．

(1) $c \geqq 0$ とする．このとき，すべての n に対して $a_n \geqq 0$ が成り立つことを示せ．さらに，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $c < 0$ とする．このとき，すべての n に対して $a_n < 0$ が成り立つような実数 c の値の範囲を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束するような実数 c の値の範囲を求めよ．

(17 北海道大学 後期　理 (数学，物理，生物，地球惑星)・工学部 3)

470.　実数 p は $|p| < 1$ を満たすとする．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_1 = 0,\ a_{n+1} = pa_n + n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $a_n \fallingdotseq 0$ $(n = 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ．

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ．

(17 信州大学 後期 理学部 5)

471. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \tan\frac{\pi}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2+1}+1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．次の問いに答えよ．

(1) $a_2 = \tan\dfrac{\pi}{6}$，$a_3 = \tan\dfrac{\pi}{12}$ であることを示せ．

(2) 一般項 a_n を表す n の式を推定し，それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n a_n$ を求めよ．

(17 広島大学 理・工・生物生産・医・歯・薬・教育・総合科学部 1)

472. 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_1 = 3, \quad b_1 = 7,$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n+1}{(a_n+1)^2+{b_n}^2}, \quad b_{n+1} = -\frac{b_n}{(a_n+1)^2+{b_n}^2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定義する．$z_n = a_n + b_n i$ (i は虚数単位) および $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ とおいて，次の問に答えよ．

(1) $a_n > 0$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であることを示せ．

(2) $z_{n+1} = \dfrac{1}{z_n+1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ および $\alpha = \dfrac{1}{\alpha+1}$ であることを示せ．

(3) $|z_{n+1}-\alpha| = \dfrac{\alpha|z_n-\alpha|}{|z_n+1|}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であることを示せ．

(4) $|z_n-\alpha| \leqq \alpha^{n-1}|z_1-\alpha|$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であることを示せ．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

(17 宮城教育大学 教育学部 (中等教育=数学) 3)

473. 数列 $\{a_n\}$ を条件

$$a_1 = -1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a_{n+2} - pa_{n+1} = q(a_{n+1} - pa_n)$ がすべての n に対して成り立つような p，q を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) r を正の実数とし，数列 $\{b_n\}$ を条件

$$b_1 = r\frac{1}{a_1}, \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = r\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

によって定める．このとき，極限 $\lim_{n \to \infty} b_n$ を求めよ．

(17 信州大学 医・理・経法・工学部 7)

11.4 応用 (確率と漸化式も含む)

474. 数直線上の点 Q は，はじめは $x = 2$ にあり，さいころを投げるたびに以下のルールに従って移動する．Q が $x = a$ にあるとき，

- a が 0 か 3 であれば出た目に関係なく $x = a$ にとどまる．
- a が 1 であれば，出た目が 1 のときは $x = 2$ へ，目が偶数のときは $x = 0$ へ動き，目が 3 か 5 のときは $x = 1$ にとどまる．
- a が 2 であれば，出た目が 1 のときは $x = 1$ へ，目が偶数のときは $x = 3$ へ動き，目が 3 か 5 のときは $x = 2$ にとどまる．

さいころを n 回投げたとき，Q が $x = 1,\ 2,\ 3$ にある確率をそれぞれ $P_1(n)$，$P_2(n)$，$P_3(n)$ とすると，等式 $P_1(n+1) = \boxed{\text{カ}}P_1(n) + \frac{1}{6}P_2(n)$，$P_2(n+1) = \frac{1}{6}P_1(n) + \boxed{\text{キ}}P_2(n)$ が成り立つので，$P_1(n+1) - P_2(n+1) = -\left(\boxed{\text{ク}}\right)^{n+1}$，$P_1(n+1)+P_2(n+1) = -\left(\boxed{\text{ケ}}\right)^{n+1}$ となる．これと $P_3(n+1) = \frac{1}{2}P_2(n)+P_3(n)$ から，$\lim_{n \to \infty} P_3(n) = \boxed{\text{コ}}$ となる．

(17 同志社大学 理工学部 (2/10) 1(2))

11.5 その他

475. 各項が実数である無限数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に対し，関数

$$f_n(x) = \frac{a_n x - b_n}{(2^{n+1}-2)x - (2^{n+1}-1)} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を考える．ただし，$a_1 = 0,\ b_1 = 1$ とする．$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，

$$f_{n+1}(x) = f_n(f_1(x)) \quad \left(x \fallingdotseq \frac{3}{2},\ x \fallingdotseq \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+2}-2}\right)$$

が成り立つとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $f_2(x)$ と $a_2,\ b_2$ を求めなさい．

(2) $t = f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) = \cdots$ をみたす実数 t をすべて求めなさい．

(3) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めなさい．

(17 首都大学東京 都市教養学部 6)

§12　微分 (2)

12.1　極限

°476.　極限

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x}-x}{x+1}$$

を求めよ．

(17 愛媛大学 医・工・理学部 6(1))

477.　$\displaystyle\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ であることを用いて，次の極限値を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^4}\{\log(x^2+x^3)-\log x^2\}$$

(17 岩手大学 理工学部 1(3))

478.　正の実数 x について，以下の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対し，不等式 $e^x>\dfrac{x^n}{n!}$ が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．

(2) 前問で示した不等式を用いて極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^x}$ を求めよ．ただし，a は実数の定数である．

(3) 前問の結果を用いて極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^b\log x$ を求めよ．ただし，b は正の定数である．

(17 名古屋市立大学 中期 薬学部 1)

°479.　次の極限を調べよ．

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-x}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3^x-\sqrt{9^x-3^x}\right)$

(17 茨城大学 工学部 1(1))

12.2　連続，微分可能，導関数，微分係数

480.　実数全体で定義された関数

$$f(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ．
(2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．
(3) $a>0$ とするとき，極限

$$\lim_{x\to\infty}\{f^{-1}\ (af(x))-x\}$$

を求めよ．
(4) $a>0$ とするとき，極限

$$\lim_{x\to-\infty}\{f^{-1}\ (af(x))-x\}$$

を求めよ．

(17 富山大学 医・薬・理 (数) 学部 1)

481. 関数 $f(x)$ を $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ と定め，$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を用いて関数 $g(t)$ を $g(t)=f^{-1}(t)$ と定める．このとき，関数 $G(x)=\boxed{(ケ)}$ を用いて $g''(t)=G(g(t))$ と表すことができる．

(17 慶應義塾大学 理工学部 1(3))

°482. 関数 $f(x)=xe^{-x^2}$ の導関数は，$f'(x)=e^{-x^2}\left(\boxed{あ}\right)$ である．

(17 宮崎大学 工学部 1(1))

°483. 関数 $y=\log\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ を微分せよ．

(17 茨城大学 工学部 1(2))

◇484. 定数 c は $-1<c<1$ を満たすとする．すべての実数 x に対して，関係式

$$f(x)+f(cx)=x^2$$

を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ．

(17 早稲田大学 教育学部 1(4))

485. 関数 $g(x)$ は微分可能で，その導関数 $g'(x)$ も微分可能であるとする．さらに，

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{g'(x)-1}{x}=6$$

が成り立っている．いま，関数 $f(x)$ を $f(x)=g(x)-x^2+4x+7$ と定めるとき，$f(0)=\boxed{ア}$, $f'(0)=\boxed{イ}$, $f''(0)=\boxed{ウ}$ である．

(16 国士舘大学 理工学部 2)

°486. 関数 $f(x)=\dfrac{x}{\log x}$ の $x=e^2$ における微分係数は，$f'(e^2)=\boxed{\text{う}}$ である．ただし，対数は自然対数であり，e は自然対数の底である．

(17 茨城大学 後期 工学部 1(2))

487. 関数 $y=f(x)$ の第 n 次導関数を $y^{(n)}$ とする．$y=e^x\cos x$ のとき，等式 $y^{(1)}=\sqrt{2}e^x\cos\left(x+\boxed{\text{ア}}\pi\right)$ が成り立ち，一般に $y^{(n)}=\boxed{\text{イ}}e^x\cos\left(x+\boxed{\text{ウ}}\pi\right)$ が成り立つ．次に，$y=e^x(\cos x+\sin x)$ のとき，$y^{(n)}=\boxed{\text{エ}}e^x\sin\left(x+\boxed{\text{オ}}\pi\right)$ が成り立つ．

(17 同志社大学 理工学部 (2/10) 1(1))

°488. 関数 $f(x)=\sqrt{1+\sin^2 x}$ の導関数は，$f'(x)=\dfrac{\boxed{\text{い}}}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ である．

(17 宮崎大学 工学部 1(2))

489. 放物線 $C: y=-x^2-1$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ に対して，P_1 と P_2 を通る直線と x 軸との交点の座標を $(a,\ 0)$ とする．ただし，x_1+x_2 は 0 でないとする．また，$0<t<\pi$ を満たす t に対して $f(t)=\dfrac{\cos t}{\sin t}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) a を $x_1,\ x_2$ を用いて表せ．

(2) $(f(t),\ f'(t))$ は C 上の点であることを示せ．

(3) $0<t_1<\dfrac{\pi}{2},\ 0<t_2<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす異なる t_1 と t_2 に対して，C 上の 2 点 $\mathrm{P}_1(f(t_1),\ f'(t_1))$，$\mathrm{P}_2(f(t_2),\ f'(t_2))$ で定まる a は $f(t_1+t_2)$ に等しいことを示せ．

(4) C 上の 2 点 $\mathrm{P}_1(\sqrt{3},\ -4)$，$\mathrm{P}_2(f(t),\ f'(t))$ で定まる a が 1 に等しいとき，t の値を求めよ．ただし，$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(17 九州大学 後期 理学部 (数学) 3)

°490. $f(x)=\log_x 2\ (x>1)$ を微分せよ．

(17 愛媛大学 医・工・理学部 6(2))

12.3 接線，法線

491. 点 $(-1,\ 0)$ から曲線 $y=e^{\sqrt{x}}\ (x>0)$ に引いた接線の方程式を求めよ．

(17 兵庫県立大学 工学部 3(2))

492. 関数 $f(t)=e^{\cos t}$ に対して，$\dfrac{f'(t)}{f(t)}=\boxed{\text{ア}}$ である．次に，座標平面上の曲線 $C:(\log x)^2+(\log y)^2=1$ とし，C 上の点 P の座標を $(a,\ b)$ とする．P が C 上の点全体を動くとき，a の最小値と最大値はそれぞれ $\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ であり，a^2+b^2 の最小値は $\boxed{\text{エ}}$ である．また，P における C の接線の傾きが 0 となるのは $a=\boxed{\text{オ}}$ のときである．

(17 同志社大学 理系 (全学部 2/4) 1(1))

493. $y=x^2$ で表される放物線を C，正の数 a に対して $y=ae^x$ で表される曲線を C_a とする．次の問いに答えよ．

(1) C と C_a の両方に接する直線の本数を調べよ．ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0$ であることを用いてもよい．

(2) C と C_a の両方に接する直線がちょうど 1 本であるとき，C と C_a の共有点がちょうど 2 点となることを示せ．

(17 お茶の水女子大学 理学部 (数学・物理・情報科学) 1)

494. a を正の実数とし，関数 $y=\dfrac{2a}{x}\ (x>0)$ のグラフを C とする．C 上の点 A における C の接線と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ の 2 つの交点を P，Q とする．点 A が C 上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ．

(17 千葉大学 後期 医・工・理 (数・情) 学部 1)

°495. 座標平面上の曲線 $C: y=\sqrt{x}\ (x\geqq 0)$ を考える．C 上の異なる 2 点 $\mathrm{P}\bigl(p,\ \sqrt{p}\bigr)$，$\mathrm{Q}\bigl(q,\ \sqrt{q}\bigr)$ $(p>0,\ q>0)$ における，それぞれの法線 l_1，l_2 を考える．法線 l_1 と l_2 の交点を R とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 R の座標を p と q で表せ．

(2) q が p に限りなく近づくとき，線分 RP の長さの極限値を p で表せ．

(17 九州大学 後期 工学部 1)

496. a を定数として $f(x)=\{x^2+(1-a)x+a\}e^{-x}$ とおく．

(1) 曲線 $y=f(x)$ が変曲点をもつとき，その点を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ の接線のうち，原点を通るものが存在することを示せ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ の接線のうち，原点を通るものがちょうど 2 本であるとき，a の値を求めよ．

(17 名古屋工業大学 後期 工学部 (第一部) 3)

$\Diamond$**497.** 曲線 $C_1 : y = \dfrac{1}{2}x^2$ 上の点 P の x 座標を t とする．定数 $k > 1$ に対して，点 $\mathrm{Q}(x(t),\ y(t))$ は次をみたす．

- $\mathrm{PQ} = k$
- 直線 PQ は点 P での C_1 の接線に垂直
- $y(t) > \dfrac{1}{2}t^2$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 直線 PQ の方程式を求めよ．

(2) $x(t)$, $y(t)$ を求めよ．

(3) t の関数 $x(t)$ の極値を求めよ．

(4) 点 P が曲線 C_1 上を動くとき，点 Q が描く曲線を C_2 とする．C_1 と C_2 が共有点をもつような k の値の範囲を求めよ．

(17 名古屋工業大学 後期 工学部 (第一部) 1)

12.4 極値，グラフ

498. e を自然対数の底とし，$f(x) = e^{-x}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) 導関数 $f'(x)$ は $f'(x) = \sqrt{2}e^{-x}\cos x$ を満たすことを示せ．

(2) k を自然数とする．$2(k-1)\pi < x < (2k-1)\pi$ の範囲で，関数 $f(x)$ の増減を調べ，極値を k を用いて表せ．

(3) k を自然数とする．$(2k-1)\pi < x < 2k\pi$ の範囲で，関数 $f(x)$ の増減を調べ，極値を k を用いて表せ．

(4) 自然数 n に対して，$(n-1)\pi < x < n\pi$ の範囲における関数 $f(x)$ の極値を a_n とする．無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよ．

(17 茨城大学 後期 理学部 (数学・情報数理) 2)

$\blacklozenge$**499.** r, c, ω は正の定数とする．座標平面上の動点 P は時刻 $t = 0$ のとき原点にあり，毎秒 c の速さで x 軸上を正の方向へ動いているとする．また，動点 Q は時刻 $t = 0$ のとき点 $(0,\ -r)$ にあるとする．点 P から見て，動点 Q が点 P を中心とする半径 r の円周上を毎秒 ω ラジアンの割合で反時計回りに回転しているとき，以下の問に答えよ．

(1) 時刻 t における動点 Q の座標 $(x(t),\ y(t))$ を求めよ．

(2) 動点 Q の描く曲線が交差しない，すなわち，$t_1 \fallingdotseq t_2$ ならば $(x(t_1),\ y(t_1)) \fallingdotseq (x(t_2),\ y(t_2))$ であるための必要十分条件を $r,\ c,\ \omega$ を用いて与えよ．

(17 神戸大学 理系 5)

500.　$x<0$ の範囲において，次の関数の増減を調べ，極値を求めよ．

$$y = |x|\sqrt{2-x^2}$$

(17 岩手大学 理工学部 1(2))

501.　k を $k \geqq 0,\ k \fallingdotseq 1$ を満たす実数として，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \{1-(1-k)x\}^{\frac{1}{1-k}}$$

で定める．ただし，関数 $f(x)$ の定義域は，$0 \leqq k < 1$ のとき $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{1-k}$ であり，$k>1$ のとき $x \geqq 0$ である．以下の問いに答えよ．

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) $k=0$ のとき，$0<k<1$ のとき，$1<k$ のときのそれぞれの場合について，関数 $y=f(x)$ の増減，グラフの凹凸，座標軸との交点を調べてグラフをかけ．

(3) $x \geqq 0$ であるとき，

$$\lim_{k\to 1+0}\{1-(1-k)x\}^{\frac{1}{1-k}}$$

を求めよ．ここで，自然対数の底 e が $e = \displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ を満たすことを用いてよい．

(17 九州大学 後期 工学部 4)

502.　実数全体で定義された関数

$$f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x),\ f''(x)$ を求めよ．

(2) $y=f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べて，そのグラフをかけ．

(3) $y=f(x)$ のとき，2^x を y を用いて表せ．

(4) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．

(5) $a>0$ とするとき，極限

$$\lim_{x\to\infty}\{f^{-1}\ (af(x)) - x\}$$

を求めよ．

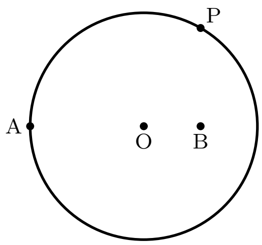
(17 富山大学 理 (物・化・地球)・工学部 3)

503. 関数 $y = e^x - \dfrac{e}{2}(x^2+1)$ の増減，凹凸を調べて，グラフの概形をかけ.

(17 兵庫県立大学 工学部 3(1))

12.5 最大・最小

504. 点 O を中心とする半径 1 の円 C において，点 A は円 C の周上の点，点 B は円 C の内部の点で，点 A，点 O，点 B はこの順で一直線上に並んでおり，線分 OB の長さは $\dfrac{1}{2}$ であるとする．P を円 C の周上の点とする．



(1) 円 C の周上の点 P が ∠AOP が直角となる位置にあるとき，線分 AP と線分 BP の長さの和は $\sqrt{\boxed{ア}} + \dfrac{\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$ であり，$\cos\angle\mathrm{APB}$ の値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{エオ}}}{\boxed{カキ}}$ である.

(2) 点 P が円 C の周上を動くとき，線分 AP と線分 BP の長さの和の最小値は $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$，最大値は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\sqrt{\boxed{シ}}$ である.

(17 東京理科大学 基礎工学部)

505. n を自然数とし，e を自然対数の底とする．関数 $f(x) = x^{n-1}e^{-x}$ について，以下の問いに答えなさい.

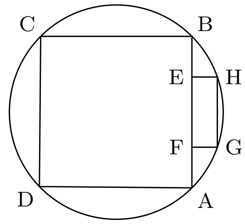
(1) すべての自然数 n に対して，$x \geqq 0$ のとき $e^x > \dfrac{x^n}{n!}$ が成り立つことを，n に関する数学的帰納法によって示しなさい.

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めなさい.

(3) $n \geqq 3$ の場合に，$x > 0$ の範囲における $f(x)$ の最大値，およびそのときの x の値を求めなさい．また，$x > 0$ の範囲における $y = f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めなさい.

(17 首都大学東京 都市教養・都市環境・システムデザイン・健康福祉学部 1)

506. 半径が $\sqrt{2}$ の円に正方形 ABCD が内接している．辺 AB 上の異なる 2 点 E，F と，短い方の弧 AB 上の異なる 2 点 G，H を，四角形 EFGH が長方形となるようにとる．



(1) 長方形 EFGH が正方形のとき，その 1 辺の長さを求めよ．

(2) 長方形 EFGH の面積が最大になるときの辺 FG の長さを求めよ．

(17 信州大学 医・理・経法・工学部 4)

507. $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ とする．放物線 $y = ax^2$ が点 $\mathrm{P}(\theta,\ \sin\theta)$ を通るとき，その放物線と線分 OP で囲まれた図形の面積を $S(\theta)$ とする．ただし $\mathrm{O}(0,\ 0)$ である．

(1) $S(\theta)$ を θ の式で表せ．

(2) $S(\theta)$ が最大値をとる θ がただ 1 つ存在することを示せ．

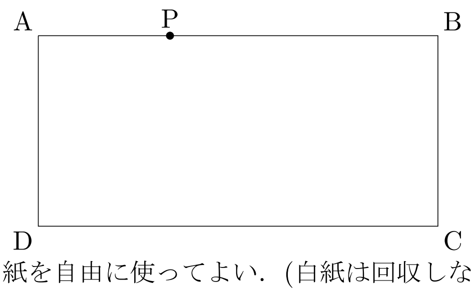
(3) $S(\theta)$ が最大値をとる θ を α とする．曲線 $y = \sin x$ 上の点 $(\alpha,\ \sin\alpha)$ における接線と x 軸の交点の x 座標を β とする．このとき $\dfrac{\beta}{\alpha}$ を求めよ．

(17 信州大学 後期 理・繊維学部 3)

◊508. a を 1 以上の実数とする．図のような長方形の折り紙 ABCD が机の上に置かれている．ただし $\mathrm{AD} = 1$，$\mathrm{AB} = a$ である．P を辺 AB 上の点とし，$\mathrm{AP} = x$ とする．頂点 D を持ち上げて P と一致するように折り紙を一回折ったとき，もとの長方形 ABCD からはみ出る部分の面積を S とする．

(1) S を a と x で表せ．

(2) $a = 1$ とする．P が A から B まで動くとき，S を最大にするような x の値を求めよ．



なお配布された白紙を自由に使ってよい．(白紙は回収しない．)

(17 東京工業大学 3)

°509.　関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

とする．このとき，導関数 $f'(x)$ の最大値を求めよ．

(17 横浜市立大学 医学部 1(4))

510.　実数 θ の関数 $f(\theta)=\dfrac{1}{2+\cos\theta}+\dfrac{1}{2+\sin\theta}$ を考える．

(1) $x=\cos\theta+\sin\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を x を用いて表せ．

(2) $f(\theta)$ の最大値，最小値を求めよ．

(17 東北大学 後期 理学部 3)

所見：(1) の誘導がなくても，この置き換えはできなければならない．

12.6　方程式への応用

511.　関数

$$f(x)=\frac{2(\log x)^2-6\log x+3}{x^2}\quad(x>0)$$

を考える．ただし，$\log x$ は x の自然対数とする．以下の問いに答えなさい．

(1) $f(x)$ の極大値と極小値，およびそのときの x の値を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)$ を求めなさい．ただし，必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いてよいものとする．

(3) k を実数とする．$y=2(\log x)^2-6\log x$ のグラフと $y=kx^2-3$ のグラフが異なる 3 点で交わるような k の値の範囲を求めなさい．

(17 首都大学東京 後期 都市教養・都市環境・システムデザイン学部 3)

512.　次の問に答えよ．

(1) 関数

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2-6x+10}$$

について，増減，極値および極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$ を調べ，$y=f(x)$ のグラフをかけ．

(2) k を定数とする．曲線 $y=\dfrac{4x-10}{x^2-6x+10}$ と直線 $y=kx-1$ の共有点の個数を調べよ．

(17 宮城教育大学 教育学部 (中等教育=数学) 4)

513. $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{x}{\tan x}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 2 つの極限値 $\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} f(x)$ を，それぞれ求めよ．

(2) 座標平面において，原点 O を中心とする半径 r の円を C とする．関数 $g(x) = x^2 + \{f(x)\}^2$ の増減を調べ，$1 < r < \dfrac{\pi}{2}$ ならば円 C と曲線 $G : y = f(x)$ の交点がただ一つであることを示せ．

(3) (2) における円 C と曲線 G の交点を $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ とする．点 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ について，$\angle\mathrm{POQ}$ の 2 等分線と曲線 G との交点の x 座標を a を用いて表せ．

(17 金沢大学 後期 理工学域 (機械) 6)

◇514. 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x}(\cos x + \sqrt{3}\sin x) \quad \left(-\frac{5}{6}\pi \leqq x \leqq \frac{7}{6}\pi\right)$$

で定める．ただし，e は自然対数の底とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．また，最大値を与える x の値と最小値を与える x の値を求めよ．

(2) 方程式

$$e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x}(1 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x) = a\cos x$$

が，$-\dfrac{5}{6}\pi \leqq x \leqq \dfrac{7}{6}\pi$ の区間で異なる 4 個の実数解をもつように，定数 a の範囲を定めよ．

(17 東京農工大学 後期 工学部 2)

515. n を自然数とする．

$$f(x) = \sin x - nx^2 + \frac{1}{9}x^3$$

とおく．$3 < \pi < 4$ であることを用いて，以下の問に答えよ．

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x) < 0$ であることを示せ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ 1 つもつことを示せ．

(3) (2) における解を x_n とする．$\displaystyle\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} nx_n$ を求めよ．

(17 神戸大学 理系 1)

12.7　不等式への応用

516.　$f(x)=\dfrac{\log x}{x^x}$ $(x>0)$ とおく．

(1) $f(x)$ を微分せよ．

(2) $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば，$a<\sqrt{3}$ であることを示せ．

(3) $\sqrt{3}^{\left(\sqrt{5}^{\sqrt{5}}\right)}$ と $\sqrt{5}^{\left(\sqrt{3}^{\sqrt{3}}\right)}$ の大小を比較せよ．

(17 愛媛大学 医・理学部 9)

517.　以下の問いに答えよ．

(1) 実数 r は $0<r<1$ を満たす．$x>0$ のとき，x^r-1 と $r(x-1)$ の大小を比較せよ．

(2) 実数 $p,\ q$ は $p>1,\ q>1,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満たす．$a>0,\ b>0$ のとき，$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}$ と $\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}$ の大小を比較せよ．

(17 一橋大学 後期 経済学部 5-A)

◊518.　定義域が $x>0$ である関数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ を考える．以下の問に答えよ．

(1) $x>0$ のとき，$x>\log(1+x)$ を示せ．

(2) $f(x)$ は区間 $x>0$ で減少することを示せ．

(3) 自然対数の底 e が $e=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ となることを用いて，正の整数 m に対して $f(m)>e$ となることを示せ．

(4) 2 以上の整数 m に対して，

$$2\left(\frac{m+1}{e}\right)^{m+1}>m!$$

となることを示せ．必要であれば $e<3$ であることを用いてもよい．

(17 岐阜大学 後期 医・工・教育学部 3)

°519.　(1) 不等式 $\log x<\sqrt{x}$ が成り立つことを示しなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めなさい．

(17 信州大学 教育学部 3)

§13　積分 (2)

13.1　区分求積

520.　次の問いに答えよ.

(1) 関数 $\log(x+\sqrt{x^2+1})$ の導関数を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$ を求めよ.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{10n^2+6nk+k^2}}$ の値を求めよ.

(17 秋田大学 教育文化・国際資源学部 5)

°521.　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$

(16 国士舘大学 理工学部 1(1)(ii))

°522.　数列 $\{a_n\}$ の一般項が

$$a_n=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$$

であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n$ を求めよ.

(17 愛媛大学 医・工・理学部 6(4))

13.2　計算

523.　正の実数 λ に対して，α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ が等式 $\sin\alpha-\lambda\cos\alpha=0$ を満たしている．このとき，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$ をそれぞれ λ で表すと，$\sin\alpha=\boxed{\text{ア}}$，$\cos\alpha=\boxed{\text{イ}}$ となる．これより，$I(\lambda)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\lambda\cos x|\,dx$ を λ で表すと $I(\lambda)=2\sqrt{1+\lambda^2}-\left(\boxed{\text{ウ}}\right)$ となり，$I(\lambda)$ は $\lambda=\boxed{\text{エ}}$ で最小値 $\boxed{\text{オ}}$ をとる.

(17 同志社大学 理系 (政策・文化情報 (理系)・生命医科・スポーツ健康 2/7) 1(1))

524.　$\displaystyle\int_0^{a}(e^x+e^{-x})\,dx=2$ を満たすように定数 a をとり，関数 $f(t)$ を

$$f(t)=\int_0^{at}(e^x+e^{-x})\,dx$$

とおく．次の問いに答えよ.

(1) a の値を求めよ．

(2) $f(2)$ および $f(3)$ の値を求めよ．

(3) 正の整数 n に対し，n が奇数ならば $f(n)$ は整数になることを示せ．

(17 岩手大学 理工学部 5)

525. $a > 0$ とするとき，定積分

$$\int_{\frac{1}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\,dx$$

を求めよ．

(17 富山大学 理 (物・化・地球)・工学部 1)

°526. 定積分 $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx$ の値は $\boxed{\text{え}}$ である．

(17 宮崎大学 工学部 1(4))

°527. 次の定積分を求めよ．

(i) $\displaystyle\int_{-2}^0 (x-4)(x+2)^5\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x+1}\,dx$

(17 茨城大学 工学部 1(3))

528. 関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

で定める．ただし，e は自然対数の底である．また，

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\cos^2 x\,dx, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\sin^2 x\,dx$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $g(x) = g\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ を示せ．

(2) $I_1 = I_2$ を示せ．

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx$, I_1 の値をそれぞれ求めよ．

(17 静岡大学 理 (物化)・情報・工学部 3)

529. 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^{-x}|\sin x|$$

で定める．また，正の整数 n に対して

$$I_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x)\,dx$$

とする．以下の問に答えよ．

(1) I_1 の値を求めよ．

(2) I_n の値を求めよ．

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} I_k$ の値を求めよ．

(4) $\lim_{n\to\infty} S_n$ の値を求めよ．

(17 岐阜大学 教育・医 (医)・工学部 4)

°530. 定積分 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) dx$ の値は $\frac{\boxed{お}}{12}$ である．

(17 宮崎大学 工学部 1(5))

°531. 関数 $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ の不定積分は，$\int f(x)\,dx = -\frac{\boxed{う}}{x} + C$ である．ただし，C は積分定数とする．

(17 宮崎大学 工学部 1(3))

532. 定積分 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos 2x}\,dx$ を求めよ．

(17 横浜市立大学 医学部 1(2))

°533. $\int_1^2 x \log 2x\,dx = \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}} \log 2 - \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$

(16 国士舘大学 理工学部 1(2)(ii))

◇534. 実数 $a > \frac{1}{2}$ に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} - \frac{a}{(x+1)^2} \quad (x > 0)$$

により定める．$f(1)f(2) \geqq 0$ が成り立つとき，定積分 $\int_1^2 |f(x)|\,dx$ を求めよ．

(17 浜松医科大学 3)

535. $a,\ b,\ c$ を実数とし，

$$I(a,\ b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx,\quad J(a,\ b,\ c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx$$

とおく．ただし，$a \fallingdotseq 0$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $I(a,\ b)$ を求めよ．

(2) $J(a,\ b,\ c)$ を $I(a,\ b+c)$ と $I(a,\ b-c)$ を用いて表せ．

(3) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx$$

(17 東北大学 理・医・歯・薬・工・農学部 6)

536. 次の問いに答えよ．

(1) $f(x)=x^3$ とするとき，次の不定積分を求めよ．

$$\int f(\sin x)\,dx$$

(2) $f(x)$ を連続関数とする．$x=\pi-t$ とおくことにより，次の式が成り立つことを示せ．

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

(3) 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3\sin^3 x^2\,dx$$

(17 岡山県立大学 中期 情報工学部 4)

537. $-2 \leqq t \leqq 2$ とし，x に関する方程式 $x^3-3x=t$ の解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha \geqq \beta \geqq \gamma)$ とする．

(1) $\beta,\ \gamma$ を α を用いて表せ．ただし，t を用いてはならない．

(2) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を t の関数と考えて，定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{\beta\gamma}{\alpha}\,dt$ の値を求めよ．

(17 富山大学 医・薬・理 (数) 学部 2)

538. (i) 不定積分 $\displaystyle\int \tan x\,dx$ を求めよ．ただし，積分定数は省略してよい．

(ii) 関数 $I(\theta)$ を

$$I(\theta)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\theta}\tan x\,dx\quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$$

と定める．極限値 $L = \lim_{\theta \to +0} (I(\theta) - I(2\theta))$ および $M = \lim_{\theta \to +0} \theta e^{I(\theta)}$ を求めよ．

(17 大阪府立大学 中期 工学域 1(1))

°539. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x + \cos 3x)\,dx = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$

(16 国士舘大学 理工学部 1(2)(i))

°540. 定積分

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \log x}$$

を求めよ．

(17 愛媛大学 医・工・理学部 6(3))

541. n を自然数とする．

(1) 二項定理を用いて $(z + z^{-1})^{2n}$ を展開せよ．ただし，z は 0 でない複素数とする．

(2) $z = \cos\theta + i \sin\theta$ とおき，(1) の展開式を用いて，等式

$$\begin{aligned}(2\cos\theta)^{2n} =& {}_{2n}\mathrm{C}_0 \cos(2n\theta) + {}_{2n}\mathrm{C}_1 \cos(2(n-1)\theta) + \cdots \\ &+ {}_{2n}\mathrm{C}_k \cos(2(n-k)\theta) + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} \cos(-2n\theta)\end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．ただし，i は虚数単位である．

(3) 次の等式を示せ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2n}\,d\theta = \frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$$

(17 北海道大学 後期 理 (数学，物理，生物，地球惑星)・工学部 2)

13.3 定積分で表された関数 (定積分と最大最小も含む)

°542. 関数 $f(x)$ は微分可能で

$$f(x) = x^2 e^{-x} + \int_0^x e^{t-x} f(t)\,dt$$

を満たすものとする．次の問いに答えよ．

(1) $f(0)$，$f'(0)$ を求めよ．

(2) $f'(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ を求めよ．

(17 埼玉大学 理 (数学)・工学部 2)

543. 連続関数 $f(x)$ と定数 a が次の関係式を満たしているとする．

$$\int_0^x f(t)\,dt = 4ax^3+(1-3a)x+\int_0^x \left\{\int_0^u f(t)\,dt\right\} du+\int_x^1 \left\{\int_u^1 f(t)\,dt\right\} du$$

このとき以下の各問い答えよ．

(1) a と $f(0)+f(1)$ の値を求めよ．

(2) $g(x)=e^{-2x}f(x)$ とおくとき，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ．ここで e は自然対数の底を表す．

(3) $f(x)$ を求めよ．

(17 東京医科歯科大学 医学部 (医)3)

544. a を定数とし，関数 $f(x)$ が

$$\int_0^{x-a} tf(x-t)\,dt = x^3-x^2-8x+12$$

をみたしている．このとき，a の値は $a=\boxed{\text{ア}}$ であり，関数 $f(x)$ は $f(x)=\boxed{\text{イ}}x-\boxed{\text{ウ}}$ である．

(16 国士舘大学 理工学部 3)

545. $23a+7b=0$ を満たす実数 $a,\ b\ (a>0)$ に対し，関数 $F(x)$ を次のように定義する．

$$F(x)=\int_x^{2x+1}(at+b)^{\frac{1}{3}}\,dt$$

関数 $F(x)$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

(17 東北大学 後期 理学部 2)

546. $a,\ b$ を実数とし，関数 $f(x)$ が等式

$$f(x)=x^2+|b|x+\int_{-a}^{a} tf(t)\,dt$$

をみたすとする．

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a} tf(t)\,dt$ の値を $a,\ b$ を用いて表せ．

(2) 方程式 $f(x)=0$ が実数解をもつための条件を $a,\ b$ を用いて表し，この条件をみたす点 $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示せよ．

(17 富山大学 人間発達科学・経済学部 3)

547. 関数 $f(x)$ を $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}|e^t-1|\,dt$ と定める．$x=0,\ -1,\ -\dfrac{1}{2}$ における $f(x)$ の値はそれぞれ

$$f(0)=\boxed{\text{ア}},\quad f(-1)=\boxed{\text{イ}},\quad f\left(-\frac{1}{2}\right)=\boxed{\text{ウ}}$$

である．また，$-1\leqq x\leqq 0$ のとき，$f(x)$ を x の式で表すと，$f(x)=\boxed{\text{エ}}$ となる．$-1<x<0$ のとき，$f'(x)=\boxed{\text{オ}}$ だから，$-1<x<0$ において $f'(x)=0$ となる x の値は $x=\boxed{\text{カ}}$ である．$-1\leqq x\leqq 0$ において，$f(x)$ は $x=\boxed{\text{キ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ク}}$ をとり，$x=\boxed{\text{ケ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{コ}}$ をとる．

(17 関西学院大学 理工・総合政策・教育 (全学 2/1) 3)

548. 実数 t に対して，$f(t)=\displaystyle\int_0^{at}(e^x+e^{-x})\,dx$ とおく．ただし a は $f(1)=2$ をみたす定数とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) $f(2)$ および $f(3)$ の値を求めよ．

(3) n が正の奇数ならば，$f(n)$ は正の偶数であることを示せ．

(4) m が正の偶数のとき，$f(t)$ の $t=m$ における微分係数 $f'(m)$ を a で割れば正の偶数になることを示せ．

(17 岩手大学 教育学部 4(イ))

549. a が実数の範囲を動くとき，定積分

$$\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-at\right)^2dt$$

の最小値を求めよ．また，そのときの a の値を求めよ．

(17 信州大学 後期 理・繊維学部 4)

550. 連続関数 $f(x)$ が次の関係式を満たしているとする．

$$f(x)=x^2+\int_0^x f(t)\,dt-\int_x^1 f(t)\,dt$$

このとき以下の各問いに答えよ．

(1) $f(0)+f(1)$ の値を求めよ．

(2) $g(x)=e^{-2x}f(x)$ とおくとき，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ．ここで e は自然対数の底を表す．

(3) $f(x)$ を求めよ．

(17 東京医科歯科大学 医学部 (歯・保健衛生)3)

551. x は $0 \leqq x \leqq 1$ をみたす実数とし，e は自然対数の底とする．以下の問いに答えなさい．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_x^{x+1} |1-t|e^{1-t}\,dt$ を求めなさい．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_x^{x+1} |\pi\sin(\pi t)|\,dt$ を求めなさい．

(3) 関数

$$f(x)=\int_x^{x+1}\left\{|1-t|e^{1-t}-|\pi\sin(\pi t)|\right\}dt \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めなさい．

(17 首都大学東京 都市教養・都市環境・システムデザイン・健康福祉学部 3)

552. 実数 $a,\ b$ に対し，$I(a,\ b)=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(x-a-b\sin x)^2\,dx$ とする．

(1) $I(a,\ b)=I(0,\ b)+2\pi a^2$ を示せ．

(2) $I(0,\ b)$ を求めよ．

(3) $I(a,\ b) \geqq \dfrac{2\pi(\pi^2-6)}{3}$ を示せ．また等号が成り立つときの $a,\ b$ の値を求めよ．

(17 三重大学 工学部 4)

◊553. m を正の整数とする．関数

$$f(x)=\int_0^x (mt^{2m-1}-t^{2m+1})e^{-t^2}\,dt$$

の極値を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(17 静岡大学 理学部 (数) 4)

554. 実数 $a,\ b$ に対し，$I(a,\ b)=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(e^{-|x|}-a\sin x-b\cos x)^2\,dx$ とする．ただし e は自然対数の底である．

(1) $I(a,\ b)=I(0,\ b)+\pi a^2$ を示せ．

(2) $I(0,\ b)$ を求めよ．

(3) $I(a,\ b) \geqq 1-e^{-2\pi}-\dfrac{(1+e^{-\pi})^2}{\pi}$ を示せ．また等号が成立するときの $a,\ b$ の値を求めよ．

(17 三重大学 医学部 4)

◊555.　実数 x の関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$ の最大値と最小値を求めよ．

(17 東京工業大学 2)

556.　x の関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x (x-t)(3t^2-2t-6)\,dt$ は $x=\boxed{サシ}$ と $x=\boxed{ス}$ で極小値をとり，$x=\boxed{セ}$ で極大値をとる．また，$f(x)>0$ となる正の整数 x の中で最小のものは $x=\boxed{ソ}$ である．ただし，$\boxed{サシ}<\boxed{ス}$ とする．

(16 国士舘大学 理工学部 1(3))

13.4　定積分と不等式

◊557.　n を自然数とする．関数 $f(x)$ $(x \geqq 0)$ を単調に増加する連続関数とする．k を 0 以上の整数としたとき，$x_k=\dfrac{\pi k}{2n}$，$S_k=\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\cos^2 nx\,dx$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{n+1}}\cos^2 nx\,dx$ を求めよ．

(2) S_k が不等式 $\dfrac{\pi}{4n}f(x_k) \leqq S_k \leqq \dfrac{\pi}{4n}f(x_{k+1})$ を満たすことを示せ．

(3) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos^2 nx\,dx$ を I で表せ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 nx-\cos^4 nx)\log\left(1+\frac{4}{\pi}x\right)dx$ を求めよ．

(17 同志社大学 理工学部 (2/10) 4)

558.　$f(x)$ を閉区間 $[0,\ 1]$ で定義された連続な増加関数とし，n を正の整数とする．また，I_n，J_n を

$$I_n=\int_0^1 f(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx$$
$$J_n=\int_0^1 f(x)|\sin((2n+1)\pi x)|\,dx$$

で定める．

(1) x についての方程式 $\sin((2n+1)\pi x)=0$ の実数解で区間 $[0,\ 1]$ に属するものは $\boxed{(テ)}$ 個ある．それらを小さい順に $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N$ $(N=\boxed{(テ)}-1)$ と並べると，$x_k=\boxed{(ト)}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ である．

次に，$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \boxed{(テ)} - 2$ に対して，a_k を

$$a_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx$$

で定める．このとき，次の (F1)，(F2) が成り立つ．

(F1) k が偶数のとき　$f(x_k)\dfrac{2}{(2n+1)\pi} \leqq a_k \leqq f(x_{k+1})\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$

(F2) k が奇数のとき　$-f(x_{k+1})\dfrac{2}{(2n+1)\pi} \leqq a_k \leqq -f(x_k)\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$

(2) (F1) が成り立つことを証明しなさい．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ が成り立つことを証明しなさい．必要であれば，(F1)，(F2) を証明なしに用いてよい．

(4) 数列 $\{J_n\}$ の極限は関数 $f(x)$ の定積分を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n = \boxed{(ナ)}$ と表すことができる．

(17 慶應義塾大学 理工学部 3)

559. n を自然数とする．以下の問に答えよ．

(1) 実数 x に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

(2) 次の等式をみたす S の値を求めよ．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k} - S = (-1)^n\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\,dx$$

(3) 不等式

$$\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\,dx \leqq \frac{1}{n+1}$$

が成り立つことを示し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}$ を求めよ．

(17 神戸大学 理系 2)

560. $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ とする．

(i) 不等式 $\displaystyle\int_1^{2n+1}\frac{1}{x}\,dx < 2a_n$ が成り立つことを示せ．

(ii) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\log n}$ を求めよ．

(17 札幌医科大学 1(2))

13.5　面積

561.　曲線 C が媒介変数 t を用いて $x=\sin t,\ y=1+\cos 3t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と表されているとき，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を t の式で表せ．

(2) $\dfrac{dy}{dx}=0$ を満たす t の値をすべて求めよ．

(3) $t=\dfrac{\pi}{4}$ に対応する曲線 C 上の点における接線の方程式を求めよ．

(4) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(17 関西大学 理系 (全学部 2/7) 1)

562.　2 つの関数 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},\ g(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$ を考える．座標平面において，傾き t の直線 l が点 $(a,\ f(a))$ で曲線 $C:y=f(x)$ に接しているとき，次の問いに答えよ．

(1) $a=g(t)$ となることを示せ．

(2) 関数 $g(x)$ の導関数を調べ，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{a}{t}$ を求めよ．

(3) $t>0$ とする．曲線 C，直線 l，および y 軸で囲まれた部分の面積を S とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to +0}\frac{S}{t}$ を求めよ．

(17 金沢大学 後期 理工学域 (電子情報・機械) 5)

°563.　s を実数の定数とする．座標平面において，曲線 $C_1:y=-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+s$ と曲線 $C_2:y=\dfrac{8}{x}$ が，共有点 $(-1,\ -8)$ をもつとする．このとき，$s=\boxed{\text{え}}$ であり，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積は $\boxed{\text{お}}$ である．

(17 茨城大学 後期 工学部 1(3))

564.　O を原点とする座標平面上において，点 P は点 O を中心とする半径 2 の円周上を反時計回りに動き，点 Q は点 P を中心とする半径 1 の円周上を反時計回りに動く．時刻 $t=0$ のとき，点 P は $(2,\ 0)$ にあり，点 Q は $(3,\ 0)$ にある．時刻 t のとき，線分 OP は，x 軸の正の部分を始線とした角 t の動径とする．また，時刻 t のとき，線分 PQ は，点 P を始点とし動径 OP を延長した半直線を始線とした角 t の動径とする．ただし，$0\leqq t\leqq\pi$ とする．

(1) 時刻 t における点 Q の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ である．

(2) 時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ における点 Q の速度ベクトルは $\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$，速さは $\boxed{\text{オ}}$ である．

(3) 円 Q の x 座標は，$t=\boxed{\text{カ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{キ}}$ となる．

(4) 点 Q の y 座標の最大値は $\boxed{\text{ク}}$ である．

(5) 点 Q の軌跡と x 軸で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

(17 立命館大学 理系 (全学統一 2/3) 1)

565. m は定数で，$m>1$ とする．関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{mx}\frac{|t-e|}{t}\,dt\ (x>0)$ について，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) $f(x)$ を求めよ．また，$f(x)$ が最小値をとる x の値を a とするとき，a を m を用いて表せ．

(2) a を (1) で求めた値とする．曲線 $y=f(x)$ とその曲線上の点 $(e,\ f(e))$ における接線，および直線 $x=a$ で囲まれた部分の面積を $S(m)$ とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}S(m)$ を求めよ．必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いてよい．

(17 東京慈恵会医科大学 医学部 2)

566. n は正の整数とする．点 $(n,\ 0)$ を通り，曲線 $C: y=e^{-x}$ に接する直線を L_n としその接点を P_n とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) P_n の座標を求めよ．

(2) L_n と L_{n+1} の交点を Q_n とする．Q_n の座標を求めよ．

(3) 2 直線 L_n，L_{n+1} および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_n とおくとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ の和を求めよ．

(17 旭川医科大学 1)

567. n を 2 以上の整数とする．すべての $x>0$ に対して不等式 $\log x \leqq a\sqrt[n]{x}$ が成り立つような正の定数 a の最小値を a_n とする．

(1) 最小値 a_n を求めよ．

(2) $\log x = a_n\sqrt[n]{x}$ を満たす正の数 x を求めよ．

(3) 2 つの曲線 $y=\log x$，$y=a_n\sqrt[n]{x}$ および x 軸で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ．

(4) すべての $x>0$ に対して不等式 $\log x \leqq a_2\sqrt{x}$ が成り立つことを利用して，(3) の S_n について $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+S_n)}{n}$ を求めよ．

(17 徳島大学 理工・医 (保健) 学部 3)

°568. 関数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ について，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ は $\boxed{\text{ア}}$ である．$f(x)$ の導関数は $f'(x)=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{(1+x^2)^2}$ であり，第 2 次導関数は $f''(x)=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{(1+x^2)^3}$ である．曲線 C には変曲点が 2 つあり，2 つの変曲点のうち x 座標の値が大きい方の変曲点を P とすると，P の座標は $\left(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}}\right)$ である．また，点 P における曲線 C の接線の方程式を $y=ax+b$ (a, b は定数) とすると，a の値は $\boxed{\text{カ}}$，b の値は $\boxed{\text{キ}}$ である．

(2) 関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 C の凹凸，および変曲点を調べて，曲線 C の概形をかけ．

(3) 曲線 C と x 軸および直線 $x=1$ によって囲まれた部分の面積を求めよ．

(17 宮崎大学 工・教育学部 2)

569. $p \geqq 0$, $q \geqq 0$ に対して，定積分 $I(p,\ q)$ を次のように定める．

$$I(p,\ q)=\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$$

(1) $I(p,\ 0)=\boxed{\text{ア}}$ である．$q>0$ のとき，$I(p,\ q)$ に対し，部分積分法を 1 回用いると

$$I(p,\ q)=\boxed{\text{イ}}\,I\left(p+1,\ \boxed{\text{ウ}}\right)$$

を得る．この関係式より，m, n を自然数とすると

$$I(m,\ n)=\frac{\boxed{\text{エ}}}{(m+n+1)!}$$

が得られる．

(注：$\boxed{\text{エ}}$ には，I を用いない m, n の式を入れよ．)

(2) 3 次関数 $y=f(x)$ のグラフが，x 軸と 2 つの共有点 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ $(\alpha<\beta,\ \alpha\beta \fallingdotseq 0)$ をもち，$x=\beta$ で x 軸に接するとする．この 3 次関数 $f(x)$ について，$f(0)=2\alpha\beta^2$ であるとき，$f(x)$ の最高次の係数は $\boxed{\text{オ}}$ である．このとき，この 3 次関数のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積 S を

$I(1,\ 2)$ を用いて表すと

$$S = \boxed{\text{カ}}\, I(1,\ 2)$$

となる．特に $S = \dfrac{3}{8}$ のとき，$\beta - \alpha = \boxed{\text{キ}}$ である．

(注：$\boxed{\text{カ}}$ には，積分記号を含まない α，β の式を入れよ．$\boxed{\text{キ}}$ には，数を入れよ．)

(3) 最高次の係数が 1 である 6 次関数 $y = g(x)$ について，方程式 $g(x) = 0$ が $x = \alpha$ のとき 2 重解，$x = \beta$ のとき 4 重解をもつとする．ただし，$\alpha < \beta$ とする．このとき，曲線 $y = g(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{ク}}$ である．

(17 年 立命館大 全学統一 理系 2 月 2 日 1)

所見：部分積分，置換積分のいい素材

570. $f(x) = \log x,\ g(x) = e^{x-2}$ とおくとき，次の問に答えよ．

(1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ \log a)$ における接線の方程式と，曲線 $y = g(x)$ 上の点 $(b,\ e^{b-2})$ における接線の方程式を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ の両方に接する直線が 2 本あることを示し，それらの方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた 2 直線と曲線 $y = f(x)$ とで囲まれた図形の面積を求めよ．

(17 宮城教育大学 教育学部 (中等教育=数学) 5)

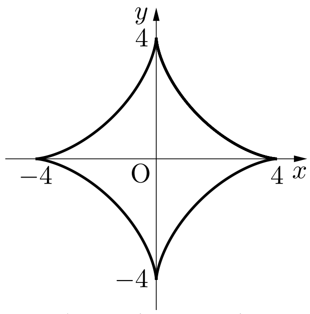
571. $0 \leqq t \leqq 2\pi$ において，媒介変数 t で表された曲線

$$\begin{cases} x = 3\cos t + \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$$

を C とする．

(1) C の長さを求めよ．

(2) C で囲まれた領域の面積を求めよ．



(17 信州大学 医・理学部 6)

572. $a \geqq 0$ とする．$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ の範囲で曲線 $y = xe^{-x}$，直線 $y = ax$，直線 $x = \sqrt{2}$ によって囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする．このとき，$S(a)$ の最小値を求めよ．

(ここで「囲まれた部分」とは，上の曲線または直線のうち 2 つ以上で囲まれた部分を意味するものとする．)

(17 京都大学 理系 (総合人間・教育・理・医・薬・農・工・経済学部) 5)

573. 曲線 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$，$y = \dfrac{8}{e^x + e^{-x}}$ をそれぞれ C_1，C_2 とし，C_1 と C_2 の交点の x 座標を $-a$ および a とする．ただし，$a > 0$ とし，e は自然対数の底とする．以下の問いに答えなさい．

(1) a の値を求めなさい．

(2) $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ とするとき，

$$\tan\left(\int_{\tan\alpha}^{\tan\beta} \frac{1}{t^2+1}\,dt\right) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

が成り立つことを示しなさい．

(3) C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S を求めなさい．

(17 首都大学東京 後期 都市教養・都市環境・システムデザイン学部 4)

574. xy 平面上の 3 つの曲線

$$C_1 : y = 2e^{3x}, \quad C_2 : y = 3e^{x}, \quad C_3 : y = \frac{24}{e^x - e^{-x}}$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) C_1 と C_2，C_2 と C_3，C_3 と C_1 の交点の x 座標をそれぞれ求めよ．

(2) $t = e^x + e^{-x}$ とおくことにより，不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{e^x - e^{-x}}\,dx$ を t の式で表せ．

(3) 3 つの曲線 C_1，C_2，C_3 で囲まれた部分の面積を求めよ．

(17 埼玉大学 後期 理・工学部 4)

575. 曲線 $C : y = e^{-ax}$ について，次の問に答えよ．ただし，$a > 0$ とする．

(1) 曲線 C と y 軸の交点 P における C の接線 l の方程式を求めよ．

(2) 直線 l と x 軸の交点 Q の座標を求めよ．

(3) O を原点とし，R を，Q と x 座標が等しい C 上の点とする．三角形 OPQ の面積を S_1，台形 OPRQ の面積を S_2 とするとき，

$$S_1 < \frac{1}{a}(1 - e^{-1}) < S_2$$

が成り立つことを示せ．

(17 香川大学 教育・農学部 8)

576. 関数 $f(x) = x\log x + \dfrac{x}{2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ．

(2) $0 < x$ において，$f(x) < 0$ となる x の範囲を求めよ．

(3) $0 < x < 1$ において，$-\dfrac{1}{x} < \log x < x$ を示せ．

(4) $0 < a < e^{-\frac{1}{2}}$ とするとき，直線 $x = a$ と曲線 $y = f(x)$ $(x \geqq a)$ および x 軸とで囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする．このとき $\displaystyle\lim_{a\to+0} S(a)$ を求めよ．

(17 関西大学 理系 (全学部 2/7) 3)

577. $p \geqq 0$, $q \geqq 0$ に対して，定積分 $I(p,\ q)$ を次のように定める．

$$I(p,\ q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$$

(1) $I(p,\ 0) = \boxed{\text{ア}}$ である．$q > 0$ のとき，$I(p,\ q)$ に対し，部分積分法を 1 回用いると

$$I(p,\ q) = \boxed{\text{イ}}\, I\Big(p+1,\ \boxed{\text{ウ}}\Big)$$

を得る．この関係式より，m, n を自然数とすると

$$I(m,\ n) = \frac{\boxed{\text{エ}}}{(m+n+1)!}$$

が得られる．

(注：$\boxed{\text{エ}}$ には，I を用いない m, n の式を入れよ．)

(2) 3 次関数 $y = f(x)$ のグラフが，x 軸と 2 つの共有点 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ $(\alpha < \beta,\ \alpha\beta \fallingdotseq 0)$ をもち，$x = \beta$ で x 軸に接するとする．この 3 次関数 $f(x)$ について，$f(0) = 2\alpha\beta^2$ であるとき，$f(x)$ の最高次の係数は $\boxed{\text{オ}}$ である．このとき，この 3 次関数のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積 S を $I(1,\ 2)$ を用いて表すと

$$S = \boxed{\text{カ}}\, I(1,\ 2)$$

となる．特に $S = \dfrac{3}{8}$ のとき，$\beta - \alpha = \boxed{\text{キ}}$ である．

(注：$\boxed{\text{カ}}$ には，積分記号を含まない α, β の式を入れよ．$\boxed{\text{キ}}$ には，数を入れよ．)

(3) 最高次の係数が 1 である 6 次関数 $y = g(x)$ について，方程式 $g(x) = 0$ が $x = \alpha$ のとき 2 重解，$x = \beta$ のとき 4 重解をもつとする．ただし，$\alpha < \beta$ とする．このとき，曲線 $y = g(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{ク}}$ である．

(17 立命館大学 理系 (全学統一 2/2) 1)

所見：部分積分，置換積分のいい素材

578.　関数 $f(x) = \dfrac{5e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$ に対して $c = \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ とおく．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) c の値を求め，$f(x) \geqq c$ となる x の範囲を求めよ．

(3) $R > 1$ とする．曲線 $y = f(x)$ および 2 直線 $x = -\log R$, $y = c$ で囲まれた図形の面積 $S(R)$ を求めよ．

(4) (3) で求めた $S(R)$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{R\to\infty} S(R)$ を求めよ．

(17 名古屋工業大学 1)

579. 曲線 C は曲線 $y=-e^x$ を平行移動したものとする．C と曲線 $y=e^{-x}$ は x 座標が t $(t \geqq 0)$ である点を共有し，その点で共通の接線を持つとする．C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする．

(1) C の方程式を求めよ．
(2) $S(t)$ を求めよ．
(3) $S(t)$ が最大となるような t の値がただ 1 つ存在することを示せ．
(4) $S(t)$ が最大となるような t の値を α とすると，$\alpha > \log \dfrac{12}{5}$ であり，$S(\alpha) < \dfrac{95}{144}$ となることを示せ．必要ならば $\log \dfrac{24}{5} < 1.57$ を用いてもよい．

(17 千葉大学 医・理学部 12)

580. 関数

$$f(x) = 2x^2 - 9x + 14 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} \quad (x > 0)$$

について以下の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ．
(2) 関数 $f(x)$ のすべての極値を求めよ．
(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ．

(17 筑波大学 4)

581. 以下において，e は自然対数の底であり，$2<e<3$ を満たす．

座標平面上で曲線 $y=e^x$ と直線 $y=\dfrac{x}{e}+1$ で囲まれた図形の面積を S とする．方程式 $e^x=\dfrac{x}{e}+1$ の 0 でない実数解を a とすると

$$S = \boxed{\text{(f)}}\frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}\frac{a^2}{e}\boxed{\text{(g)}}\boxed{\text{ヘ}}\frac{a}{e}\boxed{\text{(h)}}\boxed{\text{ホ}}a$$

が成り立つ．また $\displaystyle\int_{-1}^{0} e^x\,dx = \boxed{\text{マ}} - \frac{\boxed{\text{ミ}}}{e}$ なので，a の値を計算しなくても

$$\boxed{\text{ム}} < S < \boxed{\text{ム}} + 1$$

であることがわかる．

(17 東京理科大学 理 (応数・応物・応化)・薬 (生薬) 学部 1(3))

582. n を自然数とし，対数は自然対数とする．$x>0$ の範囲で，2 つの曲線 $C: y = x\log x$ と $C_n: y = k_n x^{n+1}$ を考える．C と C_n は共有点 P_n を持ち，かつ P_n における C と C_n の接線が一致するように定数 k_n を定める．P_n の x 座標を a_n とする．以下の各問に答えよ．

(1) 関数 $y = x\log x$ $(x > 0)$ の増減，極値，および曲線 C の凹凸，変曲点を調べ，C の概形をかけ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ であることは証明せずに用いてよい．

(2) k_n および a_n を n を用いて表せ．

(3) 曲線 C と C_2 および，2 直線 $x = a_1$，$x = a_2$ で囲まれた部分の面積 T を求めよ．

(4) 点 P_n における曲線 C_n の接線と x 軸との交点の x 座標を b_n とし，C_n，2 直線 $x = a_n$，$x = b_n$ および x 軸で囲まれた部分の面積を S_n とする．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 S_n$ を求めよ．ただし，e を自然対数の底とし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ であることは証明せずに用いてよい．

(17 茨城大学 理学部 3)

583. a を実数の定数とし，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で 2 つの曲線 $C_1 : y = 1+\cos 2x$ と $C_2 : y = a\cos x$ を考える．C_1 と C_2 は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において共有点をただひとつ持つとし，その共有点の x 座標を t とする．$0 \leqq x \leqq t$ の範囲で C_1，C_2 および y 軸で囲まれた部分の面積を S_1 とし，$t \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を S_2 とする．以下の各問に答えよ．

(1) 関数 $y = 1+\cos 2x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の増減，最大最小，および曲線 C_1 の凹凸，変曲点を調べ，C_1 の概形をかけ．

(2) a のとり得る値の範囲を求めよ．また，a を t を用いて表し，t のとり得る値の範囲を求めよ．

(3) $S_1 + S_2$ を t を用いて表せ．

(4) t が (2) で求めた範囲を動くとき，$S_1 + S_2$ が最小になる t の値を求めよ．

(17 茨城大学 理学部 1)

584. 2 つの関数

$$f(x) = 2x + \sqrt{3} + 4\sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)\ ,$$
$$g(x) = x + \sqrt{3} - 2\sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

がある．2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ および直線 $x = \pi$ で囲まれた部分を D とする．

(i) 関数 $y = f(x)$ および $y = g(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸を調べ，D を図示せよ．

(ii) D の面積 S を求めよ．

(17 愛媛大学 医・理・教育学部 3(2))

585.　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，2 曲線 $y = \cos 2x$ と $y = \sin x$ で囲まれた図形の面積を求めなさい．

(17 信州大学 教育学部 4)

586.　$0 < a < 3$ とし，$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で 2 つの関数

$$f(x) = 3 - a\sin x, \quad g(x) = 2\cos^2 x$$

を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x) \geqq g(x)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ となる a の値の範囲を求めよ．
(2) 2 つの曲線 C_1: $y = f(x)$ と C_2: $y = g(x)$ が，ちょうど 2 つの共有点をもつとき，共有点の x 座標 x_1，x_2 $(x_1 < x_2)$ と a の値を求めよ．また，そのときの C_1 と C_2 の概形を同一座標平面上にかけ．
(3) (2) のとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(17 金沢大学 理工・医薬保健学域 3)

587.　xy 平面上に円 C と双曲線 L が次の式で与えられている．

$$C : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$$
$$L : xy = 1$$

次の問いに答えよ．

(1) 円 C と双曲線 L の共有点をすべて求めよ．
(2) 円 C の中心を P とし，(1) で求めた共有点のうち，x 座標が最も大きいものを Q，その次に大きいものを R とする．このとき，$\angle$QPR を求めよ．
(3) 以下の領域の面積を求めよ．

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqq 8 \\ xy \leqq 1 \end{cases}$$

(17 埼玉大学 理 (数学)・工学部 14)

588.　次の媒介変数表示で与えられる座標平面の曲線 C を考える．

$$x = \sin^2\theta, \quad y = \sin^2\theta\cos\theta$$

ただし θ は 0 から π までの範囲を動くものとする．次の問いに答えよ．

(1) C の概形を描け．
(2) C で囲まれる領域の面積を求めよ．

(17 お茶の水女子大学 理学部 (数学・物理・情報科学) 2)

589. a, b を正の定数とし，$f(x) = -xe^{-\frac{x}{a}}$ とする．$y = f(x)$ のグラフを x 軸に関して対称移動し，さらに x 軸方向に $-a$ だけ平行移動して得られる曲線を $y = g(x)$ とし，$h(x) = bg(x)$ とする．また，曲線 $y = f(x)$ の変曲点を P とし，点 P における曲線 $y = f(x)$ の接線を l とする．関数 $h(x)$ の最大値が 1 であるとき，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) 直線 l の方程式を a を用いて表せ.

(2) 関数 $g(x)$ を a を用いて表せ.

(3) 定数 a, b の積 ab の値を求めよ.

(4) 直線 l と x 軸との交点の x 座標が 4 であるとき，曲線 $y = f(x)$, $y = h(x)$ と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(17 福岡教育大学 中等教育 (数学) 4)

◊590. $f(x) = xe^{1-x^2}$ とする．2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = x^k$ で囲まれた部分の面積を S_k とする．ただし，k は自然数とする．次の問いに答えよ．必要があれば

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x^2} = 0$$

が成り立つことを用いてよい.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $y = f(x)$ の極値，グラフの凹凸と変曲点，および漸近線を求め，グラフの概形をかけ.

(3) S_k を，k を用いて表せ.

(4) 次の条件 $(*)$ を満たす最小の自然数 n を求めよ.

$(*)$ すべての自然数 m に対して，$4S_{2n-1} > 7S_{2m}$ が成り立つ.

(17 新潟大学 理系 5)

591. 曲線 C は曲線 $y = -e^x$ を平行移動したものとする．C と曲線 $y = e^{-x}$ は x 座標が t $(t \geqq 0)$ である点を共有し，その点で共通の接線を持つとする．C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする.

(1) C の方程式を求めよ.

(2) $S(t)$ を求めよ.

(3) $S(t)$ が最大となるような t の値がただ 1 つ存在することを示せ.

(17 千葉大学 先進・理・薬・工学部 10)

592. n を 2 以上の自然数とする．媒介変数 t を用いて $x = \cos^n t$, $y = \sin^4 t$ $\left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ と表される xy 平面上の曲線を C_n とする．また，$t = \frac{\pi}{3}$ に対応する点におけ

る C_n の接線を l_n とする．曲線 C_n，接線 l_n および y 軸で囲まれた部分の面積を S_n とする．ただし，C_n と l_n の共有点が 1 個であることを証明なしで用いてよい．

(1) 接線 l_n の方程式を求めよ．

(2) S_2 を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n nS_n$ を求めよ．

(17 徳島大学 医・歯・薬学部 3)

593. 曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ を C とする．自然数 n に対して，点 $\mathrm{P}_n\left(n,\ \dfrac{1}{n}\right)$ における曲線 C の接線を l_n とする．また，2 直線 l_n，l_{n+1} と曲線 C で囲まれた図形の面積を S_n とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) l_n と l_{n+1} の交点を求めよ．

(2) S_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^3S_n$ を求めよ．ただし，必要があれば次の不等式を証明せずに用いてもよい．

$$x>0 \text{ のとき}\quad x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4<\log(1+x)<x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$$

(17 大阪府立大学 現代システム科学・生命環境科学域 5)

594. 曲線 $C: y=\log x$ の点 $\mathrm{P}(e,\ 1)$ における接線を l とする．定数 a，b に対し，曲線 $C': y=ax^2+b$ が P を通り，P における接線が l に一致しているとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) l の方程式を求めよ．

(2) a，b の値を求めよ．

(3) 2 曲線 C，C' と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(17 三重大学 教育・生物資源・人文学部 4)

595. 関数 $f(x)=x(2x-1)e^{-3x}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $x \geqq 0$ において $e^x>x$ が成り立つことを示し，これを用いて $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ を示せ．

(2) $x \geqq 0$ における $f(x)$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ．

(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ において，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(17 奈良女子大学 理学部 2)

596. $f(x) = 2xe^{-x^2}$ とする．$a > 0$ に対し，曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = a$ および x 軸で囲まれた領域の面積を $S(a)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ の最大値をとる x の値 p を求めよ．

(2) 極限 $k = \lim_{a \to \infty} S(a)$ の値を求めよ．

(3) (1) で求めた p に対し，$b > p$ が成り立つとする．点 $(b,\ f(b))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線と，直線 $x = b$ および x 軸で囲まれた領域の面積を $T(b)$ とする．(2) で求めた k に対し，$S(b)+T(b) = k$ となるように，b の値を定めよ．

(17 信州大学 医・理・工学部 5)

597. 曲線 $C : y = e^x - 1$ の点 $(t,\ e^t - 1)$ における法線を l とする．ただし $t > 0$ とする．また C と直線 $x = t$ および x 軸で囲まれた図形の面積を $S_1(t)$ とし，l と直線 $x = t$ および x 軸で囲まれた図形の面積を $S_2(t)$ とする．

(1) l の方程式を求めよ．

(2) $S_1(t),\ S_2(t)$ を求めよ．

(3) $S_2(t) > S_1(t)$ を示せ．

(17 三重大学 後期 工・教育学部 4)

598. 定数 a に対し，$f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$，$g(x) = \dfrac{1-(x-a)^2}{1+(x-a)^2}$ とする．関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ が同じ $x = t$ で極大になるとする．次の問いに答えよ．

(1) a の値と t の値を求めよ．

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = g(x)$ のグラフのすべての共有点の座標を求めよ．

(3) $x \geqq 0$ において，曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(17 秋田大学 教育文化・理工・医学部 6)

599. 座標平面内の 2 つの曲線

$$C_1 : y = \log(2x), \quad C_2 : y = 2\log x$$

の共通接線を l とする． このとき以下の問いに答えよ．

(1) 直線 l の方程式を求めよ．

(2) $C_1,\ C_2$ および l で囲まれる領域の面積を求めよ．

(17 岡山大学 理・工・環境理工・農・医・歯・薬・教育学部 2)

°600. 曲線 $y = \log \dfrac{x+2}{4-x}$ と x 軸との交点の座標は $\left(\boxed{\text{タ}}, 0\right)$ である．また，この曲線と x 軸および直線 $x = 3$ で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{チ}}\log\boxed{\text{ツ}} - \boxed{\text{テ}}\log 3$ である．

(16 国士舘大学 理工学部 1(4))

601. $x > 0$ の範囲において，$f(x) = \dfrac{\log x^2}{x^2}$，$g(x) = kx^2$ $(k > 0)$ とおく．

2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ が共有点を持ち，その共有点におけるそれぞれの接線が一致するとき，共有点の x 座標を p とする．次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

なお，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x^2}{x^2} = 0$ であることを証明なしで用いてよい．

(1) 曲線 $y = f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べて，そのグラフをかけ．

(2) p の値を求めよ．

(3) 直線 $x = 1$ と 2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(17 名古屋市立大学 医・芸術工学部 3)

602. 定数 $a > 0$ に対し，曲線 $y = a\tan x$ の $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ の部分を C_1，曲線 $y = \sin 2x$ の $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ の部分を C_2 とする． 以下の問いに答えよ．

(1) C_1 と C_2 が原点以外に交点をもつための a の条件を求めよ．

(2) a が (1) の条件を満たすとき，原点以外の C_1 と C_2 の交点を P とし，P の x 座標を p とする．P における C_1 と C_2 のそれぞれの接線が直交するとき，a および $\cos 2p$ の値を求めよ．

(3) a が (2) で求めた値のとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ．

(17 九州大学 医・歯・薬・工・理・経済・芸術工学部 1)

13.6 体積

603. 実数全体を定義域とする関数

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

に対して，その逆関数を $f^{-1}(x)$ と表す．曲線 $y = f(x)$ を C_1 とし，曲線 $y = f^{-1}(x)$ を C_2 とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．また，$y=f(x)$ の値域を求めよ．

(2) $f^{-1}(x)$ を求めよ．また，C_1 と C_2 の交点をすべて求めよ．

(3) 変数変換 $x=\alpha\tan\theta$ を用いて，定積分 $J=\displaystyle\int_0^{\alpha}\frac{dx}{x^2+\alpha^2}$ を求めよ．ただし，α は正の定数とする．

(4) 2 曲線 C_1，C_2 の $x \geqq 0$ の部分で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(17 大阪府立大学 中期 工学域 5)

◊604. a は正の実数とする．xy 平面上に 2 曲線

$$C_1 : y=a(1-x^2) \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$
$$C_2 : x=\cos t, \quad y=\frac{1-\sin t}{\sin t} \quad \left(0<t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

がある．y 軸と曲線 C_1 および曲線 C_2 で囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V_1 とする．また，x 軸と曲線 C_1 および曲線 C_2 で囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V_2 とする．$V_1+V_2=\dfrac{128}{15}\pi$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の交点の座標を求めよ．

(3) V_2 の値を求めよ．

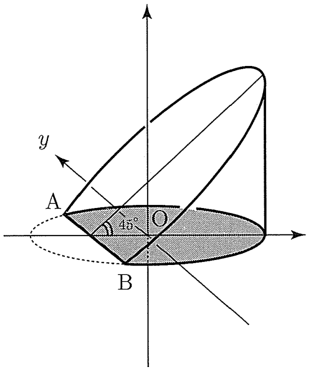
(17 東京農工大学 工・農学部 4)

605. 座標空間内の平面 $H : z=0$ とその上の曲線 $C : \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を考える．C 上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする．C 上の 2 点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(-1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ に対し，線分 AB を含み平面 H と $45°$ の角をなす平面を T とする．ただし，平面 T と z 軸の交点の z 座標は正であるとする．平面 H，平面 T および曲面 K が囲む二つの立体のうち z 軸と交わるものを V とする．次の問いに答えよ．

(1) 立体 V と平面 H の共通部分 (下図の灰色で示される部分) の面積を求めよ．

(2) 立体 V を平面 $x=t$ $(-1<t<2)$ で切ったとき，断面の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ．

(3) 立体 V の体積を求めよ．



(17 広島大学 理・工・生物生産・医・歯・薬・教育・総合科学部 4)

606. 半径 1 の円柱を，底面の直径を含み底面と角 α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ をなす平面で切ってできる小さい方の立体を考える．ただし，円柱の高さは $\tan\alpha$ 以上であるとする．次の問いに答えよ．

(1) この立体の体積 V を求めよ．

(2) 切り口の面積 A を求めよ．

(3) この立体の側面積 B を求めよ．

(17 大阪市立大学 理・医・工学部 1)

607. 直交する 2 つの直線 l_1 と l_2 がある．l_1 と平行で距離 r の直線を l_1 のまわりに 1 回転してできる円柱を C_1，l_2 と平行で距離 r の直線を l_2 のまわりに 1 回転してできる円柱を C_2 とし，2 つの円柱 C_1 と C_2 の共通部分の立体を D とする．以下の問いに答えよ．

(1) 直線 l_1 に直交する平面による D の切り口の概形を図示せよ．

(2) 直線 l_1 と l_2 を含む平面と平行な平面による D の切り口の概形を図示せよ．

(3) D の概形を図示せよ．

(4) D の体積を求めよ．

(17 浜松医科大学 2)

608. $x > 0$ に対して，連続関数 $f(x)$ は，等式

$$f(x) = 2\log x - \int_1^e tf(t)\,dt$$

をみたすものとする．また，曲線 $y = f(x)$ の接線のうち，原点を通るものを l とし接点を $(u,\ v)$ とする．以下の各問に答えよ

(1) $f(x)$ を求めよ

(2) 接点 $(u,\ v)$ を求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$，直線 l および x 軸で囲まれる領域を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(17 札幌医科大学 4)

◊609. y 軸を回転軸として，線分 $y=0\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を 1 回転したものを底面とし，放物線の一部 $y=x^2-\dfrac{1}{2}$ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq \sqrt{10}\right)$ を 1 回転したものを側面とする容器を V とする．半径が $\dfrac{3}{2}$ の鉄球を B とする．次の問いに答えよ．ただし，容器 V に水が入っているときの水面は底面に平行であるとする．また，高さは底面から測るものとする．水が入っている容器 V に鉄球 B を入れるときは，容器 V につかえて止まるまで鉄球 B をゆっくり沈めるものとする．

(1) 空の容器 V に水を入れたところ水面の高さが p となった．V に入っている水の体積を p で表せ．

(2) 水が入っている容器 V に鉄球 B を入れた．このときの鉄球 B の中心の高さを求めよ．

(3) 体積が $\dfrac{63}{8}\pi$ の水が入っている容器 V に鉄球 B を入れた．このときの水面の高さを求めよ．

(4) 容器 V に水が入っている．この容器 V に鉄球 B を入れると水面が鉄球 B の中心より $\dfrac{1}{2}$ だけ高くなった．入っていた水の体積を求めよ．

(17 同志社大学 理工学部 (2/10) 3)

610. e を自然対数の底として，曲線 $C: y=e^{2x}$ を考える．x 軸上の点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ から曲線 C へ引いた接線を l とし，C と l の接点を Q とする．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) 接点 Q の座標を t を用いて表せ．

(2) 曲線 C，接線 l, および直線 $x=t$ で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 $V(t)$ を求めよ．

(3) (2) の $V(t)$ に対して，極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log V(t)}{t}$ を求めよ．ただし，対数は自然対数である．

(17 茨城大学 工学部 3)

611. $a>0,\ b>0$ とする．xy 平面上に，4 点 $(a,\ b)$，$(a-b,\ 0)$，$(a,\ -b)$，$(a+b,\ 0)$ を頂点とする正方形がある．この正方形で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする．以下の問に答えよ．

(1) $a \geqq b$ のとき，V を $a,\ b$ を用いて表せ.

(2) $a < b$ のとき，V を $a,\ b$ を用いて表せ.

(3) $a \geqq 1$ かつ $b = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a^2}+1\right)$ のとき，V の最小値とそのときの a の値を求めよ.

(17 岐阜大学 後期 医・工・教育学部 4)

612. 不等式 $(x^2+y^2)^2+2(x^2+y^2)+z^2 \leqq 1$ で表される立体について，次の問いに答えよ.

(1) 平面 $z=t$ による切り口の面積を求めよ.

(2) 立体の体積を求めよ.

(17 兵庫県立大学 工学部 4)

613. $x>0$ で定義された微分可能な関数 $f(x)$ を

$$3xf(x)+3\int_1^x f(t)\,dt = 4x^3+3\int_1^2 f(t)\,dt$$

によって定める．曲線 $C: y=f(x)$ を考える．以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ を求めよ.

(2) $g(x)=|x-1|f(x)$ とおくとき，$g(x)$ は $x=1$ で微分可能でないことを示せ.

(3) C と直線 $l: y=a$ との共有点の個数を，a の値によって分類せよ.

(4) C と 3 直線 $y=0,\ x=1,\ x=2$ で囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

(17 京都府立大学 生命環境学部 7)

614. 座標平面上の二つの曲線 $y=2\sqrt{x},\ y=x^2-3x$ をそれぞれ $C_1,\ C_2$ とする．次の問いに答えよ.

(1) C_1 と C_2 の共有点の座標をすべて求めよ.

(2) C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ.

(3) C_1 と C_2 で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

(17 広島大学 後期 理学部 (数学) 1)

615. 座標空間内の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}\bigl(0,\ 1,\ \sqrt{2}\bigr)$，$\mathrm{D}\bigl(0,\ -1,\ \sqrt{2}\bigr)$ を頂点とする四面体 ABCD を考える．このとき以下の問いに答えよ.

(1) 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ t)$ を通り z 軸に垂直な平面と，辺 AC が点 Q において交わるとする．Q の座標を t で表せ.

(2) 四面体 ABCD (内部を含む) を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

(17 岡山大学 理・工・環境理工・農・医・歯・薬・教育学部 3)

616. 不等式 $0 < a < 1$ を満たす定数 a に対して，曲線 $C : y = a - 1 - \log x\ (x > 0)$ を考える．s を正の実数とし，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ a - 1 - \log s)$ における接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ $(u(s),\ 0)$，$(0,\ v(s))$ とする．このとき，次の問に答えよ．必要があれば，$\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ を証明なしで使ってよい．

(1) 関数 $u(s)$，$v(s)$ を s の式で表せ．

(2) 関数 $t = u(s)$，$t = v(s)$ の 2 つのグラフを，増減・凹凸および交点の座標に注意して，同じ st 平面上に図示せよ．

(3) 関数 $t = u(s)$，$t = v(s)$ の 2 つのグラフで囲まれた図形を t 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

(17 名古屋大学 理・医・工・農・情報学部 1)

617. $f(x) = 11x - 9\sqrt{2}x^2$ とする．原点を O とする座標平面上に曲線 $C_1 : y = f(x)$ と，直線 ℓ_1: $y = x$ がある．次の問いに答えよ．

(1) ℓ_1 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a)$ を通り l_1 に垂直な直線 ℓ_2 が，C_1 上の点 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$ で C_1 に接している．a と b の値をそれぞれ求めよ．

(2) (1) で求めた a と b の値を用いて，実数 t は $0 < t < \sqrt{2}a$ を満たすとし，曲線 $C_2 : y = f(x)\ (0 \leqq x \leqq b)$ とする．第 1 象限にある ℓ_1 上の点 P が $\mathrm{OP} = t$ であるとき，P を通り ℓ_1 に垂直な直線と C_2 の交点を Q とする．Q の x 座標を t を用いて表せ．

(3) (1) で定まる ℓ_2 と (2) で定めた C_2 に対して，ℓ_1, ℓ_2, C_2 で囲まれた部分を l_1 のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

(17 同志社大学 理系 (全学部 2/4) 2)

618. xyz 空間において，z 軸を回転軸として平面 $x = -\sqrt{2}$ を，y 軸の負の部分と交わるように 45° 回転させてできた平面を α とする．さらに球面 $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 8$ を α で 2 つに分けてできる 2 曲面のうち，z 軸と交わらない方の曲面を β とする．ただし，β はこの球面と α との共通部分を含む．曲面 β を平面 $z = -2$ で切ったときの切り口を曲線 C とし，C 上の動点を P とする．以下の問いに答えよ．

(1) 平面 α と曲面 β とで囲まれた部分の体積を求めよ．

(2) 定点 $\mathrm{A}(5,\ 4,\ 1)$ を取るとき，線分 AP の長さの最大値を求めよ．またそのときの P の座標を求めよ．

(17 福井大学 医学部 4)

619. a を定数とし，

$$f(x) = x + a + 2\sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$
$$g(x) = x + a - 2\sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

とおく．2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ で囲まれた部分を D とする．

(1) 関数 $y = f(x)$ および $y = g(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸を調べよ．さらに，$a = \sqrt{3}$ のとき，D を図示せよ．

(2) 曲線 $y = g(x)$ が x 軸と接しているとき，a の値を求めよ．このとき，D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

(17 愛媛大学 医・工・理学部 8)

620. 関数 $f(x) = xe^{-x}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べて，そのグラフをかけ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ を使ってよい．

(2) 曲線 $y = f(x)$，直線 $y = e^{-1}$ および y 軸とで囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

(17 兵庫県立大学 中期 理学部 3)

621. 曲線 $y = \sqrt{x}\sin x$ と曲線 $y = \sqrt{x}\cos x$ を考える．$\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ の区間でこれらの 2 つの曲線に囲まれる領域が x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

(17 お茶の水女子大学 理学部 4)

◊622. 2 つの曲線 $C_1 : y = \sin x$ と $C_2 : y = \sin(x - \theta)$ について以下の問いに答えよ．ただし，$0 < \theta < \pi$ とする．

(1) C_1，C_2 の交点の x 座標をすべて求めよ．

(2) C_1，C_2 の交点の x 座標のうち，負の範囲で最大の値を α，正の範囲で最小の値を β とおく．$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲で，2 つの曲線 C_1，C_2 で囲まれた図形を，x 軸の周りに 1 回転させて得られる立体の体積 $V(\theta)$ を求めよ．

(3) (2) で得られた $V(\theta)$ が最大となる θ の値を θ_0 とするとき，$\cos\theta_0$ の値を求めよ．

(17 福井大学 工・教育学部 4)

$\Diamond$**623.** $0 < a < b$ とする．座標空間内の 4 点 $(a,\ 0,\ 1)$，$(a,\ 0,\ -1)$，$(b,\ 0,\ 1)$，$(b,\ 0,\ -1)$ を頂点にもつ xz 平面上の長方形の周および内部を D とする．以下の問に答えよ．

(1) D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる図形を E とし，さらに E を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体を V とする．V の体積を求めよ．

(2) D を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体を F とし，さらに F を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体を W とする．W の体積を求めよ．

(3) V と W の体積の大小を比較せよ．

(17 神戸大学 後期 理科系 5)

$\Diamond$**624.** 点 O を原点とする座標空間内で，一辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす．また，点 A(1, 0, 0) に対して，∠AOP を θ とおく．ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) 点 Q が (0, 0, 1) にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 点 Q が平面 $x = 0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする．K の体積を求めよ．

(17 東京大学 理科 6)

$\Diamond$**625.** xyz 空間の zx 平面にある曲線 $z = x^2$ の，$0 \leqq z \leqq h$ に対する部分を C とする．ただし $h > 0$ である．回転軸 ℓ を z 軸にとり，C を ℓ のまわりに 1 回転させて得られる曲面からなる容器を S とする．S に水を満たした後，S の回転軸 ℓ を z 軸に対して角 θ だけ傾ける．以下 $a = \tan\theta$ とおく．

(1) 水がすべてこぼれず，容器の中に残るための条件は $0 \leqq a < \boxed{(\text{あ})}$ である．このとき空気に触れている水面の面積を $T(a)$ とすると $T(a) = \boxed{(\text{い})}$ である．$\displaystyle\lim_{a \to +0} T'(a) = \boxed{(\text{う})}$ であり，a の関数 $T(a)$ が $0 < a < \boxed{(\text{あ})}$ の範囲に極大値をもつための条件は $h > \boxed{(\text{え})}$ である．

(2) $a = \sqrt{h}$ のとき容器に残った水の体積 V を求めると $V = \boxed{(\text{お})}$ である．ただしその計算にあたって必要ならば次の定積分の値を用いてよい．

$$\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{3}{2}}\,dt = \frac{3\pi}{16},\quad \int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}\,dt = \frac{3\pi}{128},\quad \int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{\pi}{16}$$

(17 慶應大学 医学部 4)

$\Diamond$626. xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とおく．回転体 L に含まれる点のうち，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく．

(1) t を $0 \leqq t \leqq 2$ を満たす実数とする．xy 平面上の点 $(0,\ t)$ を通り，y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする．$t=(2\cos\theta)^2$ $\left(\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$S(t)$ を θ を用いてあらわせ．

(2) M の体積 V を求めよ．

(17 大阪大学 理系 5)

627. 曲線 $y=xe^x$ を C とし，C 上の点 $(1,\ e)$ における接線を l とする．次の問いに答えなさい．

(1) 接線 l の方程式を求めなさい．

(2) 曲線 C と接線 l および x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい．

(17 信州大学 教育学部 5)

628. 座標空間内に四面体 ABCD があり，次をみたす．

$$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 3),\ \mathrm{B}(0,\ 2\sqrt{3}, 1),\ \mathrm{C}(2, 0,\ 1),\ \mathrm{BD}=4,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=-12$$

原点 O を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の球を K とする．

(1) 線分 AD の長さを求めよ．

(2) O から平面 ABC に下ろした垂線 OH の長さを求めよ．

(3) $\mathrm{OD}=\sqrt{5}$ のとき，D の座標を求めよ．さらに，四面体 ABCD と球 K の共通部分の体積 V を求めよ．

(17 名古屋工業大学 後期 工学部 (第一部) 4)

629. 曲線 $C_1 : y=\sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$，曲線 $C_2 : y=\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ について，次の問に答えよ．

(1) 2 曲線 C_1 と C_2，および y 軸で囲まれた図形 D の面積を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int x\sin x\,dx$ と $\displaystyle\int x\cos x\,dx$ を求めよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$ と $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$ を (2) を用いて求めよ．

(4) 図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

(17 香川大学 医学部 1 工学部 4)

630. a は $0 < a < 2$ を満たす実数とする．座標平面において，点 $\mathrm{P}\left(a,\ a^2\right)$ を通り，直線 $y = 2x$ に垂直な直線を l とし，l と直線 $y = 2x$ の交点を Q とする．また，曲線 $y = x^2$ $(0 \leqq x \leqq a)$，直線 l，および直線 $y = 2x$ で囲まれた部分を D とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 直線 l の方程式を求めよ．
(2) 原点 O と点 Q の距離を求めよ．
(3) 線分 PQ の長さを求めよ．
(4) D の面積を求めよ．
(5) D を直線 $y = 2x$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

(17 東京理科大学 理学部 (数学) 5)

631. 長さ 5 の線分 PQ がある．点 $\mathrm{P}(x,\ 0)$ は x 軸上を $0 \leqq x \leqq 5$ をみたしながら動き，点 $\mathrm{Q}(0,\ y)$ は y 軸上を $0 \leqq y \leqq 5$ をみたしながら動く．また線分 PQ を 2 : 3 に内分する点を R とする．

このとき，点 R の軌跡と x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\pi$ である．

また，この図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は $\boxed{\text{ソ}}\pi$ である．

(17 早稲田大学 人間科学部 B 方式 5)

632. 次の関数 $f(x)$，$g(x)$ に対して，以下の問いに答えよ．

$$f(x) = \begin{cases} x\log x & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}, \qquad g(x) = x(x-1)$$

(1) $f(x)$ が最小となるような x の値 a，および $f(a)$ の値を求めよ．
(2) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ は，ちょうど 2 つの共有点をもつことを示せ．
(3) (1) の a について，曲線 $y = f(x)$，曲線 $y = g(x)$ で囲まれた図形のうち，$x \geqq a$ の部分を D とする．D を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V の値を求めよ．

(17 富山大学 医・薬・理 (数) 学部 1・工学部 2)

633. $0 < h < 1$ とする．xy 平面上の曲線 $y = \dfrac{3\log x}{x^2}$ $(x \geqq 1)$ を C_1，曲線 $y = 3h^2\log x$ $(x \geqq 1)$ を C_2 とする．次の問いに答えよ．

必要であれば，$\displaystyle\lim_{h \to +0} h\log h = 0$ を証明なしに用いてよい．

(1) 曲線 C_1 と C_2 の共有点をすべて求めよ．

(2) n を自然数とする．$f(x)=\dfrac{(\log x)^n}{x^{2n-1}}$，$g(x)=x(\log x)^n$ のとき，

$f'(x)=(-2n+1)\dfrac{(\log x)^n}{x^{2n}}+v(x)$，$g'(x)=(\log x)^n+w(x)$ と表される．

$v(x)$，$w(x)$ を求めよ．

(3) 曲線 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を $S(h)$ とする．$S(h)$ を h で表せ．

(4) (3) で求めた $S(h)$ に対して，極限 $\displaystyle\lim_{h\to+0} S(h)$ を求めよ．

(5) 曲線 C_1 と C_2 で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $T(h)$ とする．極限 $\displaystyle\lim_{h\to+0} T(h)$ を求めよ．

(17 同志社大学 理系 (政策・文化情報 (理系)・生命医科・スポーツ健康 2/7) 4)

13.7　微積混合

634.　正の実数 a は，$\dfrac{e^a+e^{-a}}{2}=\sqrt{2}$ をみたすとする．次の問いに答えよ．

(1) $a<1$ であることを示せ．ただし，$2.7<e<2.8$ であることを使ってもよい．

(2) $0<x<1$ において，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$1+x^2>\left(\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right)^2$$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$ を用いて，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\pi<\frac{2\sqrt{2}}{\log(1+\sqrt{2})}$$

(17 金沢大学 後期 理工学域 (数物科学) 3)

635.　$a>0$ を実数とし，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減，凹凸などを調べて，そのグラフを図示せよ．

(2) 曲線 $C: y=f(x)$ 上の点で接線の傾きが最小になる点を $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ とする．p を a で表せ．

(3) 曲線 C の点 P における法線が原点を通るとき，a の値を求めよ．

(4) $x+\sqrt{x^2+a}=t$ とおいて，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{a}} f(x)\,dx$ を求めよ．

(17 岡山県立大学 中期 情報工学部 3)

636.　$x \geqq 1$ で定義された連続な関数 $f(x)$ は次の 2 つの条件をみたすとする．

(i) $x>1$ で $f(x)$ は微分可能であり，$f'(x)>0$ をみたす.
(ii) $f(1)=1$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

$a>0$ に対して，$g(x)=a\log f(x)$ $(x \geqq 1)$ とおくとき，以下の問に答えよ.

(1) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ がただ 1 つの共有点をもつように a の値を定めよ．ただし，必要であれば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いてよい.

(2) $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ とおく．このとき，$f(x)$ が条件 (i), (ii) をみたすことを確かめよ．また，$\log f(x)$ の不定積分を求めよ.

(3) (2) で定めた $f(x)$ に対して，2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ がただ 1 つの共有点 P をもつとする．点 P を通り y 軸に平行な直線と x 軸および曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

(17 神戸大学 後期 理科系 2)

637. 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}\quad(-1<x<1)$$

で定め，$f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とする．ただし，対数は自然対数とする．次の問いに答えよ.

(1) $0<x<1$ において，不等式

$$f(x)>2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $g(x)$ を求めよ．ただし答えのみでよい.

(3) t を正の実数とする．xy 平面において，曲線 $y=g(x)$ と y 軸，および 2 直線 $x=t$, $y=1$ で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする．$\displaystyle\lim_{t\to\infty}S(t)$ を求めよ.

(4) 曲線 $y=\{g(x)\}^2$ 上の点 $\bigl(p,\ \{g(p)\}^2\bigr)$ における接線を l とする．接線 l の傾きが最大になる p の値と，そのときの傾きを求めよ.

(17 東京農工大学 工・農学部 3)

638. 正の実数 a に対して

$$f(x)=(2-ax)e^{-a(x-2)}$$

とする．次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の増減を調べ，グラフの概形を描け.

(2) $f(x)$ を最小にする x の値を p で表す．このとき

$$S=\int_0^p |f(x)|\,dx$$

を a を用いて表せ.

(3) (2) の S を最小にする a の値を求めよ．

(17 早稲田大学 基幹・創造・先進理工学部 2)

°639. 関数 $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ を求めよ．

(2) 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ における $f(x)$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ．

(17 奈良女子大学 後期 理学部 (数物・化学生命環境) 2)

640. 関数 $f(x) = 1 + \sin x - x\cos x$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減を調べ，最大値と最小値を求めよ．

(2) $f(x)$ の不定積分を求めよ．

(3) 次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

(17 北海道大学 理系 2)

641. 関数 $f(x) = \sqrt{1+e^{2x}} - e^x$ について，以下の問いに答えよ．

(1) x が実数全体を動くとき，$f(x)$ がとる値の範囲を求めよ．

(2) $t = f(x)$ とおくとき，x を t の式で表せ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\int_0^{s} f(x)\,dx$ の値を求めよ．

(17 千葉大学 後期 医・工・理 (数・情) 学部 3)

13.8 弧長

642. 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が

$$x = \cos t + \frac{1}{3}\cos 3t, \quad y = \sin t + \frac{1}{3}\sin 3t$$

で表される．時刻 t における点 P の速度を $\overrightarrow{v}$ とし，加速度を $\overrightarrow{\alpha}$ とする．

(1) 点 P の y 座標の取り得る値の範囲を求めよ．

(2) $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，速度 $\overrightarrow{v}$ が直線 $y = \sqrt{3}x$ と平行である時刻 t を求めよ．

(3) $0 \leqq t \leqq 2\pi$ のとき，加速度の大きさ $|\overrightarrow{\alpha}|$ の最小値とその値を取る時刻 t を求めよ．

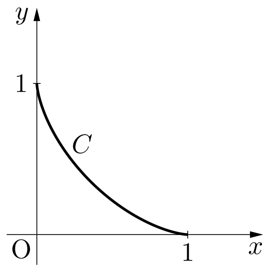
(4) 時刻 $t=0$ から $t=\pi$ までに点 P が通過する道のり L を求めよ．

(17 名古屋工業大学 2)

643. 媒介変数 t を用いて

$$x=\cos^3 t,\quad y=\sin^3 t\quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

で表される曲線を C とする．C の概形は右図のようになる．このとき，次の各問に答えよ．



(1) 曲線 C 上の点 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{8},\ \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$ における C の法線の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C の長さを求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸および y 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

(17 宮崎大学 医学部 7)

644. $x \geqq 0$ の範囲で，2 つの関数

$$f(x)=x\sqrt{x},\quad g(x)=x\sqrt{e^{x-1}}$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) a を正の定数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ を求めよ．

(2) $1 \leqq x \leqq 3$ における曲線 $y=f(x)$ の長さを求めよ．

(3) 不等式 $f(x) \leqq g(x)$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つときの x の値を求めよ．

(4) 2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(17 岩手大学 理工学部 4)

645. e を自然対数の底とする．座標平面上を動く点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が，

$$x=e^{-2t}\cos t,\quad y=e^{-2t}\sin t$$

で表されているとする．以下の各問の $\boxed{}$ にあてはまる答えを，解答用紙 (省略) の指定の欄に記入しなさい．

(1) 点 P の時刻 t における速度ベクトル $\vec{v}$ を求めると，$\vec{v}=\left(\boxed{せ},\ \boxed{そ}\right)$ である．ただし，点 P の時刻 t における速度ベクトル $\vec{v}$ は，$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と表される．

(2) 点 P が $t=(n-1)\pi$ から $t=n\pi$ までの間に動いた道のりを L_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．このとき，$L_n=\boxed{\text{た}}$ である．ただし，一般に点 P が $t=t_1$ から $t=t_2$ までの間に動いた道のりは，$\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}|\overrightarrow{v}|\,dt$ と表される．

(3) (2) で求めた L_n に対し，無限級数 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}L_m$ の和は $\boxed{\text{ち}}$ である．

(17 茨城大学 後期 工学部 2)

646. $0<\theta<\pi$ とし，媒介変数 t によって表される曲線 $C: x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$ 上の点 $\mathrm{P}(\theta-\sin\theta,\ 1-\cos\theta)$ における法線 l と直線 $x=\pi$ との交点を Q とする．また，l と x 軸との交点を R とする．以下の問いに答えよ．

(1) l の方程式を求めよ．

(2) 線分 PQ の長さを $f(\theta)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi-0}f(\theta)$ の値を求めよ．

(3) 原点から P までの曲線 C の長さを s とする．このとき，不等式 $s<2\mathrm{PR}$ を示せ．

(17 福井大学 医学部 3)

647. 関数 $f(x)=\log\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin x\right)$ $(0<x<\pi)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフを図示せよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ の $y\geqq 0$ である部分の長さを求めよ．

(17 岡山県立大学 情報工学部 3)

648. n を自然数とし，曲線 $C: y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ と直線 $l_n: y=\dfrac{2}{n}x+b_n$ が接するように定数 b_n を定める．ただし，e は自然対数の底とする．C と l_n の接点を $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) x_n，y_n および b_n を n を用いて表し，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ．

(2) すべての自然数 n に対して，不等式 $y_n>y_{n+1}$ および $x_n>x_{n+1}$ を示せ．

(3) 曲線 C の，点 P_1 から点 P_{n+1} までの部分の長さを L_n とする．L_n を n を用いて表せ．

(4) (3) で定めた L_n に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}L_n$ を求めよ．

(17 茨城大学 後期 理学部 (数学・情報数理) 1)

◊649. xy 平面上の曲線 $C : y = f(x)$ に関し，以下の問いに答えよ．ただし，

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

である．

(1) $f(x)$ は以下の関係式を満たすことを示せ．
 (i) $\{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 = 1$
 (ii) $f''(x) = f(x)$
 ただし，$f'(x)$ および $f''(x)$ は，それぞれ，$f(x)$ の x に関する 1 階および 2 階の導関数を表す．

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ と点 $\mathrm{B}(0,\ f(0))$ の間の曲線の長さ L を求めよ．ただし，a は $a \geqq 0$ を満たす定数である．

(3) 点 A における曲線 C の接線上に点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ を AP の距離が L に等しくなるようにとる．ただし，$X \leqq a$ とする．このとき，X および Y を，a を用いて表せ．

(4) 点 A を動かしたときに点 P の描く曲線を D とする．$a > 0$ のとき，曲線 C の点 A における接線と曲線 D の点 P における接線は常に直交することを示せ．

(17 名古屋市立大学 中期 薬学部 2)

§14　確　率

14.1　場合の数

650. n は 3 以上の整数とし，円周を n 等分する点を A_1，A_2，$\cdots$，A_n とする．これらの点の中から異なる 3 点を選び，それらを結んで作られる三角形を考える．3 点の選び方は全部で $\boxed{\text{カ}}$ 通りある．また，このような三角形の中で，n が偶数のとき，直角三角形となる点の選び方は $\boxed{\text{キ}}$ 通りあり，鈍角三角形となる点の選び方は $\boxed{\text{ク}}$ 通りある．さらに，n が奇数のとき，鈍角三角形となる点の選び方は $\boxed{\text{ケ}}$ 通りあり，鋭角三角形となる点の選び方は $\boxed{\text{コ}}$ 通りある．

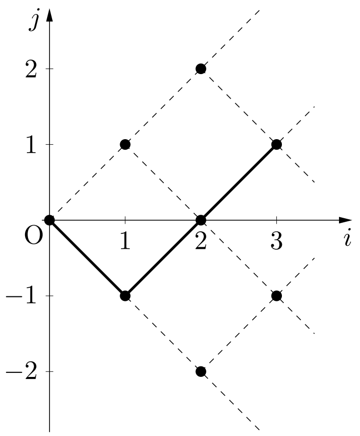
(17 同志社大学 文系 (全学部 2/5) 1(2))

651. 点 P が数直線上の原点から出発して，1 ステップごとに，正の方向もしくは負の方向に 1 動くとする．点 P が i ステップ後に j の位置にあることを $(i,\ j)$ と表す．ただし，0 ステップで点 P が原点の位置にあることを $(0,\ 0)$ と表す．このとき，ちょうど 3 ステップで $(0,\ 0)$ から $(3,\ 1)$ にたどり着く経路は 3 通りである．

その一例を図に実線で示す．また，それら 3 通りの経路の中で少なくとも 1 回は $j=2$ の位置を通っているものは l 通りである．

(1) ちょうど 7 ステップで (0, 0) から (7, 1) にたどり着く経路を考える．(0, 0) から (7, 1) にたどり着く経路は $\boxed{\text{ム}}$ 通りである．その経路の中で少なくとも l 回は $j=2$ の位置を通るものを考える．この中で最後に $j=2$ の位置を通るのがちょうど 2 ステップ後である経路は $\boxed{\text{メ}}$ 通りである．同様に，最後に $j=2$ の位置を通るのがちょうど 4 ステップ後である経路は $\boxed{\text{モ}}$ 通りである．また，最後に $j=2$ の位置を通るのがちょうど 6 ステップ後である経路は $\boxed{\text{ヤ}}$ 通りである．したがって (0, 0) から (7, 1) にたどり着く経路の中で，少なくとも 1 回は $j=2$ の位置を通っているものは $\boxed{\text{ユ}}$ 通りである．

(2) ちょうど 9 ステップで (0, 1) から (9, 1) にたどり着く経路を考える．(0, 0) から (9, 1) にたどり着く経路は $\boxed{\text{ヨ}}$ 通りであり，その中で少なくとも 1 回は $j=2$ の位置を通っているものは $\boxed{\text{ラ}}$ 通りである．また，(0, 0) から (9, 1) にたどり着く経路で，$j=-2$ の位置を少なくとも 1 回は通りかつ，$j=2$ の位置を 1 回も通っていないものは $\boxed{\text{リ}}$ 通りである．したがって，$j=2$ または $j=-2$ の位置を少なくとも 1 回は通っているものは $\boxed{\text{ル}}$ 通りである．



図：実線は，ちょうど 3 ステップで (0, 0) から (3, 1) にたどり着く経路の一例

(17 立命館大学 理系 (全学統一 2/3) 4)

◊652.　xy 平面上に 8 点 O(0, 0)，A(−1, 0)，B(0, −1)，C(2, −2)，D(1, 1)，E(2, 2)，F(−2, 2)，G(−2, −2) がある．これら 8 点を頂点とし，AO，OB を 2 辺とする八角形を作る．このとき，

(1) BD を 1 辺とする八角形は全部で $\boxed{(32)}$ 個できる．

(2) 合同である図形同士は 1 種類とするとき，八角形は全部で $\boxed{(33)}$ 種類できる．

(3) 全ての八角形の中で，周の長さが最小となる八角形の周の長さは

$\sqrt{\boxed{(34)}}+\boxed{(35)}\sqrt{\boxed{(36)}}+\sqrt{\boxed{(37)(38)}}+\boxed{(39)(40)}$ である．

(17 慶應義塾大学 薬学部 2)

653. $a,\ b,\ c$ を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とする．

(1) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が有理数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ．

(2) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が少なくとも一つの整数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ．

(17 東北大学 理・医・歯・薬・工・農学部 3)

14.2　順列・組合せ

°654. 以下の問いに答えよ．

(1) 6 人を 2 人ずつ 3 組に分ける方法は何通りあるか．

(2) 7 人を 2 人，2 人，3 人の 3 組に分ける方法は何通りあるか．

(3) A, B, C, D, E, F, G, H の 8 人から 7 人を選び，さらにその 7 人を 2 人，2 人，3 人の 3 組に分ける．A，B の 2 人がともに選ばれて，かつ同じ組になる確率を求めよ．

(17 岡山大学 理・工・環境理工・農・医・歯・薬・教育学部 1)

°655. K, A, N, G, O, G, A, K, U の 9 文字をすべて 1 列に並べるとき，異なる文字列の個数は $\boxed{(ケ)}$ である．この 9 文字から 2 文字を取り出して 1 列に並べるとき，異なる文字列の個数は $\boxed{(コ)}$ である．

(17 慶應義塾大学 看護医療学部 2(1))

°656. 2 個の文字 A，B を重複を許して左から並べて 7 文字の順列を作る．次の条件をみたす順列はそれぞれいくつあるか答えなさい．

(1) A が 5 個以上現れる．

(2) AABB がこの順に連続して現れる．

(3) A が 3 個以上連続して現れる．

(17 首都大学東京 都市教養学部 (文系) 2)

657. 0から6までの7個の数字を用いて4桁の整数を作る．このとき，この整数が5の倍数となるのは，

(1) 数字を重複して用いることを許す場合は，$\boxed{33\,|\,34\,|\,35}$ 通りである．

(2) 重複を許さないとすれば，$\boxed{36\,|\,37\,|\,38}$ 通りである．

次に1から7までの7個の数字を用いて4桁の整数を作る．このとき重複を許してできた整数の4桁の各数字について，千の位を a，百の位を b，十の位を c，一の位を d とすると，

(3) $a > d$ となるのは $\boxed{39\,|\,40\,|\,41\,|\,42}$ 通りである．

(4) $a > b > c > d$ となるのは $\boxed{43\,|\,44}$ 通りである．

(17 駿河台大学 B 方式 3)

14.3 二項定理

°658. 式の展開に関する次の問いに答えよ．

(1) $(1 + x + y)^6$ の展開式における x^2y^3 の項の係数を求めよ．

(2) $(1 + x + xy)^8$ の展開式における x^5y^3 の項の係数を求めよ．

(3) $(1 + x + xy + xy^2)^{10}$ の展開式における x^8y^{13} の項の係数を求めよ．

(17 新潟大学 理系 1 文系 1)

14.4 確率の定義

659. 1個のさいころを2回投げ，1回目に出た目を a，2回目に出た目を b とする．$N = 2^a3^b$ とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) N が504の約数となる確率を求めよ．

(2) N の正の約数の個数が12となる確率を求めよ．

(3) N の正の約数の和が3の倍数となる確率を求めよ．

(17 福井大学 教育・国際地域学部 1)

660. 1個のさいころを3回投げて，以下のルールで各回の得点を決める．

- 1回目は，出た目が得点になる．

- 2 回目は，出た目が 1 回目と同じならば得点は 0，異なれば出た目が得点になる．
- 3 回目は，出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0, どちらとも異なれば出た目が得点になる．

3 回の得点の和を総得点とし，総得点が n となる確率を p_n とする．

(1) 総得点 n の最大値，最小値と，それらの n に対する p_n を求めよ．

(2) p_6 を求めよ．

(3) p_n が最大となるような n と，そのときの p_n を求めよ．

(17 千葉大学 先進・理・薬・工・医・理学部 7)

661. 1 個のさいころを 4 回投げ，1 回目に出た目の数を a，2 回目に出た目の数を b，3 回目に出た目の数を c，4 回目に出た目の数を d とする．d が，a と b と c の最大公約数の倍数となる確率を求めよ．

(17 九州大学 後期 工学部 2)

°662. 大，中，小 3 個のさいころを同時に投げるとき，それぞれのさいころの出る目を a, b, c とする．出る目に応じて，得点を次のように定める．

- $a+b<c$ のとき，得点を $(a+b+c)$ 点とする．
- $a+b \geqq c$ のとき，得点を $2(a+b+c)$ 点とする．

このとき，得点が 5 点となる確率は $\boxed{\text{(ア)}}$ であり，得点が 8 点以下となる確率は $\boxed{\text{(イ)}}$ である．

(17 東京慈恵会医科大学 医学部 1)

663. 表と裏の出る確率の等しいコインがある．$z_0 = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}}$ とし，コインを投げて表が出たら $|z_0|$，裏が出たら $\dfrac{z_0}{|z_0|}$ をかける．かけた回数を n としたとき，z_n と書くことにする．最初，複素数平面上で z は z_0 の位置にいるものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) コインを 5 回投げて $|z_5| \geqq 4$ になるときの確率を求めよ．

(2) コインを 10 回投げて $\dfrac{5}{4}\pi < \arg z < \dfrac{3}{2}\pi$ になるときの確率を求めよ．

(3) コインを 15 回投げて z_{15} の虚部が負かつ $|z_{15}| \geqq 15$ になるときの確率を求めよ．

(17 東京女子医科大学 医学部 4)

664. A と B の 2 人が次のようなゲームを行う．A は 1 から 10 までの自然数が 1 つずつ書かれた 10 個の玉が入った袋から玉を 1 つ取り出し，それを A の玉とする．一方 B は 1 から 6 までの自然数が 1 つずつ書かれた 6 個の玉が入った袋から玉を 1 つ取り出し，それを B の玉とする．A と B の得点について以下の (a), (b), (c) の 3 つの場合を考える．

(a) A の得点は A の玉に書かれた数，B の得点は B の玉に書かれた数とする．
(b) A の得点は A の玉に書かれた数，B の得点は B の玉に書かれた数の 2 倍とする．
(c) B の玉に書かれた数が 3 以下の場合には，A の得点は B の玉に書かれた数，B の得点は A の玉に書かれた数とする．B の玉に書かれた数が 4 以上の場合には，A の得点は A の玉に書かれた数，B の得点は B の玉に書かれた数とする．

A と B の 2 人のうち得点の大きい人を勝ちとし，2 人の得点が同じ場合は引き分けとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) (a) の場合に B が勝つ確率を求めよ．
(2) (b) の場合に B が勝つ確率を求めよ．
(3) (c) の場合に B が勝つ確率を求めよ．

(17 大阪府立大学 現代システム科学・生命環境科学・地域保健学域 1)

665. 3 個のさいころを同時に投げるとき，出た目の和を 3 で割ったときの余りが 1 となる確率は $\boxed{\text{カ}}$ で，余りが 2 となる確率は $\boxed{\text{キ}}$ である．また，互いの目の差の絶対値がすべて 2 以下となる確率は $\boxed{\text{ク}}$ である．次に，n を 2 以上の整数とし，n 個のさいころを同時に投げる．出た目のなかで最大のものを A，最小のものを B とするとき，$A=3$ となる確率は $\boxed{\text{ケ}}$ である．また，$A=5$ かつ $B=2$ となる確率は $\boxed{\text{コ}}$ である．

(17 同志社大学 理系 (政策・文化情報 (理系)・生命医科・スポーツ健康 2/7) 1(2))

666. 1 個のさいころを 3 回投げて，出る目を順番に a, b, c とする．x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について，次の問いに答えよ．

(1) 重解をもつ確率を求めよ．
(2) 実数解をもつ確率を求めよ．

(17 滋賀大学 後期 経済学部 3)

°667. 袋の中に数字 1, 2, 3, 4, 5 が記されたカードがそれぞれ 1 枚ずつ，合計 5 枚入っている．この中から 1 枚のカードを取り出して，記された数字を確認し，袋に

戻すことを 2 回繰り返す．1 回目に取り出したカードの数字を X とし，2 回目に取り出したカードの数字を Y とする．このとき，$Y \leqq 2 < X$ となる確率は $\boxed{\text{カ}}$，$5 \leqq X+Y \leqq 8$ となる確率は $\boxed{\text{キ}}$，$XY \geqq 8$ となる確率は $\boxed{\text{ク}}$，$X \geqq 2Y$ となる確率は $\boxed{\text{ケ}}$，$XY-4X-Y^2+6Y \leqq 8$ となる確率は $\boxed{\text{コ}}$ である．

(17 関西学院大学 文系 (全学 2/1) 1(2))

°668. n 個のさいころを投げるとき，出た目の積が 5 の倍数となる確率を求めよ．

(17 信州大学 後期 理・繊維学部 1(1))

669. 袋の中に何枚かの金貨と，何枚かの銀貨が入っており，これを金貨，銀貨の別を確認することなく，1 枚ずつ取り出して，順に 1 列に並べていく．袋の中の硬貨をすべて取り出して並べ終えたとき，列の中には，金貨と銀貨いずれかのみ 1 枚以上からなる部分的な列ができている．これを「連 (れん)」とよぶ．例えば，

金，金，金，銀，銀，金，金，銀，金

の列には，

(金，金，金)，(銀，銀)，(金，金)，(銀)，(金)

のように，5 個の連がある．次の問いに答えよ．ただし，$0!=1$ とする．

(1) 金貨が 6 枚，銀貨が 3 枚のとき，連の個数が 5 である確率を求めよ．
(2) 金貨と銀貨が n 枚ずつ $(n \geqq 2)$ のとき，連の個数が偶数 k $(2 \leqq k \leqq 2n)$ である確率を n と k の式で表せ．
(3) 金貨と銀貨が n 枚ずつ $(n \geqq 2)$ のとき，連の個数が奇数 l $(3 \leqq l \leqq 2n-1)$ である確率を n と l の式で表せ．

(17 名古屋市立大学 医・経済学部 2)

670. A と B の二人が次のゲームを行う．

「1 から 18 までの数字が一つずつ書かれた 18 個の玉が入った袋がある．袋から玉を 1 個取り出し，玉の数字が 3 の倍数ならば A に 2 点を与え，それ以外ならば B に 1 点を与える．取り出した玉は袋に戻さずに，この試行を繰り返す.」

(1) 2 点先取した方が勝ちというルールのとき，A が勝つ確率を求めよ．
(2) 12 点先取した方が勝ちというルールのとき，A が勝つ確率を求めよ．

(17 一橋大学 後期 経済学部 3)

°671. 4 人でジャンケンをするとき，1 人が勝つ確率は $\boxed{\text{エ}}$ であり，2 人が勝つ確率は $\boxed{\text{オ}}$ であり，3 人が勝つ確率は $\boxed{\text{エ}}$ である．よって，あいこになる確率は $\boxed{\text{カ}}$

である．

(17 関西学院大学 理工・総合政策・教育 (全学 2/1) 1(2))

672. 1 個のさいころを 3 回投げて，以下のルールで各回の得点を決める．

- 1 回目は，出た目が得点になる．
- 2 回目は，出た目が 1 回目と同じならば得点は 0，異なれば出た目が得点になる．
- 3 回目は，出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0，どちらとも異なれば出た目が得点になる．

3 回の得点の和を総得点とし，総得点が n となる確率を p_n とする．

(1) 総得点 n の最大値，最小値と，それらの n に対する p_n を求めよ．

(2) p_6 を求めよ．

(17 千葉大学 教育・国際・文・法経・園芸・先進学部 4)

14.5 確率の計算

◊673. 赤玉，白玉および青玉が入っている箱に対して，次の操作を何回か繰り返す．

操作：箱の中から無作為に玉を 1 個取り出し，色を記録する．その後，その色の玉を 2 個箱に入れる．(その結果，箱の中の玉は 1 個増える．)

最初，箱の中には，赤玉 1 個，白玉 1 個および青玉 1 個が入っている．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 最初の状態から 4 回操作を繰り返したとき，取り出した玉がすべて赤である確率を求めよ．

(2) 最初の状態から 100 回操作を繰り返したとき，取り出した玉のうち 1 個が赤で，99 個が赤以外である確率を求めよ．

(3) 最初の状態から 100 回操作を繰り返したとき，取り出した玉のうち 1 個が赤，1 個が白で，98 個が青である確率を求めよ．

(4) 最初の状態から n 回操作を繰り返したとき，取り出した玉のうち j 個が赤，k 個が白で，$(n-j-k)$ 個が青である確率を求めよ．ただし，$n \geqq 1$，$j \geqq 0$，$k \geqq 0$，$j+k \leqq n$ とする．

(17 千葉大学 後期 医・工・理 (数・情) 学部 2)

◊674. $\overrightarrow{v_1}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_3}=(-1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_4}=(-1,\ -1,\ 1)$ とする．座標空間内の動点 P が原点 O から出発し，正四面体のサイコロ $\Big(1,\ 2,$

3, 4 の目がそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で出る$\Big)$ をふるごとに，出た目が k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ のときは $\overrightarrow{v_k}$ だけ移動する．すなわち，サイコロを n 回ふった後の動点 P の位置を P_n として，サイコロを $(n+1)$ 回目にふって出た目が k ならば

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\overrightarrow{v_k}$$

である．ただし，$\mathrm{P}_0=\mathrm{O}$ である．以下の問に答えよ．

(1) 点 P_2 が x 軸上にある確率を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}\perp\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4}$ となる確率を求めよ．

(3) 4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある確率を求めよ．

(4) n を 6 以下の自然数とする．$\mathrm{P}_n=0$ となる確率を求めよ．

(17 神戸大学 理系 4)

675. $\overrightarrow{v_1}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_3}=(-1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_4}=(-1,\ -1,\ 1)$ とする．座標空間内の動点 P が原点 O から出発し，正四面体のサイコロ $\Big(1,\ 2,\ 3,\ 4$ の目がそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で出る$\Big)$ をふるごとに，出た目が k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ のときは $\overrightarrow{v_k}$ だけ移動する．すなわち，サイコロを n 回ふった後の動点 P の位置を P_n として，サイコロを $(n+1)$ 回目にふって出た目が k ならば

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\overrightarrow{v_k}$$

である．ただし，$\mathrm{P}_0=\mathrm{O}$ である．以下の問に答えよ．

(1) 点 P_2 が x 軸上にある確率を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}\perp\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4}$ となる確率を求めよ．

(3) 4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある確率を求めよ．

(17 神戸大学 文系 3)

676. 正四面体 ABCD 上に 2 つの動点 P，Q がある．P，Q はともに頂点 A を出発し，次のルールに従って 1 秒ごとに各頂点を移動するものとする．

- P，Q が同じ頂点 X にあれば，その 1 秒後に P，Q は独立に，X 以外の 3 頂点のいずれかに確率 $\frac{1}{3}$ で移動する．
- P，Q が異なる 2 頂点 X，Y にあれば，その 1 秒後に P，Q は独立に，X，Y 以外の 2 頂点のいずれかに確率 $\frac{1}{2}$ で移動する．

(a) 出発して 1 秒後に P，Q が同じ頂点にある確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

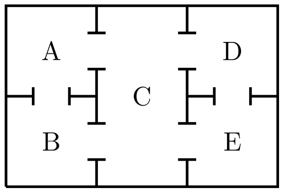
(b) 出発して 2 秒後に P，Q が同じ頂点にある確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である．

(c) 出発して 3 秒後に P，Q が同じ頂点にある確率は $\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キク}}$ である．

(d) A を出発してから 3 秒経過したときに，P，Q のどちらも B，C，D の 3 頂点すべてに到達し終えている確率は $\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サシス}}$ である．

(17 東京理科大学 理学部)

677. 右図のような部屋 A〜E がある．ある部屋から隣りの部屋へ移動するのを 1 回の移動と数え，隣りの各部屋へ移動する確率は等しいものとする．

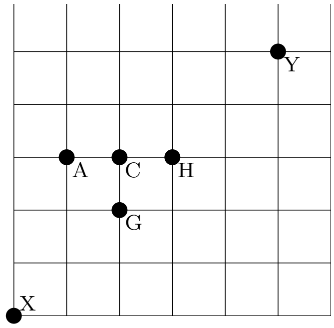


(1) P さんが部屋 A を出発して部屋を 3 回移動したとき，部屋 A に戻っている確率は，$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である．また，P さんが部屋 A を出発して部屋を 3 回移動したときに同じ部屋に複数回行っていない確率は，$\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である．

(2) P さんが部屋 A を，Q さんが部屋 C を同時に出発して，それぞれ部屋を 2 回移動したときに 2 人が同じ部屋にいる確率は，$\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}$ である．また，同様に 3 回移動したときに同じ部屋にいる確率は，$\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コサシ}}$ である．

(16 国士舘大学 理工・政経・法・文・21 世紀アジア・経営学部 2)

°678. 図のような街路を北 (上) か東 (右) にだけ移動するとき，次の問い (1)〜(3) に答えよ．



(1) X 地点から Y 地点への経路は $\boxed{33}$ 通りある．X 地点から H 地点への経路は $\boxed{34}$ 通りあり，H 地点から Y 地点への経路は $\boxed{35}$ 通りあるので，H 地点を通って X 地点から Y 地点へ至る経路は $\boxed{36}$ 通りになる．X 地点から A 地点への経路は $\boxed{37}$ 通りあり，X 地点から G 地点への経路は $\boxed{38}$ 通りあるので，X 地点から C 地点への経路は $\boxed{39}$ 通りになる．

(2) 表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を投げて，表が出たときに北 (上) へ 1 区画，裏が出たときに東 (右) へ 1 区画，図のような街路を移動する．

このとき，10 回の硬貨投げで X 地点から Y 地点へ到達する確率は $\boxed{40}$ である．また，6 回の硬貨投げで X 地点から H 地点へ到達する確率は $\boxed{41}$ であり，4 回の硬貨投げで H 地点から Y 地点へ到達する確率は $\boxed{42}$ なので，10 回の硬貨投げで，H 地点を通って X 地点から Y 地点へ到達する確率は $\boxed{43}$ である．

(3) 表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨と，6 面の各々が出る確率が等しいサイコロを同時に投げて，表が出たときに北 (上) へ，裏が出たときに東 (右) へ，サイコロの出た目の数だけ区画を移動する．

このとき，硬貨とサイコロをちょうど 2 回投げて X 地点から Y 地点へ到達する確率は $\boxed{44}$ であり，硬貨とサイコロをちょうど 3 回投げて X 地点から Y 地点へ到達する確率は $\boxed{45}$ である．

(17 駿河台大学 S 方式 3)

679. 投げたとき，表の出る確率が p，裏の出る確率が $1-p$ であるコインがある．ただし，p は $0<p<1$ をみたす実数である．A 君と B 君はこのコインを使って以下のような公平な勝負をすることを思いついた．

- コインを 2 回投げる．
- 始めに表，次に裏が出たら A 君の勝ちとする．
- 始めに裏，次に表が出たら B 君の勝ちとする．

- それ以外だった場合，始めからやり直す.

以下の問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対して，コインをちょうど $2n$ 回投げて A 君が勝つ確率と，コインをちょうど $2n$ 回投げて B 君が勝つ確率は等しいことを証明せよ.

(2) A 君と B 君のどちらかが勝つまでにコインを投げる回数が $2n$ 回以下である確率を求めよ.

(3) (2) で求めた確率は p が $\dfrac{1}{2}$ のとき最大になることを証明せよ.

(4) x を $0 < x < 1$ をみたす実数とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$$

を証明せよ.

(5) コインをちょうど $2n$ 回投げたときに勝負がつく確率を a_n とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2ia_i$$

を求めよ.

(17 横浜市立大学 医学部 3)

680. 袋の中に，4 個の玉が入っている．それらの玉には，整数が 1 つずつ書かれている．それら 4 つの整数はすべて異なるものとし，4 つの中で一番大きい整数を a とする．袋から玉を 1 個取り出す試行を，下記の A，B，C いずれかの方針で繰り返すとき (玉は袋に戻さない)，最後の試行で取った玉に書かれた整数が a である確率を求めたい．ただし，玉を取り出す人は，4 つの整数が何かは知らされていないものとする.

方針 A： 1 回目の試行でやめず，2 回目を最後の試行とする.

方針 B： 1 回目の試行でやめず，2 回目の整数が 1 回目より大きければ 2 回目を最後の試行とする．もし小さければ 3 回目を行い，1 回目，2 回目の整数より大きければ 3 回目を最後の試行とする．もし小さければ 4 回目を最後の試行とする.

方針 C： 1 回目，2 回目の試行でやめず，3 回目の整数が 1 回目，2 回目より大きければ 3 回目を最後の試行とし，小さければ 4 回目を最後の試行とする.

次の問いに答えよ.

(1) 方針 A を採用したとき，最後の試行で取った玉に書かれた整数が a である確率を求めよ.

(2) 方針 B を採用したとき，最後の試行で取った玉に書かれた整数が a である確率を求めよ.

(3) 方針 C を採用したとき，最後の試行で取った玉に書かれた整数が a である確率を求めよ．

(17 岩手大学 教育・農・人文社会科学部 3)

681. ある駐車場には 4 つの駐車枠 A，B，C，D が，アルファベット順に 1 列に並んでいる．そして自動車は，4 台が順に入場して，空いている枠に次の確率で駐車する．

(i) B と C のうち先着の自動車が隣の枠に駐車している枠，および D には，等しい確率で駐車する．

(ii) A に駐車する確率，および B と C のうち両隣が空いている枠に駐車する確率は，(i) の確率の 3 倍である．

このとき，次の確率を求めよ．ただし 1 台目の自動車が入場するときには，4 つの枠はすべて空いている．

(1) 1 台目の自動車が A に駐車する確率

(2) 3 台目の自動車が入場したとき，B と D に自動車が駐車している確率

(3) 4 台目の自動車が入場したとき，C に自動車が駐車していない確率

(17 旭川医科大学 4)

682. n を 2 以上の整数とする．n 個のさいころを投げ，出た目のすべての積を X とする．次の問いに答えよ．

(1) X が 5 の倍数である確率を n を用いて表せ．

(2) X が 5 の倍数である確率が 0.99 より大きくなる最小の n を求めよ．ただし，$\log_2 3 = 1.585$，$\log_2 5 = 2.322$ とする．

(3) X が 3 でも 5 でも割り切れない確率を n を用いて表せ．

(4) X が 15 の倍数である確率を n を用いて表せ．

(17 広島大学 経済・教育学部 3)

683. n を 2 以上の自然数とする．さいころを n 回振り，出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M - L$ を X とする．

(1) $X = 1$ である確率を求めよ．

(2) $X = 5$ である確率を求めよ．

(17 京都大学 文系 (総合人間・文・教育・法・経済学部) 5)

684. 1 から 10 までの自然数が 1 つずつ書かれているカードが 10 枚あるとする．ただし，同じ数が書かれたカードはないものとする．この中から 2 枚のカードを

同時に引き，小さい方の数を p，大きい方の数を q とする．座標平面上の 3 点 $(p,\ 0)$，$(q,\ 0)$，$(0,\ 2pq)$ を通る 2 次関数のグラフを C とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) C の頂点の x 座標が整数になる確率を求めよ．

(2) C と x 軸とで囲まれた領域の面積が整数になる確率を求めよ．

(3) 原点 O から C に引いた 2 本の接線の傾きがともに整数になる確率を求めよ．

(17 信州大学 医 (保)・理・経法・工学部 2)

685. 表と裏の区別があるカード 6 枚が袋に入っている．

そのうちの 3 枚には表に 1, 裏に 0 が書かれ，
その 3 枚以外の 2 枚には表に -1，裏に 0 が書かれ，
残り 1 枚には表に 0，裏に 1 が書かれている．

この袋から無作為に 1 枚取り出して書かれている数字を見てから袋にもどす操作を 4 回繰り返す．取り出した 4 回それぞれのカードの，表に書かれた数の和を X，カードの裏に書かれた数の和を Y とする．ただし，袋からカードを取り出すとき，どのカードも同じ確率で取り出されるものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $X+Y=4$ である確率を求めよ．

(2) $X+Y$ の値が奇数である確率を求めよ．

(3) $X+Y \leqq 2$ である確率を求めよ．

(17 宮崎大学 教育・農学部 11)

686. 複素数 z は $z^5=1$ を満たし，実部と虚部がともに正であるものとする．硬貨を投げて表が出れば 1, 裏が出れば 0 とし，5 回投げて出た順に a_0，a_1，a_2，a_3，a_4 とおく．複素数 w を $w=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4$ と定める．

(1) 5 回とも表が出たとする．w の値を求めよ．

(2) $a_0=a_2=a_3=0$，$a_1=a_4=1$ のとき，$|w|<1$ であることを示せ．

(3) $|w|<1$ である確率を求めよ．

(17 大阪大学 理系 2)

687. A と B の 2 人が A, B, A, B, $\cdots$ の順にさいころを投げ，先に 3 以上の目を出した人を勝者として勝敗を決め，さいころ投げを終える．以下では，さいころを投げた回数とは A と B が投げた回数の和のこととする．2 と 3 の常用対数を $\log_{10}2=0.301$，$\log_{10}3=0.477$ として，以下の問いに答えよ．

(1) さいころを投げた回数が n 回以下では勝敗が決まらない確率 p_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ．さらに，p_n が 0.005 より小さくなる最小の n を求めよ．
(2) さいころを投げた回数が 3 回以下で A が勝つ確率を求めよ．
(3) 自然数 k に対し，さいころを投げた回数が $2k+1$ 回以下で A が勝つ確率を求めよ．

(17 九州大学 文・教育・法・経済・医 (看護) 学部 3)

688.　最大 2 回のじゃんけんから成るゲームを，次のルール A，B，C に従って n 人 $(n \geqq 3)$ で行う．

A n 人で 1 回目のじゃんけんをして 1 人の勝者が決まったら，2 回目のじゃんけんは行わず，そこでじゃんけんを終了する．
B n 人で 1 回目のじゃんけんをして 2 人以上 $n-1$ 人以下の勝者が決まったら，勝ち残った者だけで 2 回目のじゃんけんをし，ゲームを終了する．
C n 人で 1 回目のじゃんけんをして誰も勝たなかったら，全員で 2 回目のじゃんけんをし，ゲームを終了する．

n 人で 1 回目のじゃんけんをして k 人 $(1 \leqq k \leqq n-1)$ が勝つ確率を P_k とする．ただし，各人はじゃんけんでグー，チョキ，パーをどれも確率 $\dfrac{1}{3}$ で出すものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) P_1 を求めよ．
(2) $2 \leqq k \leqq n-1$ のとき，P_k を求めよ．
(3) 1 回目のじゃんけんで誰も勝たない確率を求めよ．
(4) 1 人の勝者が決まってゲームが終了する確率を求めよ．

(17 宮崎大学 医学部 8)

◇689.　$n<m$ とする．白玉 n 個と赤玉 m 個が入っている袋から n 個の玉を同時に取り出す．このとき，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，白玉がちょうど k 個出る確率を p_k とする．

(1) $n=2,\ m=3$ のときに，p_0，p_1，p_2 を求めよ．
(2) $n \geqq 6$ とする．$p_5=p_6$ が成り立つような組 $(n,\ m)$ の中で n が最小となるものを求めよ．
(3) $n \geqq 3$ とする．$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，$d_k=\left|\dfrac{n}{n+m}-\dfrac{k}{n}\right|$ とする．$d_2>d_3$ および $p_2>p_3$ が同時に成り立つような組 $(n,\ m)$ の中で n が最小となるものを求めよ．

(17 徳島大学 医・歯・薬学部 4)

14.6　条件付き確率

690.　図 1 のように 10 点がそれぞれ辺で結ばれている図を A さんと B さんに渡した．さらに B さんは図 2 のように横軸と縦軸に数字を書き込んだ．図 1 において A さんが無作為に選んだ点を，B さんが見てその点を横軸と縦軸の数字で評価する．例えば，図 2 の点 P の横軸の評価は 2 で，縦軸の評価は 7 である．

(1) A さんが 10 点の中から 1 点を選ぶとき，B さんによる横軸の評価が 2 以上である確率は $\boxed{\text{ム}}$ である．また，横軸と縦軸の評価の積が 18 以上になる確率は $\boxed{\text{メ}}$ である．

(2) (1) と同様に，A さんが 10 点の中から 1 点を選ぶ試行を 2 回繰り返すとき，その 2 点が同じ点である確率は $\boxed{\text{モ}}$ である．また，その 2 点を結ぶ辺の数の最小値が 2 以上である確率は $\boxed{\text{ヤ}}$ である．ただし，図 3 において，2 点を結ぶ辺の数の最小値の例を挙げる．

次に，1 点目の縦軸の評価と 2 点目の横軸の評価の積が 18 以上になる確率は $\boxed{\text{ユ}}$ になる．また，2 点目の横軸の評価が 2 以上であることがわかったときに，1 点目の縦軸の評価と 2 点目の横軸の評価の積が 18 以上になる確率は $\boxed{\text{ヨ}}$ である．

(3) 最後に，A さんが 10 点の中から 1 点を選ぶ試行を 10 回繰り返すとき，選んだ全ての点が異なる点である確率は $\boxed{\text{ラ}}$ である．

(注：$\boxed{\text{ム}}$ ～ $\boxed{\text{ヨ}}$ は，既約分数で答えよ．)

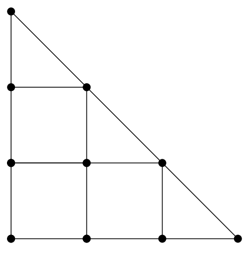


図 1 : A さんが使用する図

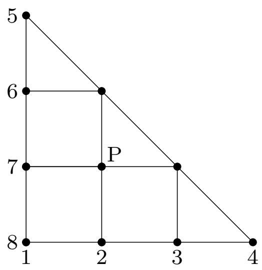


図 2 : B さんが使用する図

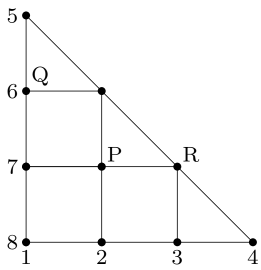


図 3 : 2 点を結ぶ辺の数の最小値の例
2 点 P，Q 間の辺の数は 2
2 点 P，R 間の辺の数は 1
2 点 Q，R 間の辺の数は 2

(17 立命館大学 理系 (全学統一 2/2) 4)

◊691. n は正の整数とし，文字 a，b，c を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合を A_n とする．A_n の要素に対し次の条件 $(*)$ を考える．

$(*)$ 文字 c が 2 つ以上連続して現れない．

以下 A_n から要素を一つ選ぶとき，どの要素も同じ確率で選ばれるとする．

(1) A_n から要素を一つ選ぶとき，それが条件 $(*)$ を満たす確率 $P(n)$ を求めよ．

(2) $n \geqq 12$ とする．A_n から要素を一つ選んだところ，これは条件 $(*)$ を満たし，その 7 番目の文字は c であった．このとき，この要素の 10 番目の文字が c である確率を $Q(n)$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(n)$ を求めよ．

(17 東京工業大学 4)

°692. 胎児の性別を判定するための検査法がある．この検査法は，

- 産まれてくる子どもの性別が男の場合，男と判定する確率が $\dfrac{17}{20}$
- 産まれてくる子どもの性別が女の場合，女と判定する確率が $\dfrac{3}{4}$
- 検査結果は，男か女かのいずれか

であるとする．以下の問いに答えよ．ただし，産まれてくる子どもの性別が男である確率と女である確率は等しいとする．

(1) 産まれてくる子どもの性別が女であるとき，誤って男と判定される確率を求めよ．

(2) 検査結果が男である確率を求めよ．

(3) 検査結果が男である場合と女である場合とでは，どちらがより高い確率で正しいか答えよ．

(17 福井大学 医学部 2)

693. 数字の 1 が書かれたカードが 1 枚，2 が書かれたカードが 2 枚，3 が書かれたカードが 3 枚，4 が書かれたカードが 4 枚の合計 10 枚のカードが入った箱がある．この箱の中からカードを 1 枚取り出し，書かれている数字を記録して箱の中に戻すという操作を繰り返す．

(1) 操作を 2 回行ったとき，記録されている 2 つの数の和がそれら 2 つの数の積より大きくなる確率は $\boxed{(ニ)}$ である．

(2) 操作を 4 回行った時点で 1，2，3，4 の全ての数が記録されている確率は $\boxed{(ヌ)}$ である．また，操作を 4 回行った時点で記録されている数のうち最大の数が 3 である確率は $\boxed{(ネ)}$ である．

(3) 操作を n 回 $(n \geqq 2)$ 行った時点で記録されている数が 2 種類でかつその

うちの 1 つが 1 である確率は $\boxed{(ノ)}$ である．また，操作を n 回 $(n \geqq 2)$ 行った時点で記録されている数が 2 種類であったとき，そのうちの 1 つが 1 である条件付き確率を p_n とすると，$\lim_{n\to\infty}(p_n)^{\frac{1}{n}} = \boxed{(ハ)}$ が成り立つ．

(4) 操作を n 回 $(n \geqq 2)$ 行った時点で 1 と 4 の両方の数が記録されていて，かつ 1 が 4 より先に記録されている確率は $\boxed{(ヒ)}$ である．

(17 年 慶應大 理工 4)

694. 2 と書かれた空の封筒が 2 つ，3 と書かれた空の封筒が 2 つある．箱の中に 4 と書かれたカードが 3 枚，5 と書かれたカードが 1 枚，6 と書かれたカードが 2 枚，9 と書かれたカードが 4 枚入っている．各封筒には封筒に書かれた数の倍数が書かれたカードのみが入る．さらに，各封筒には 1 枚のカードしか入らない．この箱の中から 4 枚のカードを同時に取り出すとき，次の各問に答えよ．

(1) 6 と書かれたカードを含まずに，すべての封筒にカードが入る確率を求めよ．ただし,「すべての封筒にカードが入る」とは，取り出した 4 枚のカードすべてを封筒に入れられる入れ方が少なくとも 1 つあることとする．

(2) すべての封筒にカードが入る確率を求めよ．

(3) どのような入れ方をしてもカードが入らない封筒が 1 つ以上あったとき，5 と書かれたカードを含んでいない確率を求めよ．

(17 茨城大学 教育学部 4)

695. 数字の 1 が書かれたカードが 1 枚，2 が書かれたカードが 2 枚，3 が書かれたカードが 3 枚，4 が書かれたカードが 4 枚の合計 10 枚のカードが入った箱がある．この箱の中からカードを 1 枚取り出し，書かれている数字を記録して箱の中に戻すという操作を繰り返す．

(1) 操作を 2 回行ったとき，記録されている 2 つの数の和がそれら 2 つの数の積より大きくなる確率は $\boxed{(ニ)}$ である．

(2) 操作を 4 回行った時点で 1, 2, 3, 4 の全ての数が記録されている確率は $\boxed{(ヌ)}$ である．また，操作を 4 回行った時点で記録されている数のうち最大の数が 3 である確率は $\boxed{(ネ)}$ である．

(3) 操作を n 回 $(n \geqq 2)$ 行った時点で記録されている数が 2 種類でかつそのうちの 1 つが 1 である確率は $\boxed{(ノ)}$ である．また，操作を n 回 $(n \geqq 2)$ 行った時点で記録されている数が 2 種類であったとき，そのうちの 1 つが 1 である条件付き確率を p_n とすると，$\lim_{n\to\infty}(p_n)^{\frac{1}{n}} = \boxed{(ハ)}$ が成り立つ．

(4) 操作を n 回 $(n \geqq 2)$ 行った時点で 1 と 4 の両方の数が記録されていて，かつ

1 が 4 より先に記録されている確率は $\boxed{(ヒ)}$ である．

(17 慶應義塾大学 理工学部 4)

696.

あたりが 2 本，はずれが 2 本の合計 4 本からなるくじがある．A，B，C の 3 人がこの順に 1 本ずつくじを引く．ただし，1 度引いたくじはもとに戻さない．

(1) A，B の少なくとも一方があたりのくじを引く事象 E_1 の確率は，$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である．

(2) 次の $\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$，$\boxed{オ}$ に当てはまるものを，下の⓪〜⑤のうちから一つずつ選べ．ただし，解答の順序は問わない．

A，B，C の 3 人で 2 本のあたりのくじを引く事象 E は，3 つの排反な事象 $\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$，$\boxed{オ}$ の和事象である．

⓪ A がはずれのくじを引く事象

① A だけがはずれのくじを引く事象

② B がはずれのくじを引く事象

③ B だけがはずれのくじを引く事象

④ C がはずれのくじを引く事象

⑤ C だけがはずれのくじを引く事象

また，その和事象の確率は $\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ である．

(3) 事象 E_1 が起こったときの事象 E の起こる条件付き確率は，$\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である．

(4) 次の $\boxed{コ}$，$\boxed{サ}$，$\boxed{シ}$ に当てはまるものを，下の⓪〜⑤のうちから一つずつ選べ．ただし，解答の順序は問わない．

B，C の少なくとも一方があたりのくじを引く事象 E_2 は，3 つの排反な事象 $\boxed{コ}$，$\boxed{サ}$，$\boxed{シ}$ の和事象である．

⓪ A がはずれのくじを引く事象

① A だけがはずれのくじを引く事象

② B がはずれのくじを引く事象

③ B だけがはずれのくじを引く事象

④ C がはずれのくじを引く事象

⑤ C だけがはずれのくじを引く事象

また，その和事象の確率は $\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$ である．他方，A，C の少なくとも一方があたりのくじをひく事象 E_3 の確率は，$\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$ である．

(5) 次の $\boxed{チ}$ に当てはまるものを，下の⓪〜⑥のうちから一つ選べ．

事象 E_1 が起こったときの事象 E の起こる条件付き確率 p_1，事象 E_2 が起こったときの事象 E の起こる条件付き確率 p_2，事象 E_3 が起こったときの事象 E の起こる条件付き確率 p_3 の間の大小関係は，$\boxed{チ}$ である．

⓪ $p_1 < p_2 < p_3$　① $p_1 > p_2 > p_3$　② $p_1 < p_2 = p_3$

③ $p_1 > p_2 = p_3$　④ $p_1 = p_2 < p_3$　⑤ $p_1 = p_2 > p_3$

⑥ $p_1 = p_2 = p_3$

(17 年 センター本試験 I・A 第 3 問)

697. 正八面体の各面に 0 から 7 の数が 1 つずつ書かれている．この正八面体 3 個を同時に投げ，出た数の最大値を M，最小値を m とする．

(1) $M - m = 0$ となる確率を求めよ．

(2) $M - m = 1$ となる確率を求めよ．

(3) $M - m > 1$ となる確率を求めよ．

(4) $M + m = 10$ となる確率を求めよ．

(5) $M = m$ であったとき，$Mm \geqq 2(M+m)$ となる条件付き確率を求めよ．

(17 岡山県立大学 情報工学部 4)

698. 3 個のサイコロを同時に 1 回投げる．

(i) 出る目の積が偶数である確率を求めよ．

(ii) 出る目の積が偶数であるとき，その出る目の和が 5 の倍数である確率を求めよ．

(17 福岡教育大学 中等教育 (数学) 1(3))

699. 下図のような 0 から 5 までの番号のついたマスを使い，A，B の 2 人が次のルールですごろくゲームを行う．

0	1	2	3	4	5

最初 0 番のマスに A と B の駒(こま)がある．A と B は交互にさいころを投げるものとし，A がさいころを投げてゲームを開始する．A と B のどちらが投げたときも次のようにゲームを進める．さいころの目が偶数のときは，A の駒を 1 つ先の番号のマスに動かし，B の駒は投げる前にあったマスから動かさない．目が奇数のときは，A の駒は投げる前にあったマスから動かさず，B の駒を 1 つ先の番号のマスに動かす．駒が先に 5 番のマスに達した人が上がりとなり，その時点でゲームは終了する．

以下では，さいころを投げた回数は A と B の投げた回数の合計とする．

(1) さいころをちょうど 9 回投げたときに A が上がる確率は $\dfrac{\boxed{(36)}\boxed{(37)}}{\boxed{(38)}\boxed{(39)}\boxed{(40)}}$ である．

(2) ゲームを開始してから終了するまで A と B の駒があるマスの番号の差が常に 1 以下である確率は $\dfrac{\boxed{(41)}}{\boxed{(42)}\boxed{(43)}}$ である．

(3) ゲームを開始してからさいころを 4 回投げたときまで常に B が先行する確率は $\dfrac{\boxed{(44)}}{\boxed{(45)}\boxed{(46)}}$ である．ただし，B の駒があるマスの番号が A の駒があるマスの番号より大きいとき，B が先行するという．

(4) A が先に上がったとき，ゲームを開始してからさいころを 4 回投げたときまで常に B が先行していた確率は $\dfrac{\boxed{(47)}\boxed{(48)}}{\boxed{(49)}\boxed{(50)}\boxed{(51)}}$ である．

(17 慶應義塾大学 経済学部 3)

700. 箱の中に赤玉 5 個，青玉 4 個，白玉 3 個が入っている．玉には 1 から 5 までの整数のいずれか 1 つが書かれており，赤玉には 1，2，3，4，5 の各数が 1 つずつ，青玉には 1，2，3，4 の各数が 1 つずつ，白玉には 1，2，3 の各数が 1 つずつ書かれている．

この箱から太郎が玉を 1 個取り出し，その玉を箱に戻さず残りの玉から花子が 1 個取り出す．このとき，玉に書かれた数が同じならば，おのおのが自分が取り出した玉を獲得し，異なるならば，大きい数が書かれた玉を取り出した方が両方の玉を獲得するゲームを行う．

(i) このゲームにおいて，太郎が 1 個の玉を獲得する確率は $\dfrac{\boxed{(40)}}{\boxed{(41)}\boxed{(42)}}$ であ

り，花子が 2 個の玉を獲得する確率は $\dfrac{\boxed{(43)\,\vdots\,(44)}}{\boxed{(45)\,\vdots\,(46)}}$ である．そして，花子が 2 個の玉を獲得したとき，玉に書かれた数の差の絶対値が n である確率を p_n とすると，

$$\sum_{n=1}^{4} np_n = \frac{\boxed{(47)\,\vdots\,(48)\,\vdots\,(49)}}{\boxed{(50)\,\vdots\,(51)}}$$

である．

(ii) このゲームにおいて，太郎が少なくとも 1 個の赤玉を獲得する確率は $\dfrac{\boxed{(52)\,\vdots\,(53)}}{\boxed{(54)\,\vdots\,(55)}}$ である．

(iii) このゲームを 2 回繰り返すことを考える．1 回目のゲームで獲得した玉を箱に戻さず，続けて 2 回目のゲームを行ったとき，太郎が 2 回とも同色の玉を取り出す確率は $\dfrac{\boxed{(56)\,\vdots\,(57)}}{\boxed{(58)\,\vdots\,(59)}}$ である．また，花子が 2 回のゲームを通じて獲得した玉に書かれた数の和が 15 となる確率は $\dfrac{\boxed{(60)}}{\boxed{(61)\,\vdots\,(62)\,\vdots\,(63)}}$ である．

(17 慶應義塾大学 商学部 4)

701. 1 個のさいころを投げて，出た目が偶数ならば出た目の半分の数を得点とし，出た目が奇数ならば出た目の数を得点とする．さいころを n 回投げたときの得点の合計を考える．例えば，さいころを 3 回投げて出た目が 2, 3, 6 のとき，得点の合計は $\dfrac{2}{2}+3+\dfrac{6}{2}=7$ である．このとき，次の確率を求めよ．

(1) さいころを 2 回投げたとき，得点の合計が 6 になる確率

(2) さいころを 4 回投げたとき，得点の合計が 10 になる確率

(3) さいころを 4 回投げて，2 回目に 5 または 6 の目が出たとき，得点の合計が 10 になる確率

(17 徳島大学 理工・医 (保健) 学部 4)

702. n は 2 以上の自然数とする．1 から n までの自然数をそれぞれひとつずつ書いた n 枚のカードが，中の見えない箱に入っている．まず一枚のカードを取り出し，その数字を確認する．取り出したカードは戻さずに，次に 2 枚目のカードを取り出し，その数字を確認する．この作業を繰り返し，直前に取り出したカードの数字より大きい数字が出たときに，景品がもらえることとする．景品がもらえた時点で，作業を終了する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 2 枚目のカードを取り出したときに景品がもらえる確率は $\boxed{\text{ヌ}}$ である．

(2) この作業が n 枚目のカードまで続き，最後の n 枚目のカードを取り出したときにも景品がもらえない確率は $\boxed{\text{ネ}}$ である．

(3) $n=6$ とする．5 枚目のカードを取り出したときに景品がもらえたとき，最後 (5 枚目) のカードの数字が 6 である条件つき確率は $\boxed{\text{ノ}}$ である．

(17 早稲田大学 国際教養学部 4)

703. A 君と B 君はそれぞれ，0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている．2 人は，自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする．取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし，0 が含まれている場合は残り 2 枚のカードに書かれた数の合計とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A 君，B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して，しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ．

(2) A 君の得点が B 君の得点より大きいときの，A 君の得点が整数ではない確率を求めよ．

(17 東北大学 理・医・歯・薬・工・農学部 2)

◇704. 1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD–EFGH の辺の上を次の規則に従って動く点 M がある．

(i) 時刻 0 において M は頂点 A の上にある．

(ii) 各辺上での M の速さは 1 である． ただし，辺の途中で後戻りしない．

(iii) 各頂点において M はとどまらず，その頂点を端点とする 3 本の辺の中から確率 $\dfrac{1}{3}$ で 1 つを選んで次の頂点まで移動し続ける．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 時刻 4, 5 において M が頂点 A の上にある確率をそれぞれ求めよ．

(2) 時刻 n において M が頂点 A の上にある確率を n を用いて表せ． ただし，n は負でない整数とする．

(3) 時刻 8 において M が頂点 A の上にあるとき，その時刻までに M が立方体のすべての頂点を通る条件付き確率を求めよ．

(17 東北大学 後期 理学部 4)

°705. A，B，C，D の 4 人が集まり，2 対 2 の組に分かれて遊ぶことになった．組み分けは A，B，C，D の順に硬貨を投げて決める．表が出たら赤組，裏が出たら

白組とする．いずれかの組が 2 人とも決まった時点で残りの人の組も確定するから，全員が硬貨を投げるとは限らない．

いま，A は硬貨を投げ終えたものとする．ここで，B，C，D のそれぞれが A と同じ組になる確率を考えよう．次の 1〜5 のうち，正しい記述は $\boxed{ア}$ である．

1. A が赤組か白組かにより，B，C，D のうち誰が A と同じ組になる確率が大きいかは異なる．
2. A と同じ組になる確率は，B が C，D より大きい．
3. A と同じ組になる確率は，C が B，D より大きい．
4. A と同じ組になる確率は，D が B，C より大きい．
5. A と同じ組になる確率は，B，C，D の 3 人とも同じである．

(17 早稲田大学 人間科学部 A，B 方式 1(1))

706.

下図のような 0 から 5 までの番号のついたマスを使い，A，B の 2 人が次のルールですごろくゲームを行う．

0	1	2	3	4	5

最初 0 番のマスに A と B の駒(こま)がある．A と B は交互にさいころを投げるものとし，A がさいころを投げてゲームを開始する．A と B のどちらが投げたときも次のようにゲームを進める．さいころの目が偶数のときは，A の駒を 1 つ先の番号のマスに動かし，B の駒は投げる前にあったマスから動かさない．目が奇数のときは，A の駒は投げる前にあったマスから動かさず，B の駒を 1 つ先の番号のマスに動かす．駒が先に 5 番のマスに達した人が上がりとなり，その時点でゲームは終了する．

以下では，さいころを投げた回数は A と B の投げた回数の合計とする．

(1) さいころをちょうど 9 回投げたときに A が上がる確率は $\dfrac{\boxed{(36)}\boxed{(37)}}{\boxed{(38)}\boxed{(39)}\boxed{(40)}}$ である．

(2) ゲームを開始してから終了するまで A と B の駒があるマスの番号の差が常に 1 以下である確率は $\dfrac{\boxed{(41)}}{\boxed{(42)}\boxed{(43)}}$ である．

(3) ゲームを開始してからさいころを 4 回投げたときまで常に B が先行する確率は $\dfrac{\boxed{(44)}}{\boxed{(45)}\boxed{(46)}}$ である．ただし，B の駒があるマスの番号が A の駒があるマスの番号より大きいとき，B が先行するという．

(4) A が先に上がったとき，ゲームを開始してからさいころを 4 回投げたと

きまで常に B が先行していた確率は $\dfrac{\boxed{(47)}\boxed{(48)}}{\boxed{(49)}\boxed{(50)}\boxed{(51)}}$ である.

(17 年 慶應大 経済 3)

14.7　独立試行

707.　表が出る確率が p であるコインを 1 枚投げるという試行を n 回繰り返す．そのとき，n 回目で初めて表が出る確率を a_n とおく．また，1 回以上表が出る確率を b_n とおく．以下の問いに答えよ．ただし，$0 < p < 1$ とする．

(1) a_n を求めよ．

(2) b_n を求めよ．

(3) $p = \dfrac{1}{50}$ とする．$b_n > \dfrac{1}{2}$ となる最小の n の値を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ としてこれらを用いてもよい．

(17 福井大学 工学部 3)

708.　座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という． 格子点上を次の規則に従って動く点 P を考える．

(a) 最初に，点 P は原点 O にある．

(b) ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ \ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である．

(1) 点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y = x$ 上にある確率を求めよ．

(2) 点 P が，最初から 6 秒後に原点 O にある確率を求めよ．

(17 東京大学 理科 2)

°709.　1 個のさいころを投げ，1 または 2 の目が出たら 3 点，3 または 4 の目が出たら 1 点，5 または 6 の目が出たら 0 点の得点を得るゲームをする．5 回さいころを投げて得られた得点の合計が 9 点以上である確率は $\boxed{\text{こ}}$ である．

(17 茨城大学 後期 工学部 1(7))

710.　座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という． 格子点上を次の規則 (a)，(b) に従って動く点 P を考える．

(a) 最初に，点 P は原点 O にある．

(b) ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ \ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である．

(1) 最初から 1 秒後の点 P の座標を $(s,\ t)$ とする．$t - s = -1$ となる確率を求めよ．

(2) 点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y = x$ 上にある確率を求めよ．

(17 東京大学 文科 3)

711. A 君と B 君はそれぞれ，0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている．2 人は，自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする．取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし，0 が含まれている場合は残り 2 枚のカードに書かれた数の合計とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A 君，B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して，しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ．

(2) A 君の得点が整数でなく，かつ，B 君の得点より大きい確率を求めよ．

(17 東北大学 文・教育・法・経済・医 (看護) 学部 4)

°712. 袋に 1 から 7 までの異なる番号をつけた 7 個の玉が入っている．袋から玉を 1 個取り出し，玉の番号を調べて玉を袋に戻す．この試行を 3 回繰り返したとき，1 回目の玉の番号を a，2 回目の玉の番号を b，3 回目の玉の番号を c とする．$a < b < c$ となる確率は $\boxed{\text{カ}}$ である．$a \times b \times c$ の値が偶数となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{343}$ である．$a + b + c$ の値が奇数となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{343}$ である．2 以上 6 以下の自然数 k に対して，$a + b = k$ かつ $c \leqq 7 - k$ となる確率は $\dfrac{(7-k)}{343}\left(\boxed{\text{ケ}}\right)$ であるので，$a + b + c \leqq 7$ となる確率は $\boxed{\text{コ}}$ である．

(17 同志社大学 理系 (全学部 2/4) 1(2))

◇713. 1 個のさいころをくり返し投げ，k 回目に出た目を a_k とし，自然数 n に対して

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_h}{10^k} = 0.a_1 a_2 \cdots a_n$$

とする．また，$X_n \leqq \dfrac{25}{99}$ となる確率を $P(n)$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $P(1)$，$P(2)$ および $P(4)$ を求めよ．

(2) 自然数 m に対して $P(2m+2)$ を $P(2m)$ で表し，$P(2m)$ を求めよ．

(3) $\lim_{n\to\infty} P(n)$ を求めよ．

(17 兵庫県立大学 中期 理学部 5)

◇714. 文字 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J のどれか 1 つが書かれている 10 種類の玉があり，以下のように 10 個の玉が入っている袋を 3 種類用意する．

- 10 種類の玉が全て入っている袋 α
- A が書かれている玉が 3 つ，B, C, D, E, F, G, H が書かれている玉が 1 つずつ入っている袋 β
- A が書かれている玉が 5 つ，B, C, D, E, F が書かれている玉が 1 つずつ入っている袋 γ

この 3 種類の袋に対して，袋から玉を 1 個取り出し，書かれている文字を調べてから同じ袋に戻す試行を行う．次の問いに答えよ．

(1) この試行を 2 回繰り返したとき，1 回目と 2 回目で取り出した玉に書かれている文字が異なる確率を，袋 α，袋 β，袋 γ についてそれぞれ求めよ．

(2) この試行を 3 回繰り返したとき，3 回目で取り出した玉に書かれている文字が，1 回目または 2 回目で取り出した玉に書かれている文字と同じである確率を，袋 α，袋 β，袋 γ についてそれぞれ求めよ．

(17 秋田大学 教育文化学部 1)

715. さいころを続けて投げて，数直線上の点 P を移動させるゲームを行う．初め点 P は原点 0 にいる．さいころを投げるたびに，出た目の数だけ，点 P を現在の位置から正の向きに移動させる．この試行を続けて行い，点 P が 10 に達するか越えた時点でゲームを終了する．n 回目の試行でゲームが終了する確率を p_n とする．

(1) $p_{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^9$ となることを示せ．

(2) p_9 の値を求めよ．

(3) p_3 の値を求めよ．

(17 北海道大学 理系 4)

716. 袋の中に赤玉，青玉，黄玉が，それぞれ 2 個，3 個，4 個入っている．いまこの袋から，玉を 1 個ずつ続けて 3 個取り出す．取り出された青玉の数が m 個 $(m = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ で，黄玉が最初に取り出されたのが n 回目 $(n = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ である確率を $P(m,\ n)$ とする．ただし，$n = 0$ は，黄玉が取り出されないことを意味するものとする．以下の問に答えなさい．

(1) $P(1,\ 0)$ を求めなさい．

(2) $P(1,\ 1)$ を求めなさい.
(3) $P(1,\ 2)$ を求めなさい.
(4) $P(m,\ n)=0$ となる $(m,\ n)$ を全て求めなさい.

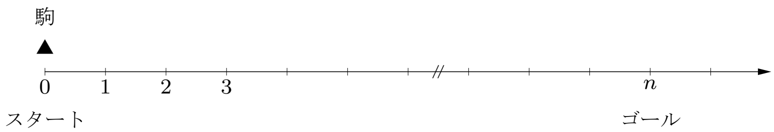
(17 兵庫県立大学 経済・経営学部 5)

717. 駒が単位時間ごとに座標平面上を移動するものとする．n は 0 以上の整数とし，時刻 n に点 $(x,\ y)$ にある駒は，時刻 $n+1$ には $\dfrac{1}{4}$ ずつの確率で，4 点 $(x+1,\ y)$，$(x-1,\ y)$，$(x,\ y+1)$，$(x,\ y-1)$ のいずれかに移動するものとする．時刻 0 に点 $(0,\ 0)$ にある駒について，次の問いに答えよ.

(1) 時刻 2 に，駒が点 $(0,\ 0)$，点 $(1,\ 0)$，点 $(1,\ 1)$，点 $(2,\ 0)$ にある確率を，それぞれ求めよ.
(2) 時刻 4 に，駒が点 $(0,\ 0)$ にある確率を求めよ.
(3) 時刻 n に駒が点 $(x,\ y)$ にあるとき，n と $x+y$ の差は 2 の倍数であることを示せ.

(17 大阪市立大学 商・経済・医 (看護)・生活科学部 1)

718. サイコロを繰り返し振って，出た目の数だけ駒を右に進め，駒がゴールちょうどに着いたら勝ち，通り過ぎたら負けとするゲームを行う．ゲーム盤は下図のような数直線からできており，ゲームは 0 からスタートし，ゴールを n とする．また，1 から 6 までの目があるサイコロを使う．以下の問いに答えよ.



(1) $n=4$ の場合の勝つ確率を求めよ.
(2) $n=10$ の場合，サイコロを振ってちょうど 5 回目に勝つ確率を求めよ.
(3) $n=12$ の場合，サイコロを振ってちょうど 5 回目に勝つ確率を求めよ.

(17 名古屋市立大学 中期 薬学部 3)

719. さいころを n 回ふり，n 個の出た目の数をすべて掛け合わせた値を a_n とする．次の問いに答えよ.

(1) a_n が素数となる確率を n を用いて表せ.
(2) a_n が 3 の倍数となる確率を n を用いて表せ.
(3) a_n を 6 で割った余りが 1 となる確率を n を用いて表せ.
(4) a_n を 7 で割った余りが 1 となる確率は n の値によらず $\dfrac{1}{6}$ であることを示せ.

(5) $a_n < 10$ となる確率を $n=1$, $n=2$ のときに求め，$n \geqq 3$ のときは n を用いて表せ.

(17 お茶の水女子大学 理・文教育・生活科学部 2)

720. 数直線上の点 P を次の規則で移動させる．さいころを投げて，1 または 2 が出れば $+1$ だけ移動させ，3 または 4 が出れば -1 だけ移動させ，5 または 6 が出れば移動させない．はじめに P は原点にあるとし，さいころを n 回投げた後の P の座標を X_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) さいころを 3 回投げて $X_3=0$ となる確率を求めよ.

(2) 自然数 $n \geqq 3$ に対し，$X_n = n-2$ となる確率を n を用いて表せ.

(3) さいころを 6 回投げて $X_6=0$ となったとき，この 6 回のさいころ投げのうち，1 または 2 の目が出た回数が合わせて k 回であった確率を $Q(k)$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 6)$ とおく．$Q(k)$ が最大となる k を求めよ.

(17 九州大学 後期 理学部 (数学) 4)

14.8　最大確率

721. 袋の中に白球が 20 個，赤球が 50 個入っている．この袋の中から球を 1 球取り出し，色を調べてから袋に戻す．これを 40 回くり返す．このとき，白球が n 回取り出される確率を p_n とする.

(1) $p_1 = \boxed{コ}\left(\dfrac{5}{7}\right)^{\boxed{サ}}$ である.

(2) $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = \dfrac{\boxed{シ}\left(\boxed{ス}-n\right)}{\boxed{セ}\left(n+\boxed{ソ}\right)}$ である．ただし，$\boxed{セ}$ はできるだけ小さな自然数で解答すること.

(3) 白球が取り出される確率が最大になるのは，白球が $\boxed{タ}$ 個取り出されるときである.

(17 早稲田大学 スポーツ科学部 3)

722. $n,\ k$ を $3 \leqq k < n$ を満たす整数とする．赤玉が k 個，青玉が $(n-k)$ 個入った袋から 3 個の玉を無作為に取り出したとき，取り出した玉のうち 2 個が赤玉，1 個が青玉となる確率を $p(n,\ k)$ とする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $p(n,\ k)$ を求めよ.

(2) n が 3 の倍数で 6 以上とする．n を固定して k を $3 \leqq k < n$ の範囲で動かすとき，$p(n,\ k)$ の最大値とそのときの k を求めよ.

(17 東北大学 後期 経済学部 3)

723. 助さんと格さんが，赤玉 n 個と白玉 k 個が入った笠間焼のつぼの中から玉を取り出す次の 4 つのゲーム $[G_i]$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ をそれぞれ行う．ただし，n と k は 2 以上の自然数とする．

［G_1］助さんがつぼの中から無作為に玉を 1 個取り出し，それが赤玉であれば助さんの勝ち，白玉であれば助さんの負け，とする．

［G_2］助さんがつぼの中から無作為に玉を 2 個同時に取り出し，その中に赤玉が少なくとも 1 個あれば助さんの勝ち，2 個とも白玉であれば助さんの負け，とする．

［G_3］まず格さんがつぼの中から無作為に玉を 1 個取り出し，次に助さんがつぼの中から白玉を 1 個取り出す．その後，再び助さんがつぼの中から無作為に玉を 1 個取り出し，それが赤玉であれば助さんの勝ち，白玉であれば助さんの負け，とする．ただし，取り出した玉はもとに戻さないものとする．

［G_4］まず助さんがつぼの中から白玉を 1 個取り出し，次に格さんがつぼの中から無作為に玉を 1 個取り出す．その後，再び助さんがつぼの中から無作為に玉を 1 個取り出し，それが赤玉であれば助さんの勝ち，白玉であれば助さんの負け，とする．ただし，取り出した玉はもとに戻さないものとする．

各ゲーム $[G_i]$ で助さんの勝つ勝率を P_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) P_1，P_2 をそれぞれ n と k を用いて表し，P_1 と P_2 の大小関係を判定せよ．
(2) P_3，P_4 をそれぞれ n と k を用いて表し，P_3 と P_4 の大小関係を判定せよ．
(3) P_1 と P_4 の大小関係および P_2 と P_3 の大小関係をそれぞれ判定せよ．
(4) $k \geqq 3$ かつ $n=k-1$ とする．助さんの勝つ確率が $\dfrac{1}{2}$ より大きいゲームを $[G_1]$〜$[G_4]$ からすべて求めよ．

(17 茨城大学 後期 理学部 (数学・情報数理) 3)

◇724. n を正の整数とする．試行の結果に応じて k 点 $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が与えられるゲームがある．ここで k 点を獲得する確率は，ある $t>0$ によって決まっており，これを $p_k(t)$ とする．このとき，確率 $p_k(t)$ は $a \geqq 0$ に対して以下の関係式を満足するという．

$$p_0(t)=t^n, \quad p_k(t)=a\cdot\frac{n-k+1}{k}\cdot p_{k-1}(t) \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

次の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k(t)$ の値を求めよ．

(2) a を t を用いて表せ．

(3) 各 k に対して，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で $p_k(t)$ を最大にするような t の値 T_k を求めよ．ただし，$p_k(0) = 0$ $(k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$，$p_n(0) = 1$ と定める．

(4) $0 < t < 1$ なる t を与えたとき，(3) で求めた T_k に対して，

$$E = \sum_{k=0}^{n} T_k \cdot p_k(t)$$

とする．E の値を求めよ．

(17 早稲田大学 基幹・創造・先進理工学部 4)

§15　統　計

15.1　確率分布 (期待値・分散)

°725.　a を実数とする．このとき 5 つの値 $a+2,\ a-3,\ a+4,\ a-1,\ a+3$ からなるデータの平均値は $\boxed{(キ)}$ であり，分散は $\boxed{(ク)}$ である．

(17 慶應義塾大学 看護医療学部 1(4))

15.2　連続確率分布

726.　以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 233 ページの正規分布表を用いてもよい．

(1) 1 回の試行において，事象 A の起こる確率が p，起こらない確率が $1-p$ であるとする．この試行を n 回繰り返すとき，事象 A の起こる回数を W とする．確率変数 W の平均（期待値）m が $\dfrac{1216}{27}$，標準偏差 σ が $\dfrac{152}{27}$ であるとき，$n = \boxed{\text{アイウ}}$，$p = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である．

(2) (1) の反復試行において，W が 38 以上となる確率の近似値を求めよう．

いま

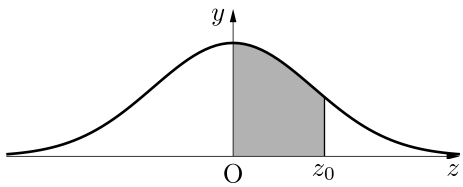
$$P(W \geqq 38) = P\left(\frac{W-m}{\sigma} \geqq -\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{クケ}}\right)$$

と変形できる．ここで，$Z = \dfrac{W-m}{\sigma}$ とおき，W の分布を正規分布で近似すると，正規分布表から確率の近似値は次のように求められる．

$$P\left(Z \geqq -\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{クケ}}\right) = 0.\boxed{\text{コサ}}$$

正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである．



(3) 連続型確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $s \leqq x \leqq t$ で，確率密度関数が $f(x)$ のとき，X の平均 $E(X)$ は次の式で与えられる．

$$E(X) = \int_s^t xf(x)dx$$

a を正の実数とする．連続型確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $-a \leqq x \leqq 2a$ で，確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3a^2}(x+a) & (-a \leqq x \leqq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{3a^2}(2a-x) & (0 \leqq x \leqq 2a \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるとする．このとき，$a \leqq X \leqq \dfrac{3}{2}a$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である．

また，X の平均は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である．さらに，$Y = 2X + 7$ とおくと，Y の平均は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} + \boxed{\text{テ}}$ である．

(17 センター本試験 II・B 第 5 問)

15.3　データの分析

727.　n を自然数とする．2 つの変量 x, y のデータが $2n$ 個の x, y の値の組として，次のように与えられているとする．

$$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \cdots,\ (x_{2n},\ y_{2n})$$

変量 x, y の値は，それぞれ関係式

$$x_k = k,\ y_k = \frac{1}{2k-1-2n} \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 2n)$$

に従っている．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $n = 2$, 3 のとき，変量 y の標準偏差 s_y をそれぞれ求めよ．ただし，答えは分母を有理化して与えること．

(2) 変量 x, y の平均値 $\overline{x}$, $\overline{y}$ を求めよ．

(3) x と y の共分散 s_{xy} を求めよ．

(17 信州大学 医・経法学部 1)

728.　以下の問いに答えよ．

(1) いくつかのデータを比べるとき，それぞれのデータの特徴を 1 つの数値で表すと比較しやすい．そのような数値を代表値という．代表値としてよく用いられるもののうち 3 つを挙げ，それぞれの定義を述べよ．

(2) 次の 2 つの表は，糖尿病患者 100 人 (表 A) と糖尿病でない健常者 100 人 (表 B) を対象に採血検査「HbAlc」の結果を度数分布表の形にまとめたものである．(ここでは HbAlc の値を小数点以下四捨五入していることに留意せよ．)

表 A(糖尿病患者)

HbA1c	3	4	5	6	7	8	9	10	計
人　数	0	0	8	18	28	25	14	7	100

表 B(糖尿病でない健常者)

HbA1c	3	4	5	6	7	8	9	10	計
人　数	9	15	26	22	15	9	4	0	100

(1) で回答した 3 つの代表値を，表 A および表 B に対してそれぞれ求めよ．

(3) 表 A と表 B，2 つのデータを用いて，糖尿病か否かを判断したい．このため判断に用いる値 c を定めて，HbAlc の値が c 以上なら糖尿病である，c 未満なら糖尿病でないとする判定方法を採用する．そして，健常者を糖尿病としてしまう人数と糖尿病患者を健常者としてしまう人数の合計を総数の 200 で割っ

た比率を誤診率と定義する．このとき，上記 200 人のデータに対して，誤診率が最小になるような c の値を求めよ．

(4) (3) においては,「健常者を糖尿病としてしまう人数と糖尿病患者を健常者としてしまう人数の合計」によって誤診率を定義したが，その他にどのような定義が考えられるか．別の定義を新たに 2 つ与えて，その意図するところを述べよ．

(補足) この問題に用いた上記データは架空のものである．実際の診療では，検査値「HbAlc」だけによるのではなく，症状，病歴，生活習慣，他の検査結果などを総合して診断が行われる．

(17 浜松医科大学 4)

°729. 与えられた n 個の実数 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ に対して，関数

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - x_i|$$

を考える．

(i) $f(x)$ は x の連続関数であり，各々の開区間 $(x_{\mathrm{i}-1},\ x_{\mathrm{i}})$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n+1)$ において微分可能である．ただし $x_0 = -\infty,\ x_{n+1} = \infty$ とおく．区間 $(x_{i-1},\ x_i)$ において $f(x)$ を微分すると $f'(x) = \boxed{(う)}$ である．

(ii) ある実験において計測を n 回繰り返し行って，データ $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ を得た．これらのデータの中央値を m とするとき，関数 $f(x)$ は $x = m$ において最小値をとることを示しなさい．

(17 慶應大学 医学部 1(3))

°730.

スキージャンプは，飛距離および空中姿勢の美しさを競う競技である．選手は斜面を滑り降り，斜面の端から空中に飛び出す．飛距離 D（単位は m）から得点 X が決まり，空中姿勢から得点 Y が決まる．ある大会における 58 回のジャンプについて考える．

(1) 得点 X，得点 Y および飛び出すときの速度 V（単位は km/h）について，図 1 の 3 つの散布図を得た．

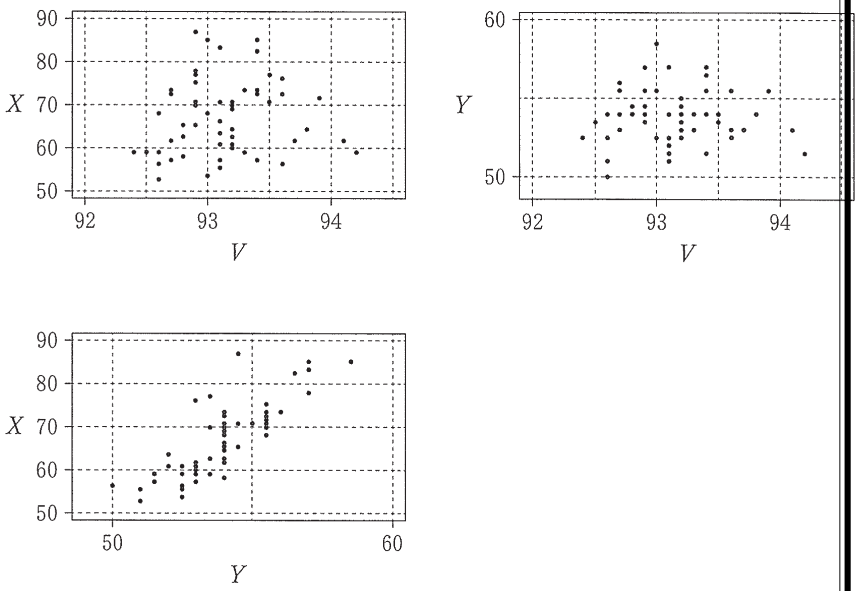


図　1

（出典：国際スキー連盟の Web ページにより作成）

次の シ ，ス ，セ に当てはまるものを，下の⓪～⑥のうちから一つずつ選べ．ただし，解答の順序は問わない．

図 1 から読み取れることとして正しいものは，$\boxed{シ}$，$\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$ である．

⓪ X と V の間の相関は，X と Y の間の相関より強い．

① X と Y の間には正の相関がある．

② V が最大のジャンプは，X も最大である．

③ V が最大のジャンプは，Y も最大である．

④ Y が最小のジャンプは，X は最小ではない．

⑤ X が 80 以上のジャンプは，すべて V が 93 以上である．

⑥ Y が 55 以上かつ V が 94 以上のジャンプはない．

(2) 得点 X は，飛距離 D から次の計算式によって算出される．

$$X = 1.80 \times (D - 125.0) + 60.0$$

次の ソ ，タ ，チ にそれぞれ当てはまるものを，下の⓪～⑥のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

- X の分散は，D の分散の $\boxed{ソ}$ 倍になる．

- X と Y の共分散は，D と Y の共分散の $\boxed{\text{タ}}$ 倍である．ただし，共分散は，2 つの変量のそれぞれにおいて平均値からの偏差を求め，偏差の積の平均値として定義される．
- X と Y の相関係数は，D と Y の相関係数の $\boxed{\text{チ}}$ 倍である．

⓪ -125　① -1.80　② 1　③ 1.80
④ 3.24　⑤ 3.60　⑥ 60.0

(3) 58 回のジャンプは 29 名の選手が 2 回ずつ行ったものである．1 回目の $X+Y$（得点 X と得点 Y の和）の値に対するヒストグラムと 2 回目の $X+Y$ の値に対するヒストグラムは図 2 の A, B のうちのいずれかである．また，1 回目の $X+Y$ の値に対する箱ひげ図と 2 回目の $X+Y$ の値に対する箱ひげ図は図 3 の a, b のうちのいずれかである．ただし，1 回目の $X+Y$ の最小値は 108.0 であった．

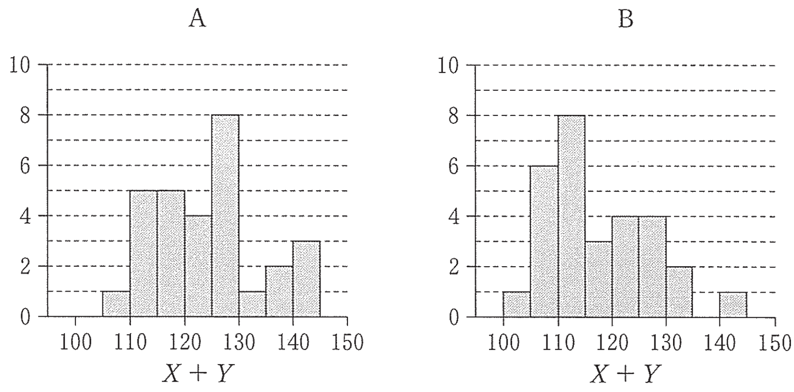


図　2

（出典：国際スキー連盟の Web ページにより作成）

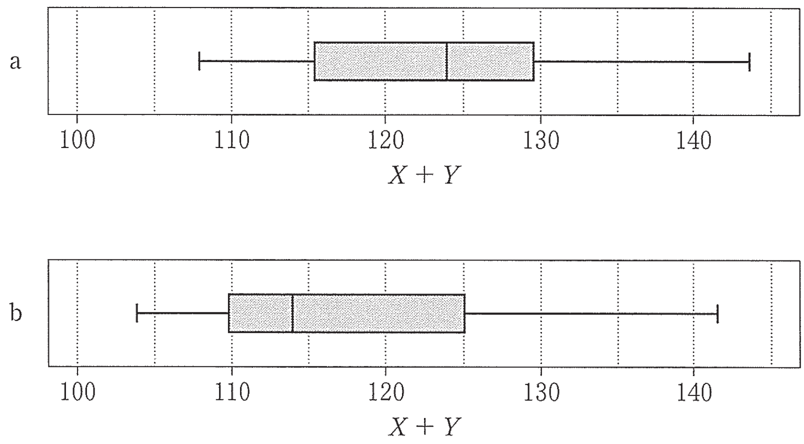


図　3

（出典：国際スキー連盟の Web ページにより作成）

次の $\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，下の表の0～3のうちから一つ選べ．

1 回目の $X+Y$ の値について，ヒストグラムおよび箱ひげ図の組合せとして正しいものは，$\boxed{\textbf{ツ}}$ である．

	0	1	2	3
ヒストグラム	A	A	B	B
箱ひげ図	a	b	a	b

次の $\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものを，下の0～3のうちから一つ選べ．

図 3 から読み取れることとして正しいものは，$\boxed{\text{テ}}$ である．

0　1 回目の $X+Y$ の四分位範囲は，2 回目の $X+Y$ の四分位範囲より大きい．

1　1 回目の $X+Y$ の中央値は，2 回目の $X+Y$ の中央値より大きい．

2　1 回目の $X+Y$ の最大値は，2 回目の $X+Y$ の最大値より小さい．

3　1 回目の $X+Y$ の最小値は，2 回目の $X+Y$ の最小値より小さい．

(17 年 センター本試験 I・A 第 2 問 [2])

731. n を自然数とする．2 つの変量 x, y のデータが $2n$ 個の x, y の値の組として，次のように与えられているとする．

$$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \cdots,\ (x_{2n},\ y_{2n})$$

変量 x, y の値は，それぞれ関係式

$$x_k = k,\ y_{ko} = \frac{1}{2k-1-2n} \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n)$$

に従っている．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $n=2$, 3 のとき，変量 y の標準偏差 s_y をそれぞれ求めよ．ただし，答えは分母を有理化して与えること．

(2) 変量 x, y の平均値 $\overline{x}$, $\overline{y}$ を求めよ．

(3) x と y の共分散 s_{xy} を求めよ．

(17 信州大学 医・経法学部 1)

732. 大腸菌によるタンパク質の生成に関する実験を考える．シャーレに大腸菌を入れ培養し，3 時間後，6 時間後，9 時間後に生成されたタンパク質の量を測定する (複数のシャーレを用いて測定する．それぞれのシャーレごとに測定誤差が出る)．各時間ごとに，測定されたタンパク質の量の平均値を以下に示す．

時間 (時間)	平均値 (mg)
0	5.0
3	11.0
6	15.0
9	17.0

t 時間後のタンパク質の量 (mg) を $P(t)$ とする．初期値は，$P_0 = P(0) = 5.0$ である．

生成されるタンパク質の量は，方程式

$$P'(t) = \kappa - \gamma P(t) \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

をみたす $P(t)$ で近似されることが知られている．ここで κ および γ は定数で，γ を決めることがもっとも重要な問題である．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数

$$P(t) = \frac{\kappa}{\gamma} + \left(P_0 - \frac{\kappa}{\gamma}\right)e^{-\gamma t}$$

は方程式 $(*)$ の解であることを証明せよ．

(2) $\alpha = \dfrac{\kappa}{\gamma}$ とすると，$(*)$ の解は

$$P(t) = \alpha + (5.0 - \alpha)e^{-\gamma t}$$

となる．この解を実験データに合わせたい．そのために $t = 3$ および $t = 9$ のデータの平均値を使う．すなわち，

$$P(3) = 11.0,\ P(9) = 17.0$$

とする．このとき，関係式

$$e^{-9\gamma} = (e^{-3\gamma})^3$$

を用いて α の値を求めよ．

(3) $P(3) = 11.0$ および (2) の α を用いて γ を求めよ．簡単にするため，a と b を定数として

$$\gamma = a \log b$$

の形で表わせ (可能な限り簡潔な形にせよ)．

(4) 以上のことを用いて $P(6)$ の値を求めよ．

(17 横浜市立大学 医学部 4)

733. 変量 x の 9 個のデータ x_1，x_2，x_3，$\cdots$，x_9 について考える．この 9 個のデータの平均値は m，標準偏差は s であり，s は 0 ではないとする．以下の問いに答えよ．

(1) a，b を実数とし，$a > 0$ とする．変量 x の 9 個のデータと，変量 y の 9 個のデータ y_1，y_2，y_3，$\cdots$，y_9 との間に

$$y_k = ax_k + b \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9)$$

の関係があるとする．変量 y の 9 個のデータの平均値は 0，標準偏差は 1 であるとき，a，b を m，s を用いて表せ．

(2) 変量 x の 9 個のデータのうちの 4 個のデータ x_1，x_2，x_3，x_4 の平均値が m，標準偏差が $s+1$ であるとする．このとき，残りの 5 個のデータ x_5，x_6，x_7，x_8，x_9 の平均値と標準偏差を m，s を用いて表し，$s \geqq 2$ でなければならないことを示せ．

(17 奈良女子大学 理・生活環境学部 6)

734. サイコロを 4 回投げて，出た目の数を，a, b, c, d とする．サイコロを投げるとき，1 から 6 までの 6 通りのうちいずれかの目が出て，どの目が出ることも同様に確からしいとする．このとき，a, b, c, d を 4 個の数からなるデータとみなすことにする．

(1) a, b, c, d はすべて異なるという条件の下で，4 個の数からなるデータの平均値と中央値が一致する場合の確率を求めなさい．

(2) 4 個の数からなるデータの平均値と中央値が一致する場合の確率を求めなさい．

(17 埼玉大学 教育・経済学部 3)

735. ある美術館の来館者の行動を把握するために，平日のある 1 日と，日曜日のある 1 日に，来館者の滞在時間を測る調査を行った．その結果，それぞれ 8 人の来館者の滞在時間を取得した．これらの滞在時間について以下の 3 つの観点から分析を行いなさい．なお，小数点以下の数値については，四捨五入し，整数部分のみを解答としなさい．

平日の来館者の滞在時間（分）: 21 , 34, 15, 37, 32, 30, 36, 19

日曜日の来館者の滞在時間（分）: 28 , 37, 16, 40, 26, 22, 38, 17

(1) 平日の来館者も日曜日の来館者も，滞在時間の平均値は,$\boxed{19}\boxed{20}$分であった．ところが，平日の来館者の滞在時間の中央値は$\boxed{21}\boxed{22}$分，日曜日の来館者の滞在時間の中央値は$\boxed{23}\boxed{24}$分であった．中央値からみると$\boxed{25}$のほうが長く滞在する人が，多いように見える．

(2) つぎに，滞在時間を四分位数を使って整理した．平日の来館者の四分位範囲は$\boxed{26}\boxed{27}$分，日曜日の来館者の四分位範囲は$\boxed{28}\boxed{29}$分となる．よって四分位範囲からみると，$\boxed{30}$の滞在時間の散らばり度合いが，より大きいことがわかった．

(3) さらに，滞在時間の散らばりを分散を使って表すと，平日は 63，日曜日は$\boxed{31}\boxed{32}$となった．よって分散からみても，たしかに滞在時間の散らばり度合いは，$\boxed{30}$のほうが大きい．

以上の分析を通じて，平日の来館者も，日曜日の来館者も，平均滞在時間は同じであるが，$\boxed{25}$は滞在時間の散らばり度合いが小さい人々，$\boxed{30}$は滞在時間の散らばり度合いが大きい人々であるということがわかった．

25，30 の選択肢

① 平日の来館者　　　② 休日日の来館者

(17 駿河台大学 S 方式 2)

§16　コンピュータ