令和３年度第１年次入学者一般選抜学力検査問題

数　　　学

注　意　事　項

1　試験開始の合図まで，問題冊子を開いてはいけません。

2　問題冊子の枚数は，表紙，白紙を含めて６枚です。

3　問題は４問あります。全問解答してください。

4　解答用紙が６枚と計算用紙が１枚あります。
　すべての解答用紙と計算用紙の受験番号欄に受験番号を記入してください。

5　解答は解答用紙の所定の欄に記入してください。解答を裏面に記入してはいけません。

6　落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあれば，ただちに申し出てください。

7　試験終了時刻まで退出してはいけません。

8　問題冊子は持ち帰ってください。

このページは白紙です。

［１］　1から始まる自然数の列を，以下のように群に分ける。

$$\underset{\text{第1群}}{1}\ \big|\ \underset{\text{第2群}}{2,\ 3}\ \big|\ \underset{\text{第3群}}{4,\ 5,\ 6,\ 7}\ \big|\ 8,\ \cdots$$

ただし，第 n 群 $(n=1,2,3,\cdots)$ には，2^{n-1} 個の自然数が入るものとする。さらに，第 n 群の最初の自然数を a_n で表す。以下の問いに答えよ。

(1)　第6群の最後の自然数を求めよ。

(2)　a_8 を求めよ。

(3)　a_n を求めよ。

(4)　第 n 群に含まれるすべての自然数の和 T_n を求めよ。

(5)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\log_2 a_k}$ を求めよ。ただし，$n\geqq 2$ とする。

［２］　xy平面の原点Oを中心とする半径Rの円Cと，これに外接する半径rの円C_1がある。ただし，$R \leqq 2r$とする。円C_1は円Cに外接しながら反時計まわりにすべることなく回転し，その接点を点Aとする。円C_1の中心をO_1とし，下図のように，直線OO_1とx軸の正の向きとのなす角をα，円C_1の弧APに対する中心角をβとする。αが0からπまで変化するとき，円C_1の周上に固定された点Pの軌跡をSとする。ただし，$\alpha = 0$のときに点Pは点$(R, 0)$の位置にあるものとする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\alpha = \theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$であるときの点$\mathrm{O}_1$の座標$(x, y)$を$R$，$r$，$\theta$を用いて表せ。

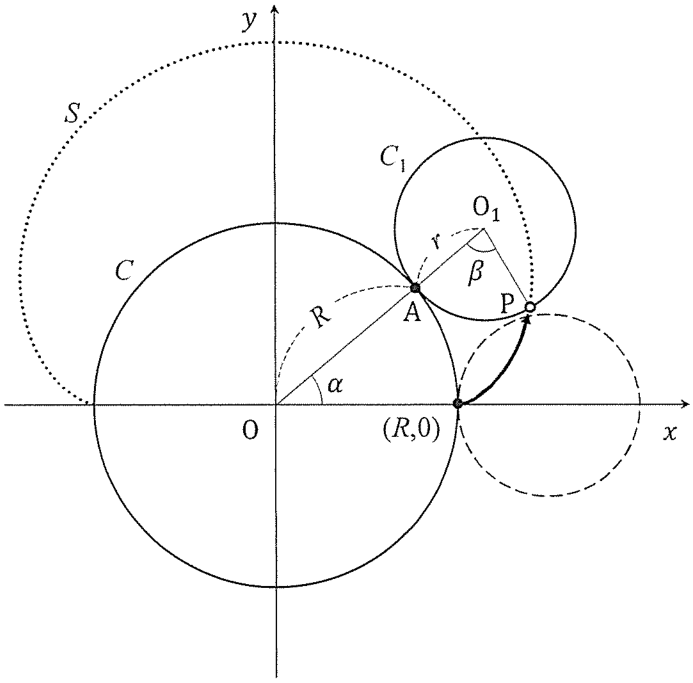
(2)　$\alpha = \theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$であるときの$\beta$を$R$，$r$，$\theta$を用いて表せ。

(3)　$\alpha = \theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$であるときの点Pの座標$(x, y)$を$R$，$r$，$\theta$を用いて表せ。

(4)　$R = 2r$とする。このとき，軌跡Sの長さLをrを用いて表せ。
ただし，曲線$x = f(\theta)$，$y = g(\theta)$ $(\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2)$の長さ$L_0$は，

$$L_0 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

と表すことができる。



［3］　関数 $f(x)=x^3-2x$ について以下の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=0$ を解け。

(2) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ の変曲点を求めよ。

(4) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた二つの部分の面積の和 S を求めよ。

(5) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた二つの部分を，それぞれ x 軸のまわりで1回転させてできる二つの立体の体積の和 V を求めよ。

［4］　以下の問いに答えよ。ただし，答えが分数となる場合は既約分数で答えよ。

(1) 箱の中に，1から5までの数が一つずつ書かれた5枚のカードが入っている。箱の中から1枚のカードを無作為に取り出し，書かれた数を記録してから，取り出したカードを箱の中に戻す。この操作を2回行う。

ア．2回とも同じ数が書かれたカードが出る確率を求めよ。

イ．2回の操作で記録された数の和が8以上になる確率を求めよ。

(2) 箱の中に，1から5までの数が一つずつ書かれたカードがそれぞれ2枚，合計10枚のカードが入っている。この箱の中から1枚のカードを無作為に取り出し，その取り出したカードは箱に戻さないで，続けてもう1枚のカードを箱の中から無作為に取り出す。

ア．取り出した2枚のカードに書かれた数が同じである確率を求めよ。

イ．最初に取り出したカードに書かれた数が4である場合に，取り出した2枚のカードに書かれた数の和が8以上になる確率を求めよ。

ウ．取り出した2枚のカードに書かれた数の和が8以上になる確率を求めよ。

エ．取り出した2枚のカードに書かれた数の積が偶数になる確率を求めよ。