(1) 実数 $a,\ b,\ c,\ d$ の大小関係が $a>b>c>d$ であるとき，3 つの数 $ab+cd,\ ac+bd,\ ad+bc$ の大きさを比較せよ．

(2) $2n$ 個の実数 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{2n}$ の大小関係が

$$x_1>x_2>x_3>\cdots>x_{2n}$$

であるとする．これら $2n$ 個の数を 2 個ずつからなる n 組に分け，組にした数どうしの積をつくり，それら n 個の積の総和を考える．このとき最も大きな総和が得られる組み分けの仕方はどのようなものか．また最も小さな総和が得られる組み分けの仕方はどのようなものか．

(84 一橋大 1)

【答】

(1) $ab+cd>ac+bd>ad+bc$

(2) 最大となる組分けの仕方は $\{x_1,\ x_2\},\ \{x_3,\ x_4\},\ \cdots,\ \{x_{2n-1},\ x_{2n}\}$，
最小となる組分けの仕方は $\{x_1,\ x_{2n}\},\ \{x_2,\ x_{2n-1}\},\ \cdots,\ \{x_n,\ x_{n+1}\}$

【解答】

(1) $a>b>c>d$ より

$$(ab+cd)-(ac+bd)=a(b-c)+d(c-b)=(a-d)(b-c)>0$$
$$(ac+bd)-(ad+bc)=a(c-d)+b(d-c)=(a-b)(c-d)>0$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{ab+cd>ac+bd>ad+bc} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 最大値について：

(1) より 4 個の数を 2 個ずつの 2 組に分けてつくられる積の和が最大となるのは，大きいもの 2 個の積 ab と残りの積 bc の和のときである．

積 x_1x_i において $i\fallingdotseq 2$ とすると，n 個の積のうち x_2x_j となるものが存在する．
$x_1>x_2>x_i$ かつ $x_1>x_2>x_j$ であるから，4 個の数 $x_1,\ x_2,\ x_i,\ x_j$ に対して

$$x_1x_2+x_ix_j>x_1x_i+x_2x_j$$

であり，x_i を x_2 に置き換えた方が積の総和は大きくなる．

残り $2n-2$ 個に対しても，x_3x_i $(i\fallingdotseq 4)$ ならば，x_i を x_4 に置き換えた方が積の総和は大きくなる．この操作を繰り返すことにより

$$x_1x_2+x_3x_4+\cdots+x_{2n-1}x_{2n}\text{が最大}$$

となる．よって，最も大きな総和が得られる組み分けの仕方は

$$\boldsymbol{\{x_1,\ x_2\},\ \{x_3,\ x_4\},\ \cdots,\ \{x_{2n-1},\ x_{2n}\}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

最小値について：

(1) より 4 個の数を 2 個ずつの 2 組に分けてつくられる積の和が最小となるのは，大きいものと小さいもの 2 個の積 ad と残りの積 bc の和のときであるから，最大値と同様にして

$$x_1x_{2n}+x_2x_{2n-1}+\cdots+x_nx_{n+1}\text{が最小}$$

となる．よって，最も小さな総和が得られる組み分けの仕方は

$$\boldsymbol{\{x_1,\ x_{2n}\},\ \{x_2,\ x_{2n-1}\},\ \cdots,\ \{x_n,\ x_{n+1}\}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．