令和３年度第１年次入学者一般選抜学力検査問題　解答例

数　　　学

［１］

(1)　第 n 群に含まれる自然数は 2^{n-1} 個であるから，

$$2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5=1+2+4+8+16+32=63$$

より，第6群までには63個の自然数がある。
よって，第6群の最後の自然数は，$\underline{63}$ である。

(2)　第 n 群に含まれる自然数は 2^{n-1} 個であるから，

$$2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6=1+2+4+8+16+32+64=127$$

より，第7群までには127個の自然数がある。
よって，$a_8=127+1=\underline{128}$ である。

(3)　$n \geqq 2$ のとき，第 n 群の最初の自然数 a_n は，第1群から第 $(n-1)$ 群までに入っている自然数の総数に1を加えたものであるから，

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}+1 \\ &= (1+2+4+\cdots+2^{n-2})+1 \\ &= (2^{n-1}-1)+1 \\ &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

となる。

$n=1$ のとき，すなわち，a_1 は1であり，$a_n=2^{n-1}$ をみたす。

以上より，$a_n=\underline{2^{n-1}}$ である。

(4)　第 n 群には，2^{n-1} から 2^n-1 までの自然数が含まれる。この総和を求める。

$$\begin{aligned} T_n = 2^{n-1}\times 2^{n-1}+\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} k &= 2^{2(n-1)}+\frac{2^{n-1}\times(2^{n-1}-1)}{2} \\ &= \underline{2^{2n-2}+2^{2n-3}-2^{n-2}} \\ &= \underline{3\times 2^{2n-3}-2^{n-2}} \end{aligned}$$

【別解】

$$\begin{aligned} T_n = \frac{(2^{n-1}+(2^n-1))\times 2^{n-1}}{2} &= \frac{2^{2n-2}+2^{2n-1}-2^{n-1}}{2} \\ &= \underline{2^{2n-3}+2^{2n-2}-2^{n-2}} \\ &= \underline{3\times 2^{2n-3}-2^{n-2}} \end{aligned}$$

(5)　$a_n = 2^{n-1}$ であるから，　$k\log_2 a_k = k\log_2 2^{k-1} = k(k-1)$　である。これより，

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\log_2 a_k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n} = \underline{\frac{n-1}{n}}$$

【注】　$\underline{1-\frac{1}{n}}$　も可

［２］

(1) 点$(R+r, 0)$ を原点Oを中心としてθだけ回転した点がO_1であるので，O_1の座標は，$\big((R+r)\cos\theta,\ (R+r)\sin\theta\big)$ となる。（答）

(2) 円C_1は円Cの上をすべることなく転がることから両円における転がった外周の長さは等しい。円C上での外周の長さは$R\theta$ ，円C_1上での外周の長さは$r\beta$ である。よって，

$R\theta = r\beta$ $\qquad\qquad$ $\therefore\ \beta = \frac{R}{r}\theta$ $\qquad$（答）

(3) 点$(r, 0)$を原点Oを中心として$(\alpha+\beta+\pi)$だけ回転した点をQとおく。このとき，$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{OQ}$であるので，(1)より，

$$\overrightarrow{OO_1} = \big((R+r)\cos\alpha,\ (R+r)\sin\alpha\big)$$

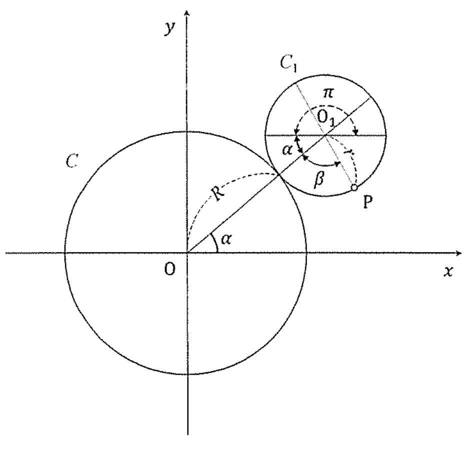
$$\overrightarrow{OQ} = (r\cos(\alpha+\beta+\pi), r\sin(\alpha+\beta+\pi)) = (-r\cos(\alpha+\beta), -r\sin(\alpha+\beta))$$

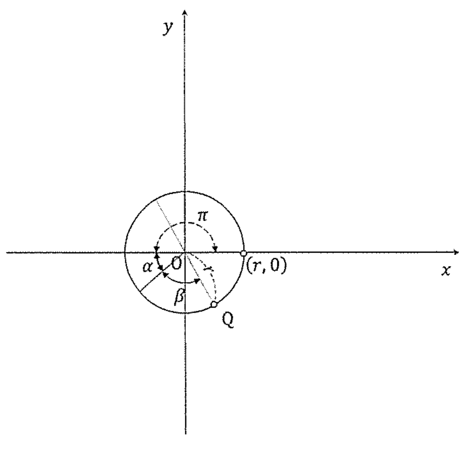
$\alpha=\theta$ のとき，(2)より$\beta = \frac{R}{r}\theta$であるので，

$$\overrightarrow{OQ} = \left(-r\cos\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta, -r\sin\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right)$$

よって，

$$(x, y) = \left((R+r)\cos\theta - r\cos\left(\tfrac{R+r}{r}\right)\theta, (R+r)\sin\theta - r\sin\left(\tfrac{R+r}{r}\right)\theta\right)$$ （答）





(4)　$R=2r$ のとき，(3)より軌跡Sは媒介変数θを用いて，

$$\begin{cases} x = 3r\cos\theta - r\cos 3\theta \\ y = 3r\sin\theta - r\sin 3\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

と表すことができる。よって，

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = -3r\sin\theta + 3r\sin 3\theta \\ \frac{dy}{d\theta} = 3r\cos\theta - 3r\cos 3\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= (-3r\sin\theta + 3r\sin 3\theta)^2 + (3r\cos\theta - 3r\cos 3\theta)^2 \\ &= 9r^2\{(-\sin\theta + \sin 3\theta)^2 + (\cos\theta - \cos 3\theta)^2\} \\ &= 9r^2\{(\sin^2\theta + \sin^2 3\theta - 2\sin\theta\sin 3\theta) + (\cos^2\theta + \cos^2 3\theta - 2\cos\theta\cos 3\theta)\} \\ &= 18r^2\{1 - (\sin\theta\sin 3\theta + \cos\theta\cos 3\theta)\} \end{aligned}$$

余弦の加法定理より，$\cos\theta\cos(3\theta) + \sin\theta\sin(3\theta) = \cos(\theta - 3\theta) = \cos(-2\theta) = \cos 2\theta$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 18r^2(1 - \cos 2\theta)$$

2倍角の公式より，$1 - \cos 2\theta = 2\sin^2\theta$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 36r^2\sin^2\theta$$

軌跡Sの長さLは，$L = \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^\pi \sqrt{36r^2\sin^2\theta}\, d\theta = 6r\int_0^\pi \sqrt{\sin^2\theta}\, d\theta$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，　$\sqrt{\sin^2\theta} = \sin\theta$

よって，　$L = 6r\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = 6r[-\cos\theta]_0^\pi = 12r$　（答）

［３］

(1)　$x^3-2x=0$ なので，$x(x^2-2)=0$ から，

$x=-\sqrt{2},\ \ 0,\ \ +\sqrt{2}$ が得られる。

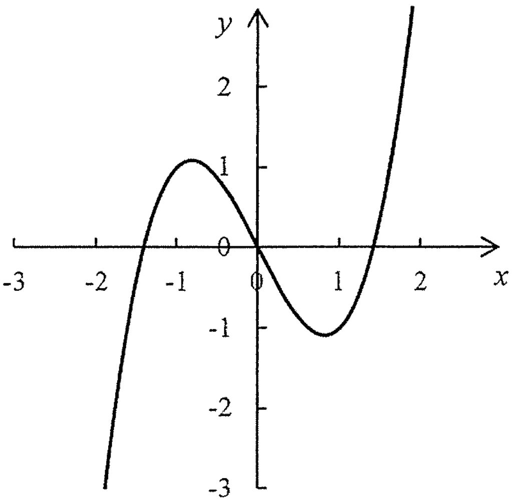
(2) $f'(x)=3x^2-2$ から，$f'(x)=0$ とおいて

$x=-\sqrt{\dfrac{2}{3}},\ \ +\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ が得られる。関数の増減は，

$x<-\sqrt{\dfrac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad f'(x)>0$

$-\sqrt{\dfrac{2}{3}}<x<\sqrt{\dfrac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad f'(x)<0$

$x>\sqrt{\dfrac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad f'(x)>0$



参考図　$y=x^3-2x$

となる。よって，上で求めたxを関数 $f(x)$に代入すると，

$x=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ で極大値 $\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$

$x=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ で極小値 $-\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$ がそれぞれ求まる。

(3) $y''=6x$ から，$y''=0$ とおいて，$x=0$ が得られる。さらに $x>0$ で $y''>0$，$x<0$ で $y''<0$ より $y=f(x)$ の変曲点は $(0,0)$ である。

(4) (1)の解から積分範囲が求まり，面積

$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\left\{(x^3-2x)\right\}dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}\left\{-(x^3-2x)\right\}dx=2\left[-\frac{x^4}{4}+x^2\right]_0^{\sqrt{2}}=2(-1+2)=2$$

が得られる。

(5)

$$V=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\pi(x^3-2x)^2\,dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}\pi(x^3-2x)^2\,dx$$

$$=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{0}(x^6-4x^4+4x^2)\,dx+\pi\int_{0}^{\sqrt{2}}(x^6-4x^4+4x^2)\,dx=\pi\left[\frac{x^7}{7}-\frac{4x^5}{5}+\frac{4x^3}{3}\right]_{-\sqrt{2}}^{0}+\pi\left[\frac{x^7}{7}-\frac{4x^5}{5}+\frac{4x^3}{3}\right]_{0}^{\sqrt{2}}$$

$$=2\pi\left(\frac{8\sqrt{2}}{7}-\frac{16\sqrt{2}}{5}+\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{128\sqrt{2}}{105}\pi$$

[4]

(1)

ア．2回の操作で起こりうる$5^2=25$通りのうち，カードに書かれた数が2回とも同じである組み合わせは(1,1)，(2,2)，(3,3)，(4,4)，(5,5)の5通りである。したがって，求める確率は

$$\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$$

イ．2回の操作で起こりうる$5^2=25$通りのうち，和が8以上となる数の組み合わせは(5,5)，(5,4)，(5,3)，(4,5)，(4,4)，(3,5)の6通りである。
したがって，求める確率は

$$\frac{6}{25}$$

(2)

ア．2枚のカードを取り出すとき，すべての取り出し方は${}_{10}C_2=45$通りである。この中で，2枚のカードに書かれた数が同じである組み合わせは1から5の5通りである。したがって，求める確率は

$$\frac{5}{45}=\frac{1}{9}$$

イ．4のカードを1枚取り出した残り9枚の中で，和が8以上となりうるのは4のカード1枚，5のカード2枚の計3枚である。
したがって，求める確率は

$$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

ウ．1枚目のカードに書かれた数をNとして場合分けする。2枚目のカードに書かれた数のうち和が8以上となるのは，

$N=1$　和は8以上にはならない
$N=2$　和は8以上にはならない
$N=3$　残り9枚のうち，5のカード2枚
$N=4$　残り9枚のうち，5のカード2枚，4のカード1枚
$N=5$　残り9枚のうち，5のカード1枚，4のカード2枚，3のカード2枚

したがって，求める確率は

$$\frac{1}{5}\times 0+\frac{1}{5}\times 0+\frac{1}{5}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{9}+\frac{1}{5}\times\frac{5}{9}=\frac{2}{9}$$

エ．求める確率は，2枚のカードに書かれた数の積が奇数となる場合の余事象である。積が奇数となるのは，二つの数がいずれも奇数である場合である。その確率は，1枚目のカードが1, 3, 5のいずれかであり，かつ，2枚目のカードが残り9枚のうち奇数の5枚である確率なので，

$$\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$$

したがって，求める確率は

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$