$\boxed{1}$ 三角形ABCについて

$$|\overrightarrow{AB}|=1,\ |\overrightarrow{AC}|=2,\ |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{6}$$

が成立しているとする。三角形ABCの外接円の中心をOとし，直線AOと外接円とのA以外の交点をPとする。

(1) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の内積を求めよ。

(2) $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ が成り立つような実数 s, t を求めよ。

(3) 直線APと直線BCの交点をDとするとき，線分ADの長さを求めよ。

$\boxed{2}$ 座標平面上の2点 $\left(\frac{1}{16}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{9}\right)$ を通る直線 ℓ を考える。

(1) ℓ 上にある格子点の座標をすべて求めよ。ただし，格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数であるような点のことである。

(2) ℓ 上の格子点のうち，原点との距離が最小となる点をAとする。また，ℓ 上のA以外の格子点のうち，原点との距離が最小となる点をBとする。さらに，Aの x 座標とBの y 座標をそれぞれ x 座標と y 座標とする点をCとする。三角形ABCの内部および周上にある格子点の個数を求めよ。

$\boxed{3}$ n を2以上の自然数とする。1個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い，出た目を順に $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする。

(1) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の最大公約数が3となる確率を n の式で表せ。

(2) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の最大公約数が1となる確率を n の式で表せ。

(3) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の最小公倍数が20となる確率を n の式で表せ。

$\boxed{4}$ αを$0 < \alpha < 1$を満たす実数とし，$f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$とする。数列$\{a_n\}$が

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = f(a_n) \ \ (n = 1, 2, \cdots)$$

で定義されるとき，次の問に答えよ。

(1) すべての自然数nに対して，$0 < a_n < 1$かつ$a_{n+1} > a_n$が成り立つことを示せ。

(2) $b_n = \dfrac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n}$とおくとき，すべての自然数$n$に対して，$b_{n+1} < b_n$が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n$および(2)で定めた$\{b_n\}$に対して$\displaystyle\lim_{n \to \infty} b_n$を求めよ。

$\boxed{5}$ aを正の定数とする。微分可能な関数$f(x)$はすべての実数xに対して次の条件を満たしているとする。

$$0 < f(x) < 1, \quad \int_0^x \frac{f'(t)}{\{1 - f(t)\}f(t)}\,dt = ax$$

さらに，$f(0) = \dfrac{1}{3}$であるとする。

(1) $f(x)$を求めよ。

(2) 曲線$y = f(x)$とx軸および2直線$x = 0$, $x = 1$で囲まれる図形の面積$S(a)$を求めよ。さらに，$\displaystyle\lim_{a \to +0} S(a)$を求めよ。