

1  $f(x) = x^4 + 6x^3 - 24x^2$  とし、曲線  $C : y = f(x)$  を考える。

(1)  $C$  の変曲点をすべて求めよ。

(2)  $C$  の変曲点のうち  $x$  座標の値が最大のを  $P$  とする。  
 $P$  における  $C$  の接線  $l$  の方程式を求めよ。

(3)  $C$  と (2) の接線  $l$  で囲まれた部分の面積を求めよ。

2  $\theta$  を  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  を満たす実数とし、平面上の点  $P$  と点  $Q$  を

$$P \left( \frac{1}{2} \{1 - \cos \theta - \sqrt{3}(\tan \theta - \sin \theta)\}, \frac{1}{2} \{\sqrt{3}(1 - \cos \theta) + \tan \theta - \sin \theta\} \right)$$

$$Q \left( \frac{1}{2} \{1 + \cos \theta - \sqrt{3}(\tan \theta + \sin \theta)\}, \frac{1}{2} \{\sqrt{3}(1 + \cos \theta) + \tan \theta + \sin \theta\} \right)$$

で定める。  $M$  を線分  $PQ$  の中点とし、  $O$  を原点  $(0, 0)$  とする。

(1)  $\overrightarrow{PQ}$  と  $\overrightarrow{OM}$  を求めよ。

(2) 3 点  $O, P, Q$  は同一直線上にあることを示せ。

(3)  $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PM}|$  となるような  $\theta$  の値を求めよ。

3 袋の中に番号1のカードが1枚, 番号2のカードが2枚, 番号3のカードが3枚, 番号4のカードが4枚, 合計10枚入っている。この袋の中からカードを1枚ずつ引いていく。ただし, 一度引いたカードは袋の中には戻さないものとする。 $n$ 枚目で初めて4つすべての番号のカードが現れる事象を  $A_n$ , 初めて4つすべての番号のカードが現れたときに引いたカードが番号  $j$  である事象を  $B_j$  とする。

- (1)  $A_{10}$  の起こる確率を求めよ。
- (2)  $A_9 \cap B_1$  の起こる確率を求めよ。
- (3)  $A_9$  が起こったときの  $B_1$  が起こる条件付き確率を求めよ。

4 次の問に答えよ。

(1) 整数  $m$  に対して,  $m^2$  を4で割った余りは0または1であることを示せ。

(2) 自然数  $n, k$  が

$$25 \times 3^n = k^2 + 176 \quad \dots\dots (*)$$

を満たすとき,  $n$  は偶数であることを示せ。

(3) (2) の関係式 (\*) を満たす自然数の組  $(n, k)$  をすべて求めよ。