1 n を自然数とする。

(1) 次の等式を示せ。

$$(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-1}+b^n)=a^{n+1}-b^{n+1}$$

(2) $w=\dfrac{10^{n(n+1)}-2^{n+1}}{10^n-2}$ とおく。w は整数であることを示せ。また，w を 10^n で割った余りは 2^n であることを示せ。

(3) 実数 x に対し，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。$\left[\dfrac{10^{n(n+1)}}{10^n-2}\right]$ を 10^n で割った余りを求めよ。

2 z を虚部が正である複素数とし，O(0)，P(2)，Q($2z$)を複素数平面上の3点とする。△OPR，△PQS，△QOT は△OPQ の内部と重ならない正三角形とし，3点 U，V，W をそれぞれ△OPR，△PQS，△QOT の重心とする。

(1) 3点 U，V，W が表す複素数をそれぞれ z で表せ。

(2) △UVW は正三角形であることを示せ。

(3) z が $|z-i|=\dfrac{1}{2}$ を満たしながら動くとき，△UVW の重心 G の軌跡を複素数平面上に図示せよ。ただし，i は虚数単位を表す。

3 十分な数の赤玉と青玉が手元にあるものとする。a と n を自然数とし，はじめに，空の袋に a 個の赤玉を入れておく。以下の試行を繰り返す。袋の中から玉を1個取り出し，それが赤玉ならば青玉を1個袋に入れ，青玉ならば赤玉を1個袋に入れる。さらに，取り出した玉自体も袋に戻し，袋の中の玉をよくかき混ぜる。結果として，1回の試行ごとに袋の中にある玉は1個ずつ増える。この試行を繰り返したとき，n 回目の試行後に袋に入っている赤玉の個数が k である確率を $p_n(k)$ で表す。例えば，$p_1(k)$ の値は k が a のとき1，そのほかの場合は0である。また，$M_n = \sum_{k=0}^{a+n} kp_n(k)$ とする。

(1) $p_2(k)$ を求めよ。

(2) $p_{n+1}(k+1) = Bp_n(k) + Cp_n(k+1)$ と表すとき，B と C を a，k，n で表せ。

(3) $M_1 = a$，$M_{n+1} = \dfrac{a+n-1}{a+n}M_n + 1$ を示せ。

(4) (3)の式を満たす数列 $\{M_n\}$ の一般項を求めよ。さらに，$\lim_{n \to \infty} \dfrac{M_n}{n}$ を求めよ。

4 $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ とし，曲線 $y = f(x)$ を C とする。また，$s > 1$ とし，$0 \leqq x \leqq \log s$ の範囲における C の長さを $L(s)$ とする。ただし，$\log s$ は s の自然対数であり，e は自然対数の底である。

(1) $L(s)$ を s で表せ。

(2) P を x 座標が $\log s$ であるような C 上の点とし，この点での C の接線を ℓ とする。Q$(v,\ w)$ を $v < \log s$ かつ PQ $= L(s)$ を満たす ℓ 上の点とするとき，v と w を s で表せ。

(3) (2)において，s が1より大きい実数を動くとき，点 R$(-v + \log s,\ w)$ の軌跡を座標平面上に図示せよ。