1 次の各問に答えよ.

(1) $\vec{a}=(3,\ -1,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ 2,\ 1)$とする. tをすべての実数とするとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$の最小値を求めよ.

(2) 不等式

$$8\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-3\log_8 x^9<5$$

をみたすxの範囲を求めよ.

(3) $\sqrt{23}$の整数部分をn_0, $\left(\sqrt{23}-n_0\right)^{-1}$の整数部分を$n_1$, $\left\{\left(\sqrt{23}-n_0\right)^{-1}-n_1\right\}^{-1}$の整数部分を$n_2$とする. このとき$n_0+(n_1+{n_2}^{-1})^{-1}$を求めよ.

$\boxed{2}$ 次の各問に答えよ.

(1) 同一直線上にない平面上の相異なる任意の3つの点X，Y，Zに対して，$\angle$YXZの二等分線はベクトル $\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{XY}}|}\overrightarrow{\mathrm{XY}}+\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{XZ}}|}\overrightarrow{\mathrm{XZ}}$ と平行であることを示せ.

平面上の $\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{AB}=4$ である三角形OABの内接円の中心をIとする.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ.

$\angle$OABの外角の二等分線と直線OIの交点をJとする.

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ.

(4) Iから直線OAに下ろした垂線をIHとするとき，IHの長さを求めよ.

(5) Jから直線ABに下ろした垂線をJKとするとき，JKの長さを求めよ.

3 確率 p でシュートを成功させる選手がいる．ある試合中に，この選手は 3 回のシュートを試みた．

(1) この選手が 3 回目で初めてシュートを成功させた確率を，p を用いて表せ．

この選手の親は試合を観戦できなかったが，「3 回のシュートのうち少なくとも 1 回のシュートを成功させた」という事象 A が起こったことを知った．この事象 A が起こったときに，この選手が 3 回目で初めてシュートを成功させる条件付き確率は $\dfrac{25}{109}$ であるという．

(2) p の値を求めよ．

(3) 事象 A が起こったときに，この選手が 2 回目で初めてシュートを成功させる条件付き確率を求めよ．

4 n を 2 以上の自然数とする．$x > 0$ において関数 $f_n(x)$ を，

$$f_n(x) = x^{n-1} e^{-x}$$

と定義する．また，関数 $f_n(x)$ の最大値を m_n とする．

(1) m_n を n を用いて表せ．

(2) $x > 0$ であるとき，$xf_n(x) \leqq m_{n+1}$ が成り立つことを利用して，極限値 $\lim_{x \to \infty} f_n(x)$ を求めよ．

a を正の実数とするとき，x に関する方程式

$$x = ae^x \qquad \cdots\cdots①$$

を考える．

(3) 方程式 ① における正の実数解の個数を調べよ．

以下，方程式 ① が，相異なる 2 つの正の実数解 α，β を持ち，$\beta - \alpha = \log 2$ をみたす場合を考える．

(4) α，β，a を求めよ．

(5) xy 平面上において $y = f_2(x)$ と $y = a$ で囲まれた領域の面積を求めよ．